

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ УРОВНЯ ЗНАЧИМОСТИ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ ПРОСТЕЙШЕГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

В. И. Никитенок¹, С. С. Ветохин²

¹Белорусский государственный университет

²Белорусский государственный технологический университет

Минск, Беларусь

e-mail: nikitavi44@mail.ru

Представляется очевидной зависимость адаптивного алгоритма от точности оценки порога принятия решения, а значит, и от объема классифицированной обучающей выборки. Анализ этой зависимости и посвящена данная статья.

Ключевые слова: простейший пуассоновский поток; адаптивный алгоритм обработки; уровень значимости; классифицированная обучающая выборка.

ASSESSMENT OF SIGNIFICANCE LEVEL STABILITY OF ADAPTIVE PROCESSING ALGORITHM OF A STATIONARY POISSON PROCESS

V. I. Nikitionok¹, S. S. Vetokhin²

¹Belarusian State University

²Belarusian State Technological University

Minsk, Belarus

Mainly, the significance level of stability in an adaptive algorithm for processing a stationary Poisson process is out of analysis. However, it dependence of accuracy of the decision making threshold is clear evident that indicates the dependence of the classified training sample size, also. Therefore, the paper is dedicated to the analysis of the significance level of stability in an adaptive algorithm.

Keywords: stationary Poisson process; adaptive processing algorithm; significance level; photon counting; exponential distribution; classified training sample size.

С точки зрения практических приложений рассматриваемого материала уместно привести такой факт: простейший поток однородных событий и процесс Пуассона имеют огромное число приложений. Этими математическими схемами описываются самые различные модели физических явлений. Они имеют место в области радиофизики, аэрокосмических радиоэлектронных и информационных систем и технологий, физики, прикладной математики и информатики, радио- и оптической локации (прием слабых (на уровне фотонов) оптических сигналов).

В зависимости от анализируемых выборочных значений простейший пуассоновский поток (ППП) событий представим законом Пуассона или экспоненциальным за-

коном распределения интервалов между соседними событиями. Оба представления имеют право на практическое применение. При использовании закона Пуассона фиксируется время обработки T , случайным является количество поступающих событий m [1]. В работе используется экспоненциальное распределение, когда фиксируется количество поступающих событий m . Случайным является время анализа или принятия решения T . Принятие решения эквивалентно проверке простой гипотезы H_0 о том, что $\lambda = \lambda_0$ – параметр распределения (или интенсивность ППП), против альтернативы H_1 – параметр распределения $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$ [2]. В адаптивном алгоритме, в целях определения оптимального значения порога решения, для оценки интенсивности λ_0 используется классифицированный обучающий ППП событий (или обучающая выборка), соответствующий обработке ППП с $\lambda = \lambda_0$. Рассмотрим выражение для уровня значимости адаптивного алгоритма [2]:

$$F_a \cong a(1 + 2b(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \sqrt{m})^2 / m_0)^{-0.5} \times \exp\{-\ln(a/F) / (1 + 2b(\sqrt{1/b \ln(a/F)} - d - \sqrt{m})^2 / m_0)\}, \quad (1)$$

где F – задаваемый уровень значимости, m_0 – объем классифицированной обучающей выборки, $a = 0,65$, $b = 0,443$, $d = 0,75$.

В (1) значения m должны выбираться не произвольно, а с учетом обеспечения заданных мощности D и уровня значимости F при располагаемом «расстоянии» между гипотезой и альтернативой $k_\lambda = \lambda_1 / \lambda_0$:

$$m = ((\Phi^{-1}(D) + k_\lambda \Phi^{-1}(1 - F)) / (k_\lambda - 1))^2, \quad (2)$$

где $\Phi^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная интегралу вероятности. Важно заметить, что при $m_0 \rightarrow \infty$ из (1) получаем ожидаемое предельное равенство

$$\lim_{m_0 \rightarrow \infty} F_a \cong a \exp\{-\ln(a/F)\} \cong F. \quad (3)$$

По формуле (1) с учетом (2) проведены расчеты зависимости уровней значимости адаптивного алгоритма от объема классифицированной обучающей выборки для $D = 0,9$, $k_\lambda = 1,1$ и 2 , $F = 10^{-4}$, 10^{-5} , 10^{-6} . Анализ расчетов показывает:

- 1) при малом «расстоянии» между гипотезой и альтернативой ($k_\lambda = 1,1$):
 - задаваемый уровень значимости $F = 10^{-4}$ достигается при весьма большом объеме классифицированной обучающей выборки $m_0 = 21\,000$, превышающем примерно в 40 раз объем $m_0 = 500$, обеспечивающий равенство мощностей адаптивного и оптимального алгоритмов;
 - задаваемые уровни значимости $F = 10^{-5}$ и 10^{-6} достигаются при еще больших значениях m_0 ;
- 2) при большем «расстоянии» между гипотезой и альтернативой ($k_\lambda = 2$) задаваемые уровни значимости $F = 10^{-4}$, 10^{-5} , 10^{-6} реализуются при $m_0 = 500$, при котором, как указывалось, адаптивный и оптимальный алгоритмы имеют одинаковую мощность, равную 0,9.

Полученные данные позволяют заключить, что при $k_\lambda = 1,1$ большой требуемый объем классифицированной обучающей выборки в практической реализации может быть проблематичным. При $k_\lambda = 2$ показатели качества адаптивного алгоритма достигаются при приемлемом объеме классифицированной обучающей выборки.

Проведем анализ этой ситуации и уточним правильность полученного результата. К анализу данных привлечем три участвующие в опыте плотности распределения.

Нетрудно показать, что при $m \gg 1$ указанные плотности распределения определяются следующими гауссовыми распределениями:

для результатов наблюдения при выполнении гипотезы

$$f_0(t) = \lambda_0 / \sqrt{2\pi m} \exp \left\{ - (t - m/\lambda_0)^2 / (2m/\lambda_0^2) \right\}, \quad (4)$$

для результатов наблюдения при выполнении альтернативы

$$f_1(t) = \lambda_0 / \sqrt{2\pi (m/\lambda_0^2)/k_\lambda^2} \exp \left\{ - (t - (m/\lambda_0)/k_\lambda)^2 / (2(m/\lambda_0^2)/k_\lambda^2) \right\}, \quad (5)$$

для оценки порога решения $\hat{c}$

$$f(\hat{c}) = 1 / \sqrt{2\pi A^2 / (\lambda_0^2 m_0)} \exp \left\{ - (\hat{c} - A/\lambda_0)^2 / (2A^2 / (\lambda_0^2 m_0)) \right\}, \quad (6)$$

где

$$A = \sqrt{m} (\sqrt{m} - \Phi^{-1}(1 - F)). \quad (7)$$

Обратим внимание на то, что дисперсия оценки порога решения зависит не только от заданного уровня значимости и объема классифицированной обучающей выборки, но и через объем m анализируемой выборки от ожидаемой мощности правила решения и «расстояния» между гипотезой и альтернативой. При близких гипотезе и альтернативе имеем достаточно большие требуемые объемы выборки и большие дисперсии, что может привести к заметной чувствительности уровня значимости к точности оценки интенсивности ППП при выполнении гипотезы.

Из расчетов по (4)–(6) следует, что при близких гипотезе и альтернативе, когда «расстояние» между гипотезой и альтернативой достаточно мало, плотности распределения результатов наблюдения (4) и (5) оказываются весьма близкими. А поскольку уровень значимости «привязан» к левому достаточно пологому «хвосту» плотности распределения (4), то требуется высокая точность оценки порога решения («узкие» плотности (6) с малыми дисперсиями). В свою очередь эта точность может достигаться при весьма больших объемах классифицированной обучающей выборки.

С увеличением интенсивности ППП при выполнении альтернативы «расстояние» между указанными плотностями вероятностей (4) и (5) возрастает, и точности оценки порога решения при $m_0 = 500$ оказывается достаточно для достижения приемлемых показателей качества.

Таким образом, можно выделить принципиальный факт: с уменьшением «расстояния» между гипотезой и альтернативой увеличивается требуемый объем обрабатываемой выборки, возрастает дисперсия оценки порога решения (уменьшается точность оценки порога), одновременно «ближе» становятся плотности вероятностей результатов наблюдения при выполнении гипотезы и альтернативы. В итоге это приводит к повышению чувствительности уровня значимости к изменению интенсивности ППП при выполнении гипотезы.

В связи с этим представляет интерес изучение динамики изменения дисперсии $V\{\cdot\}$ оценки порога решения в зависимости от k_λ . Для этого найдем зависимость отношения указанных дисперсий от k_λ , взяв за точку отсчета $k_\lambda = 2$ ($D = 0,9$ и разные F). Из (6) получаем

$$V\{\hat{c}, k_\lambda\} / V\{\hat{c}, k_\lambda = 2\} = (A(k_\lambda) / A(k_\lambda = 2))^2. \quad (8)$$

Анализ расчетов по (8) с учетом (7) показывает, что:

- 1) динамика увеличения дисперсии оценки порога решения практически не зависит от уровня значимости;
- 2) при уменьшении «расстояния» между гипотезой и альтернативой от 2 до 1,1 дисперсия оценки порога решения возрастает существенно: для $F = 10^{-6}$, $F = 10^{-5}$, $F = 10^{-4}$ отношение дисперсий (8) равно 3641, 3706 и 3796 соответственно;
- 3) чем меньше «расстояние» между гипотезой и альтернативой, тем в большей мере возрастает дисперсия оценки порога: так на порядок дисперсия возрастает при уменьшении этого «расстояния» от 2 до 1,5. Затем на порядок – от 1,5 до 1,25 и еще на порядок – от 1,25 до 1,15. И это не зависит от объемов классифицированной обучающей выборки.

Таким образом, можно подтвердить указанный выше принципиальный факт: представляется закономерным возрастание чувствительности уровня значимости при уменьшении «расстояния» между гипотезой и альтернативой. В этом случае требуются весьма большие объемы классифицированной обучающей выборки. А значит, и сомнения относительно применимости принципа адаптации имеют под собой реальную почву. Возможность его применения для обработки ППП необходимо решать с учетом конкретных статистических данных, описывающих конкретный опыт.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Об оптимальном обнаружении слабых оптических сигналов // Тр. БГТУ. 2015. № 6 (179): физ.-мат. науки и информатика. С. 88–91.
2. Никитенок В. И., Ветохин С. С. Методика расчета рабочих характеристик адаптивного обнаружителя слабых оптических сигналов // Тр. БГТУ. 2016. № 7 (180): физ.-мат. науки и информатика.