

# ИНФОРМАТИЗАЦИЯ КУРСА «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

**И. С. Козловская, К. В. Василевский**

---

*Белорусский государственный университет  
Минск, Беларусь  
e-mail: [Kozlovskaja@bsu.by](mailto:Kozlovskaja@bsu.by), [vslk1983@gmail.com](mailto:vslk1983@gmail.com)*

Рассматриваются методы и проблемы информатизации преподавания курса «Уравнения математической физики» на факультете прикладной математики и информатики.

*Ключевые слова:* уравнения математической математики; математическое моделирование; математические пакеты.

## INFORMATIZATION COURSE «EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS»

**I. S. Kozlovskaja, K. V. Vasilevsky**

---

*Belarusian State University  
Minsk, Belarus*

The paper deals with teaching methods and problems of informatization course equations of mathematical physics at the Faculty of Applied Mathematics and Informatics.

*Keywords:* equations of mathematical physics; mathematical modeling; mathematical packages.

Курс лекций «Уравнения математической физики» читается на факультете прикладной математики и информатики для студентов специальностей 1-31 03 03 «Прикладная математика» (по направлениям), 1-31 03 04 «Информатика» и 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические и программные системы)». Дисциплина «Уравнения математической физики» посвящена постановке, исследованию и решению краевых задач для уравнений в частных производных, имеющих очевидную физическую интерпретацию. Первоначально круг таких задач ограничивался рамками классической физики, но применяемые при их исследовании методы являются преимущественно математическими и в значительной степени опираются на курсы «Математический анализ» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения», а также тесно связаны с циклами дисциплин по физике и численным методам. В настоящее время область применения изучаемых в данном курсе уравнений и методов вышла за рамки классической физики и используется в химии, геологии, микроэлектронике и экономике. В результате изучения данной дисциплины студенты должны получить навыки математического моделирования реальных (в первую очередь физических) процессов на основе краевых задач для уравнений в частных производных. Хотя лекции ограничены изучением только аналити-

ческих методов решения модельных задач, практические и лабораторные занятия включают в себя использование современных пакетов численного моделирования на основе уравнений в частных производных.

В целях более эффективного и динамичного освоения изучаемой дисциплины курс лекций подготовлен прежде всего на электронных носителях и размещен на сервере факультета прикладной математики и информатики, что позволяет оперативно обновлять читаемый курс, сделать доступным каждому студенту текст лекций, использовать материал для чтения лекции.

В математической физике решение многих задач осуществляется громоздкими трудоемкими математическими методами. Применение вычислительной техники просто необходимо при численном решении рассматриваемых задач, чтобы обеспечить проникновение элементов научных исследований в учебный процесс, привлечь примеры практического применения методов изучаемых дисциплин. Студенты должны не только сами составлять программы при решении изучаемых задач, но и экспериментировать с готовыми программными средствами открытого типа. В этом направлении открываются широкие перспективы для использования мощных математических пакетов Mathcad, MatLab, Mathematica. Поэтому большое внимание уделяется и решению такой проблемы, как помощь современных средств компьютерной математики в более глубоком понимании студентами изучаемых ими классических математических тем. В рамках учебного курса «Уравнения математической физики» проводится работа по приобщению студентов к средствам современной компьютерной математики. В качестве базового инструментария выбран пакет Mathematica, являющийся на данный момент наиболее мощным средством в своем классе программ. Пакет сочетает в себе развитые графические функции; удобные средства программирования; позволяет создавать и использовать процедуры и функции пользователя; имеет развитые возможности по созданию и использованию динамических массивов и переменных. Все это позволяет сосредоточиться не на программировании задач, а на ее физической и математической стороне.

Непосредственно в рамках поддержки курса «Уравнения математической физики» студентам предлагаются для изучения и самостоятельной разработки темы и примеры, базирующиеся на изучаемом ими материале, среди которых можно отметить такие, как классификация уравнений с частными производными, расчеты, связанные с методами решения задачи Коши для уравнений гиперболического и параболического типа и методом разделения переменных для начально-краевых задач в областях различного типа и т. д. Важной задачей представляется разработка студентами дифференциальных моделей, описывающих различные физические, биологические и экономические процессы. Возможность проведения студентами численных экспериментов, визуализация результатов, разработка и реализация тех или иных моделей повышают интерес студентов к учебному курсу, способствуют более глубокому пониманию изучаемого ими материала, позволяет пройти все этапы математического моделирования от построения математической модели до вычислительного эксперимента и анализа результатов.

Рассмотрим реализацию на примере уравнений колебаний мембраны:

```

In[1]:= weqn = D[u[x, y, t], {t, 2}] == Laplacian[u[x, y, t], {x, y}];
           |дифференцировать           |лапласиан

In[2]:= ic = {u[x, y, 0] == (x - x^2) (2 y - y^2),
             Derivative[0, 0, 1][u][x, y, 0] == x y (x + y)};
           |производная

In[3]:= bc = {u[x, 0, t] == 0,
             u[0, y, t] == 0, u[1, y, t] == 0, u[x, 2, t] == 0};

In[4]:= (sol = FullSimplify[
           |упростить в полном объеме
           u[x, y, t] /. DSolve[{weqn, ic, bc}, u, {x, y, t}][[1],
           |решить дифференциальные уравнения
           K[1] ∈ Integers && K[2] ∈ Integers]) /. {K[1] → n, K[2] → m} //
           |множество целых чисел |множество целых чисел

           TraditionalForm
           |традиционная форма

```

Out[4]/TraditionalForm=

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^6 m^3 n^3} 16 \sin\left(\frac{\pi m y}{2}\right) \sin(\pi n x) \left( \frac{\pi \left( (-1)^m (3 \pi^2 m^2 - 4) + 4 \right) (-1)^n n^2 - 2 (-1)^m m^2 \left( (-1)^n - 1 \right) \sin\left(\pi t \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2}\right)}{\sqrt{m^2 + 4 n^2}} + 4 \left( (-1)^m - 1 \right) \left( (-1)^n - 1 \right) \cos\left(\pi t \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2}\right) \right)$$

```

In[5]:= h[x_, y_, t_] = sol /. {∞ → 3} // Activate
           |активировать

```

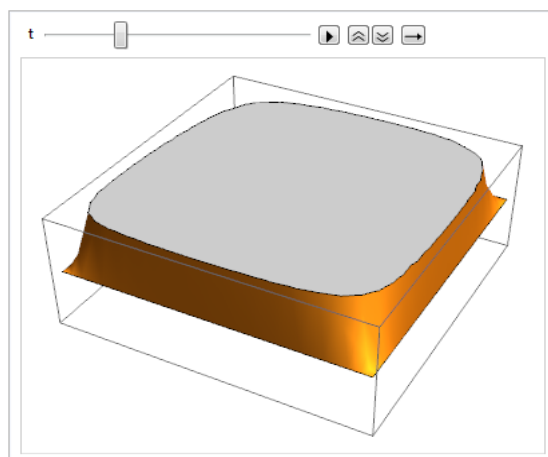
$$\text{Out[5]} = \frac{16 \left( 16 \cos\left[\frac{1}{2} \sqrt{5} \pi t\right] + \frac{\pi (-12 + 3 \pi^2) \sin\left[\frac{1}{2} \sqrt{5} \pi t\right]}{\sqrt{5}} \right) \sin[\pi x] \sin\left[\frac{\pi y}{2}\right]}{\pi^6} + \frac{8 (8 - 3 \pi^2) \sin\left[\frac{1}{2} \sqrt{17} \pi t\right] \sin[2 \pi x] \sin\left[\frac{\pi y}{2}\right]}{\sqrt{17} \pi^5} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{16 \left( 16 \cos\left[\frac{1}{2} \sqrt{37} \pi t\right] + \frac{\pi (-4-9(8-3\pi^2)) \sin\left[\frac{1}{2} \sqrt{37} \pi t\right]}{\sqrt{37}} \right) \sin[3\pi x] \sin\left[\frac{\pi y}{2}\right]}{27 \pi^6} + \\
& \frac{(16 - 12 \pi^2) \sin[\sqrt{2} \pi t] \sin[\pi x] \sin[\pi y]}{\sqrt{2} \pi^5} + \\
& \frac{6 \sin[\sqrt{5} \pi t] \sin[2\pi x] \sin[\pi y]}{\sqrt{5} \pi^3} + \\
& \frac{(16 - 108 \pi^2) \sin[\sqrt{10} \pi t] \sin[3\pi x] \sin[\pi y]}{27 \sqrt{10} \pi^5} + \\
& \frac{16 \left( 16 \cos\left[\frac{1}{2} \sqrt{13} \pi t\right] + \frac{\pi (-44+27\pi^2) \sin\left[\frac{1}{2} \sqrt{13} \pi t\right]}{\sqrt{13}} \right) \sin[\pi x] \sin\left[\frac{3\pi y}{2}\right]}{27 \pi^6} + \\
& \frac{8 (8 - 27 \pi^2) \sin\left[\frac{5\pi t}{2}\right] \sin[2\pi x] \sin\left[\frac{3\pi y}{2}\right]}{135 \pi^5} + \\
& \frac{16 \left( 16 \cos\left[\frac{3}{2} \sqrt{5} \pi t\right] + \frac{\pi (-36-9(8-27\pi^2)) \sin\left[\frac{3}{2} \sqrt{5} \pi t\right]}{3\sqrt{5}} \right) \sin[3\pi x] \sin\left[\frac{3\pi y}{2}\right]}{729 \pi^6}
\end{aligned}$$

```

In[6]:= Animate[Plot3D[h[x, y, t], {x, 0, 1}, {y, 0, 2}, Ticks -> False,
|аанимиро... |график функции 2-х переменных |деления |ложь
|Mesh -> None, PlotRange -> {-1/36, 1/36},
|сетка |ни од... |отображаемый диапазон графика
|PerformanceGoal -> "Quality"], {t, 0, 8}, SaveDefinitions -> True,
|целевая установка производительности |сохранять определения |истина
|DefaultDuration -> 12]
|длительность по умолчанию

```



Данный пример показывает, что система «Mathematica» позволяет достаточно легко получать в явном виде решение соответствующих краевых и граничных задач для уравнений математической физики и позволяет за счет средств графики и анимации наглядно видеть процесс, в частности колебания, описываемые конкретными уравнениями.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ**

1. Ерофеенко В. Т., Козловская И. С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике : курс лекций. М. : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2015.
2. Ерофеенко В. Т., Козловская И. С. Аналитическое моделирование в электродинамике. М. : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
3. Дьяконов В. Mathematica : учеб. курс. М. : Питер, 2001.
4. Корзюк В. И. Уравнения математической физики : учеб. пособие. Минск : БГУ, 2011.