СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС И ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ГРАФОВ

В. И. Бенедиктович

Институт математики НАН Беларуси
Минск, Беларусь
e-mail: *vbened@im.bas-net.by*

В работе в два раза уменьшена нижняя граница порядка графов, полученная В. Никифоровым, для которых выполняется обобщение достаточного спектрального признака гамильтоновости графа.

Ключевые слова: матрица смежности; спектральный радиус; гамильтонов цикл; минимальная степень; индуцированный подграф.

SPECTRAL RADIUS AND HAMILTONICITY OF GRAPHS

V. I. Benediktovich

Institute of Mathematics of NAS Belarus
Minsk, Belarus

In this article the lower graph order boundary obtained by V. Nikiforov, for which the generalization of the sufficient spectral criterion of Hamiltonicity of a graph is valid, has been reduced twice.

Keywords: adjacency matrix; spectral radius; Hamiltonian cycle; minimum degree; induced subgraph.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный граф порядка n и размера m, и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A = A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей). Наибольшее собственное значение λ_1 называется *спектральным радиусом* (или *индексом*) графа G, который далее будем обозначать через $\rho(G)$. Поскольку матрица A симметрическая, спектральный радиус $\rho(G)$ является положительным действительным корнем характеристического полинома $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ этой матрицы.

Для вершины $v \in V(G)$ будем обозначать ее *окружение* и *замкнутое окружение* через $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ и $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ соответственно. Тогда *степень вершины* $v_i \in V(G)$ равна $\deg_G(v_i) = |N(v_i)|$, которую кратко будем обозначать через $d_{v_i} = d_i$. Пусть $(d_1, d_2, ..., d_n)$ – *последовательность степеней* графа G, упорядоченная по возрастанию: $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Тогда $\delta = d_1$ называется *минимальной степенью* графа.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы G и H

не пересекаются ($V(G)\cap V(H)=\varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G\vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G+H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H. $\overline{H}$ обозначает *дополнение* графа H. Для произвольного подмножества вершин $U\subset V(G)$ графа G через $G[U]$ обозначим *индуцированный* этим множеством подграф в G.

Для любых натуральных чисел $k\geq 1$ и $n\geq k+2$ обозначим

$$L_k(n)=K_1\vee(K_{n-k-1}+K_k).$$

Другими словами, граф $L_k(n)$ состоит из двух графов K_{n-k} и K_k, имеющих единственную общую вершину.

Для любых натуральных чисел $k\geq 1$ и $n\geq 2k+1$ обозначим

$$M_k(n)=K_k\vee(K_{n-2k}+kK_1)=K_k\vee(K_{n-2k}+\overline{K_k}).$$

Другими словами, граф $M_k(n)$ состоит из графа K_{n-k} и k независимых вершин, каждая из которых соединена с некоторыми фиксированными k вершинами графа K_{n-k}.

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа G, называются *гамильтоновыми*. Граф G, содержащий гамильтоновы цикл или цепь, называется *гамильтоновым* или *трассируемым* соответственно. Заметим, что графы $L_k(n)$ и $M_k(n)$ с минимальной степенью $\delta=k$ не являются гамильтоновыми. Граф G называется *гамильтоново-связным*, если для любых его двух вершин u и v существует гамильтонова цепь графа G с концевыми вершинами u и v.

Напомним понятие *замыкания* графа, введенное О. Оре в [1, 2] и развитое А. Бонди и В. Хваталом в [3]. Фиксируем целое число $k\geq 0$. Для заданного графа G выполним следующую операцию: если существуют две несмежные вершины u и v с $d_u+d_v\geq k$, то добавим ребро uv к множеству $E(G)$. *k-Замыканием* графа G называется граф $cl_k(G)$, полученный из графа G с помощью последовательного применения этих операций, пока это возможно. Оказывается, что k-замыкание графа G *единственно*, т. е. не зависит от порядка, в котором добавляются ребра ([3]). Отметим некоторые свойства k-замыкания $cl_k(G)$ графа G [1, 2]:

1. Если u и v – произвольные несмежные вершины $cl_k(G)$, то справедливо неравенство $d_{cl_k(G)}(u)+d_{cl_k(G)}(v)\leq k-1$.

2. Граф G порядка n гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоново его n-замыкание $cl_n(G)$.

Кроме того, нам понадобится следующее утверждение [2]:

3. Если граф G является 2-связным графом порядка n и $d_u+d_v>n$ для любых двух различных несмежных вершин u и v, то граф G является гамильтоново-связным.

Как известно, *задача распознавания* гамильтоновости или трассируемости заданного графа является NP-полной. Недавно для решения этой проблемы стала интенсивно применяться спектральная теория графов.

Здесь продолжается изучение следующей проблемы, тесно связанной с известной проблемой Брюалди – Золхайда [4]:

Проблема. Для заданного графа *F*, каким максимальным спектральным радиусом должен обладать граф *G* на *n* вершинах, не содержащий подграфа, изоморфного графу *F*?

Мы рассматриваем случай, когда *F* является гамильтоновым циклом [5].

Поскольку условие $\delta \geq 2$ является тривиальным необходимым условием для гамильтоновости графа, то в дальнейшем мы будем это предполагать.

В данной работе в два раза уменьшена нижняя граница порядка графов, полученная В. Никифоровым в [6], для которых выполняется обобщение достаточного спектрального признака гамильтоновости графа, данного в [5].

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$ и *G* – простой граф порядка $n > \dfrac{k^3+7k+4}{2}$ с $\delta \geq k$, отличный от графов $L_k(n)$ и $M_k(n)$. Тогда если его спектральный радиус $\rho(G) \geq n-k-1$, то граф *G* гамильтонов.

Для доказательства этой теоремы мы доказываем вспомогательную теорему, представляющую самостоятельный интерес.

Теорема 2. Пусть $k \geq 2$ и *G* – простой граф порядка $n > \dfrac{k^3+7k+4}{2}$ с $\delta \geq k$. Тогда если *G* является собственным подграфом $L_k(n)$ или $M_k(n)$, то его спектральный радиус удовлетворяет неравенству

$$\rho(G) < n-k-1.$$

Доказательство теоремы 1 проводится от противного. Предположим, что граф *G* негамильтонов. Тогда в силу очевидных неравенств

$$\delta(cl_n(G)) \geq \delta(G) \geq k,$$
$$\rho(cl_n(G)) \geq \rho(G) \geq n-k-1$$

и того, что негамильтоновость графа *G* равносильна негамильтоновости его замыкания $cl_n(G)$ (свойство 2), можно предполагать, что $G = cl_n(G)$, а значит, для любой пары *i* и *j* несмежных вершин графа *G* выполняется неравенство (свойство 1):

$$d_i + d_j \leq n-1. \qquad (1)$$

Покажем, что $G = L_k(n)$ или $G = M_k(n)$. Тогда в силу теоремы 2 будет справедлива теорема 1.

Согласно теореме Хватала [12] существует натуральное число *s*, такое, что выполняются неравенства: $d_s \leq s < \dfrac{n}{2}$ и $d_{n-s} \leq n-s-1$ для возрастающей последовательности степеней графа *G*: $\delta = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Поэтому имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} 2m = \sum_{i=1}^{n} d_i = (d_1 + \ldots + d_s) + (d_{s+1} + \ldots + d_{n-s}) + (d_{n-s+1} + \ldots + d_n) \leq \\ \leq s^2 + (n-2s)(n-s-1) + s(n-1) = n^2 - (2s+1)n + (3s^2+s). \end{aligned} \qquad (2)$$

Кроме того, в силу неравенств $\rho(G) \geq n-k-1$, $\delta \geq k$, известной верхней оценки для спектрального радиуса [13]:

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta+1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2},$$

а также убывания функции $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(2m - xn)}$ на промежутке $[1; n-1]$ получаем, что справедливо неравенство

$$n - k - 1 \leq \frac{k - 1 + \sqrt{(k+1)^2 + 4(2m - kn)}}{2}.$$

Откуда после преобразований имеем

$$n^2 - (2k+1)n + (2k^2 + k) \leq 2m. \tag{3}$$

Вместе с неравенством (2) это дает

$$n^2 - (2k+1)n + (2k^2 + k) \leq n^2 - (2s+1)k^2 + (3s^2 + s). \tag{4}$$

Откуда получаем

$$2(s-k)n \leq (3s^2 + s) - (2k^2 + k). \tag{5}$$

Можно показать, что при выполнении условий теоремы 1 неравенство (5) справедливо только при $s = k$.

Покажем теперь, что справедливо неравенство

$$d_{k+1} \geq n - k - 1 - k^2.$$

Пусть это не так. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{k} d_i + d_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n-k} d_i + \sum_{i=n-k+1}^{n} d_i < \\ &< k^2 + (n-k-1-k^2) + (n-2k-1)(n-k-1) + k(n-1) = \\ &= n^2 - (2k+1)n + (2k^2 + k), \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (3). Следовательно, для произвольного $i \geq k+1$ справедливо неравенство

$$d_{k+1} \geq n - k - 1 - k^2. \tag{6}$$

Покажем теперь, что вершины $k+1, \ldots, n$ индуцируют клику в графе *G*. Действительно, пусть вершины $i, j \in \{k+1, \ldots, n\}$ несмежны в графе *G*. Тогда в силу (6)

$$d_i + d_j \geq 2n - 2k - 2 - 2k^2. \tag{7}$$

Однако легко видеть, что при $k \geq 2$ справедливо неравенство

$$2n - 2k - 2 - 2k^2 > n - 1. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) вытекает неравенство: $d_i + d_j > n - 1$, что противоречит (1).

Пусть $X = \{1, \ldots, k\}$, а $Y \subset \{k+1, \ldots, n\}$ – подмножество вершин, которые имеют в *X* соседей. Так как $|X| = k$ и $d_i = k$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $Y \neq \varnothing$ и любая вершина из *X* имеет соседа из множества $\{k+1, \ldots, n\}$.

Покажем, что, в действительности, каждая вершина из Y смежна с каждой вершиной из X. Предположим, что это не так, т. е. $\exists w \in Y$ и $\exists u, v \in X$, такие, что $wu \in E(G)$, но $wv \notin E(G)$. Поскольку вершина w смежна с каждой вершиной из множества $\{k+1, ..., n\}$ и вершиной u, то имеем неравенство

$$d_w + d_v \geq (n-k) + k = n,$$

которое противоречит (1).

Положим $|Y| = l$ и заметим, что $1 \leq l \leq k$, так как $d_1 = k$. Если $l = 1$, то $G = L_k(n)$. Если $l = k$, то $G = M_k(n)$. Покажем теперь, что при $1 < l < k$ граф G гамильтонов.

Рассмотрим подграф $H = G[X \cup Y]$ порядка $k + l$. В силу того, что $K_l \vee kK_1 \subset H$ и $l \geq 2$ получаем, что граф H является 2-связным. Далее, если u и v различные несмежные вершины графа H степеней d'_u и d'_v соответственно, то они лежат в X. Поэтому $d'_u = d_u = k$ и $d'_v = d_v = k$, и значит, справедливо неравенство:

$$d'_u + d'_v = 2k > k + l.$$

Поэтому в силу свойства (3) граф H является гамильтоново-связным. Тогда легко видеть, что существует гамильтонов цикл и в графе G, что противоречит предположению.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф16РА–003.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Ore O. Arc coverings of graphs // Ann. Mat. Pura Appl. 1961. Vol. 55. P. 315–321.
2. Ore O. Hamilton-connected graphs // J. Math. Pures Appl. 1963. Vol. 42. P. 21–27.
3. Bondy A., Chvátal V. A method in graph theory // Discrete Math. 1976. Vol. 15. P. 111–135.
4. Brualdi R. A., Solheid E. S. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. Vol. 7, № 2. P. 265–272.
5. Бенедиктович В. И. Достаточное спектральное условие гамильтоновости графа // Доклады НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 5. С. 5–12.
6. Nikiforov V. Spectral radius and Hamiltonicity of graphs with large minimum degree. [Electronic resource] // 2016. arXiv:1602.01033 [math.CO]. URL: http://arxiv.org/abs/1602.01033.
7. Kelmans A. K. On graphs with randomly deleted edges // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1981. Vol. 37. P. 77–88.
8. Csikvari P. On a conjecture of V. Nikiforov // Discrete Math. 2009. Vol. 309, № 13. P. 4522–4526.
9. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of graphs. Springer-Verlag, 2011.
10. Godsil C. D., Royle G. F. Algebraic graph theory. Springer-Verlag, 2001.
11. Прасолов В. В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2001.
12. Chvátal V. On Hamiltons ideals // J. Combin. Theory Ser. B. 1972. Vol. 12. P. 163–168.
13. Hong Y., Shu J., Fang K. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs // J. Combin. Theory. 2001. Vol. 81. P. 177–183.