ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИБРИДНОЙ СЕТИ СВЯЗИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ НЕНАДЕЖНЫХ КАНАЛОВ

В. И. Клименок

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: klimenok@bsu.by

Исследуется система массового обслуживания, которая может служить для моделирования гибридной сети связи, состоящей из двух ненадежных каналов. Процесс функционирования системы описан в терминах многомерной цепи Маркова с непрерывным временем. Найдено стационарное распределение и стационарные характеристики производительности системы.

Ключевые слова: гибридная сеть связи; ненадежный канал; марковский поток; фазовое распределение времени обслуживания; стационарные характеристики.

INVESTIGATION OF STATIONARY PERFORMANCE MEASURES OF HYBRID COMMUNICATION NETWORK CONSISTING OF TWO UNRELIABLE CHANNELS

V. I. Klimenok

Belarusian State University
Minsk, Belarus

In this paper, we investigate a queueing system which can be used for modeling a hybrid communication network consisting of two unreliable channels. The process of the system states is described in terms of multi-dimensional continuous time Markov chain. We calculate the stationary distribution and stationary performance measures of the system.

Keywords: hybrid communication network; unreliable channel; Markovian input; phase type distribution of service time; stationary performance measures.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы проводятся интенсивные исследования нового поколения 5G сетей, направленные, в частности, на улучшение производительности беспроводных сетей связи. Исследование лежит в данной области и посвящено гибридной системе связи, состоящей из двух ненадежных каналов: оптического канала (free space optical channel – FSO канал) и миллиметрового радиоканала (71-76 GHz, 81-86 GHz). Каналы могут выходить из строя вследствие неблагоприятных погодных условий. При этом предполагается, что погодные условия, неблагоприятные для одного из каналов, не являются таковыми для другого канала. FSO-канал не может передавать данные в условиях тумана или пасмурной погоды, а миллиметровый радиоканал не может осуществлять передачу во время осадков (дождь, снег и т. д.). Таким образом, гибридная система связи способна передавать данные практически при любых погодных условиях, используя тот или иной канал связи. Целью работы является моделирование данной системы связи в терминах ненадежной системы массового обслуживания и исследование ее стационарных характеристик производительности.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования гибридной системы связи рассмотрим систему массового обслуживания с двумя ненадежными приборами. Будем называть FSO-канал как прибор 1, а миллиметровый радиоканал – как канал 2. Заявки поступают в систему в марковском потоке – общепризнанное название *MAP-Markovian Arrival Process*. В настоящее время *MAP* широко используется исследователями в области телекоммуникаций и теории массового обслуживания, так как хорошо передает особенности коррелированного трафика в современных телекоммуникационных системах и в то же время позволяет получать изящные математические результаты. Поступление заявок в *MAP*-потоке возможно только в моменты скачков некоторой неприводимой цепи Маркова $\nu_t,\ t \geq 0,$ с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0,1,\ldots,W\}$, которая называется управляющим процессом *MAP*. Интенсивности переходов процесса $\nu_t,\ t \geq 0,$ сопровождающиеся поступлением заявки (не сопровождающиеся поступлением заявок) задаются элементами матрицы D_1 (недиагональными элементами матрицы D_0). При этом матрица $D = D_0 + D_1$ является неприводимым генератором цепи. Более подробное описание MAP можно найти в [1].

Заявка, приходящая на обслуживание, когда приборы являются свободными, немедленно начинает обслуживание на обоих приборах. Если же приборы являются занятыми в момент прихода запроса, заявка становится в очередь, длина которой неограничена, и выбирается на обслуживание позже согласно стратегии FIFO (первым пришел – первым обслужен). Времена обслуживания заявок на обеих приборах имеют *PH* (*Phase type*)-распределения. Время обслуживания, имеющее *PH*-распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}, S)$, можно интерпретировать как время, в течение которого управляющий марковский процесс $m_t, t \geq 0,$ с конечным пространством состояний $\{1,\ldots,M,M+1\}$ достигнет единственного поглощающего состояния $M+1$ при условии, что начальное состояние этого процесса выбирается в множестве $\{1,\ldots,M\}$ согласно стохастическому вектору-строке $\boldsymbol{\beta}$. Интенсивности переходов процесса $m_t, t \geq 0,$ в множестве состояний $\{1,\ldots,M\}$ определяются субгенератором S (квадратной матрицей порядка M с отрицательными диагональными элементами и неотрицательными недиагональными элементами), а интенсивности переходов в поглощающее состояние определяются элементами вектор-столбца $\mathbf{S}_0 = -S\mathbf{e}$ с неотрицательными элементами, среди которых есть хотя бы один положительный. Полагаем, что процесс обслуживания на k-м $(k = 1,2)$ приборе имеет фазовое распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}_k, S_k)$ и управляющим процессом

$m_t^{(k)}$, $t \ge 0$, с пространством состояний $\{1,\ldots,M_k,M_k+1\}$, где состояние M_k+1 является поглощающим.

Оба прибора ненадежны. Считаем, что поломки приходят в *MAP*-потоке с управляющим процессом η_t, $t \ge 0$, принимающем значения в множестве $\{0,1,...,V,V+1\}$. Этот *MAP* задается $(V+1)\times(V+1)$ матрицами H_0 и H_1. Интенсивность этого *MAP* обозначим как *h*. Поступившая поломка (неблагоприятные погодные условия) направляется на один из приборов. Любую поломку с вероятностью p классифицируем как дождь, и тогда она направляется на прибор 1, а с дополнительной вероятностью $1-p$ – как туман, и тогда она направляется на прибор 2. Сразу после поступления поломки на k-й прибор на нем начинается ремонт (период неблагоприятных погодных условий). Время, необходимое для ремонта k-го прибора, имеет *PH*-распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\tau}^{(k)},T^{(k)})$.

Предполагаем, что поломка, поступившая, когда какой-либо из приборов еще не восстановился после предыдущей поломки, игнорируется, т. е., не может быть ситуаций, когда оба прибора не работают по причине поломки. При взятии заявки на обслуживание, если оба прибора исправны, они одновременно начинают ее обслуживание. В момент окончания обслуживания данной заявки каким-либо прибором его обслуживание другим прибором немедленно прекращается. Приход поломки вызывает прекращение обслуживания заявки прибором, на который направляется поломка. Этот прибор уходит на ремонт, в то время как другой прибор продолжает обслуживание заявки. Если во время этого обслуживания другой прибор восстанавливается, он снова начинает обслуживание этой же заявки, но заново. Если при взятии запроса на обслуживание только прибор 2 исправен, он проводит обслуживание запроса. Заявка будет обслужена, когда ее обслуживание одним из приборов будет завершено.

ЦЕПЬ МАРКОВА

Пусть в момент t i_t – число заявок в системе, $i_t \ge 0$; $n_t = 0$, если оба прибора исправны, $n_t = 1$, если прибор 1 на ремонте, $n_t = 2$, если прибор 2 на ремонте; $m_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса *PH*-обслуживания на j-м занятом приборе, $j = 1,2$, $m_t^{(j)} = \overline{1,M_j}$; $r_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса *PH*-времени ремонта на приборе j, $r_t^{(j)} = \overline{1,R_j}$; ν_t и η_t – состояния управляющих процессов входящего *MAP* потока и *MAP* потока поломок соответственно, $\nu_t = \overline{0,W}, \eta_t = \overline{0,V}$.

Процесс функционирования системы описывается неприводимой цепью Маркова ξ_t, $t \ge 0$, с пространством состояний

$$X = \{(0,n,\nu,\eta), i = 0, n = 0,1,2, \nu = \overline{0,W}, \eta = \overline{0,V}\}\bigcup$$
$$\{(i,0,\nu,\eta,m^{(1)},m^{(2)}), i > 0, n = 0, \nu = \overline{0,W}, \eta = \overline{0,V}, m^{(k)} = \overline{1,M_k}, k = 1,2\}\bigcup$$
$$\{(i,1,\nu,\eta,m^{(2)},r^{(1)}), i > 0, n = 1, \nu = \overline{0,W}, \eta = \overline{0,V}, m^{(2)} = \overline{1,M_2}, r^{(1)} = \overline{1,R_1}\}\bigcup$$
$$\{(i,2,\nu,\eta,m^{(1)},r^{(2)}), i > 0, n = 2, \nu = \overline{0,W}, \eta = \overline{0,V}, m^{(1)} = \overline{1,M_1}, r^{(1)} = \overline{1,R_2}\}.$$

Далее будем предполагать, что состояния цепи $\xi_t,\ t \ge 0,$ внутри каждого из приведенных подмножеств упорядочены в лексикографическом порядке и таким образом упорядоченные подмножества упорядочены в том порядке, в котором они перечислены выше. Обозначим через $Q_{i,j}$ матрицу интенсивностей переходов цепи их состояний, соответствующих значению i первой (счетной) компоненты в состояния, соответствующие значению j этой компоненты, $i, j \ge 0.$

Лемма 1. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова $\xi_t, t \ge 0$, имеет следующую блочную структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_1 & Q_2 & O & \cdots \\ O & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \cdots \\ O & O & Q_0 & Q_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки имеют следующий вид:

$$Q_{0,0} = \begin{pmatrix} D_0 \oplus H_0 & I_{\overline{W}} \otimes pH_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_1 & I_{\overline{W}} \otimes (1-p)H_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_2 \\ I_a \otimes \mathbf{T}_0^{(1)} & D_0 \oplus H \oplus T^{(1)} & O \\ I_a \otimes \mathbf{T}_0^{(2)} & O & D_0 \oplus H \oplus T^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$Q_{0,1} = \begin{pmatrix} D_1 \otimes I_{\overline{V}} \otimes \boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2 & O & O \\ O & D_1 \otimes I_{\overline{V}} \otimes \boldsymbol{\beta}_2 \otimes I_{R_1} & O \\ O & O & D_1 \otimes I_{\overline{V}} \otimes \boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{R_2} \end{pmatrix},$$

$$Q_{1,0} = \begin{pmatrix} I_a \otimes \overline{\mathbf{S}}_0 & O & O \\ O & I_a \otimes \mathbf{S}_0^{(2)} \otimes I_{R_1} & O \\ O & O & I_a \otimes \mathbf{S}_0^{(1)} \otimes I_{R_2} \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} I_a \otimes \overline{\mathbf{S}}_0 = (\boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2) & O & O \\ O & I_a \otimes \mathbf{S}_0^{(2)} \boldsymbol{\beta}_2 \otimes I_{R_1} & O \\ O & O & I_a \otimes \mathbf{S}_0^{(1)} \boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{R_2} \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} D_0 \oplus H_0 \oplus S_1 \oplus S_2 & I_{\overline{W}} \otimes pH_1 \otimes \mathbf{e}_{M_1} \otimes I_{M_2} \otimes \boldsymbol{\tau}_1 & I_{\overline{W}} \otimes (1-p)H_1 \otimes I_{M_1} \otimes \mathbf{e}_{M_2} \otimes \boldsymbol{\tau}_2 \\ I_a \otimes \boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{M_2} \otimes \mathbf{T}_0^{(1)} & D_0 \oplus H \oplus S_2 \oplus T^{(1)} & O \\ I_a \otimes I_{M_1} \otimes \boldsymbol{\beta}_2 \otimes \mathbf{T}_0^{(2)} & O & D_0 \oplus H \oplus S_1 \oplus T^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = diag\{,\, D_1 \otimes I_{\overline{V}M_1M_2},\ D_1 \otimes I_{\overline{V}M_2R_1},\ D_1 \otimes I_{\overline{V}M_1R_2}\}.$$

Здесь $H = H_0 + H_1$, $\overline{\mathbf{S}}_0 = -(S_1 \oplus S_2)\mathbf{e}$, $\otimes, \oplus$ – символы кронекерова произведения и суммы матриц соответственно (см. [2]), $\overline{W} = W + 1, \overline{V} = V + 1,\ a = \overline{W}\overline{V}$.

Следствие 1. Цепь Маркова $\xi_t, t \ge 0,$ принадлежит классу многомерных квазитеплицевых цепей с непрерывным временем (КТЦМ), см. [3].

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ

Теорема 1. Цепь Маркова $\xi_t, t \ge 0,$ эргодична тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\lambda < \boldsymbol{\delta}_0 \bar{\mathbf{S}}_0 + \bar{\boldsymbol{\delta}}_1 \mathbf{S}_0^{(2)} + \bar{\boldsymbol{\delta}}_2 \mathbf{S}_0^{(1)},$$

где $\bar{\boldsymbol{\delta}}_1 = \boldsymbol{\delta}_1 (I_{M_2} \otimes \mathbf{e}_{R_1}),\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_2 = \boldsymbol{\delta}_2 (I_{M_1} \otimes \mathbf{e}_{R_2}),$ а вектор $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_0, \bar{\boldsymbol{\delta}}_1, \bar{\boldsymbol{\delta}}_2)$ является единственым решением системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{\delta}\Gamma = 0,\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{e} = 1,$ где $\boldsymbol{\delta}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений.

Сформируем векторы $\mathbf{p}_i, i \ge 0,$ стационарных вероятностей, соответствующих значениям i счетной компоненты. Известно, что вектор стационарных вероятностей $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots)$ удовлетворяет системе уравнений Чепмена – Колмогорова вида

$$\mathbf{p}Q = \mathbf{0}, \mathbf{pe} = 1.$$

Эта система линейных алгебраических уравнений является бесконечной и стандартные алгоритмы для ее решения не являются численно устойчивыми. Поэтому для вычисления вектора $\mathbf{p}$ мы использовали алгоритм, разработанный в [3] и предназначенный для вычисления стационарного распределения многомерных квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем.

Вычислив векторы стационарных вероятностей $\mathbf{p}_i, i \ge 0,$ можно вычислить ряд важных характеристик производительности системы, таких как пропускная способность системы (максимальное значение интенсивности потока, который может быть пропущен через систему); среднее число заявок системе; дисперсия числа заявок в системе; вероятность того, что в системе находится i заявок, оба прибора исправны и обслуживают заявку; вероятность того, что в системе находится i заявок, прибор 1 на ремонте, а прибор 2 обслуживает заявку; вероятность того, что в системе находится i заявок, прибор 2 на ремонте, а прибор 1 обслуживает заявку; вероятность того, что в произвольный момент времени приборы находятся в состоянии $n = 0,1,2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована система массового обслуживания, состоящая из двух ненадежных неоднородных приборов, которая может служить для моделирования гибридной сети связи, состоящей из двух ненадежных каналов – оптического лазерного канала (free space optical channel – FSO) и миллиметрового радиоканала. Каналы могут выходить из строя вследствие неблагоприятных погодных условий. Погодные условия, неблагоприятные для одного из каналов, не являются таковыми для другого канала. FSO-канал не может передавать данные в условиях плохой видимости, а миллиметровый радиоканал не может осуществлять передачу во время осадков. Таким образом, гибридная система связи способна передавать данные практически при любых погодных условиях, используя тот или иной канал связи.

При достаточно общих предположениях относительно потока запросов и поломок и распределений времен обслуживания и ремонтов функционирование системы описано в терминах многомерной квазитеплицевой цепи Маркова. Получено условие существования стационарного режима в системе и ряд важных стационарных характеристик ее производительности. Результаты могут быть использованы при проектировании и оценивании производительности гибридных сетей связи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Lucantoni D. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communication in Statistics-Stochastic Models. 1991. Vol. 7. P. 1–46.
2. Graham A. Kronecker products and matrix calculus with applications // Cichester : Ellis Horwood, 1981.
3. Klimenok V. I., Dudin A. N. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory // Queueing Systems. 2006. Vol. 54. P. 245–259.