

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

В. И. Лобач

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

e-mail: lobach@bsu.by

Рассмотрен быстрый алгоритм прогнозирования и фильтрации. Этот алгоритм основан на приближенном представлении условной плотности распределения вероятностей с помощью дискретного вейвлет-преобразования. Мультиразрешающий анализ позволяет ускорить вычисления, опуская высокочастотные детали условной плотности распределения вероятностей.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование; прогнозирование и фильтрация; нестационарные временные ряды; условная плотность распределения вероятностей.

PREDICTION OF NON - STATIONARY TIME SERIES BASED ON WAVELET ANALYSIS

V. I. Lobach

Belarusian State University

Minsk, Belarus

It presents a fast prediction and filtering algorithm of non – stationary time series. This algorithm is based on an approximate representation of the conditional probability density of unobservable components of time series. Multiresolution analysis allows us to accelerate the calculation process omitting the high frequency details of conditional probability density.

Keywords: wavelet- transformation; prediction and filtration problem; non – stationary time series; the conditional probability density.

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее фундаментальным подходом к нахождению оценок состояний стохастических динамических систем является использование условной плотности распределения вероятностей состояний исследуемой системы. Формула для условной плотности распределения вероятностей получается на основе применения формулы Байеса. Однако при этом возникают очень значительные вычислительные трудности даже при небольшом горизонте наблюдений.

Если динамическая система является линейной и случайные процессы, определяющие модель, гауссовскими, в том случае условная плотность распределения вероятностей является также гауссовской, она полностью определяется своим математиче-

ским ожиданием и ковариационной матрицей. Фильтр Калмана [1] позволяет рекуррентно вычислять условное математическое ожидание и ковариационную матрицу. Однако более адекватными моделями реальных систем являются нелинейные. Стандартным подходом к исследованию нелинейных моделей является подходящая линеаризация перед использованием фильтра Калмана. К сожалению, такая линеаризация не всегда является удовлетворительной, поэтому различные варианты нелинейных алгоритмов фильтрации предлагаются исследователями [2, 3].

В этой статье рассматривается подход к нелинейной фильтрации и к прогнозированию временных рядов, основанный на рекуррентном представлении аппроксимации условной плотности распределения вероятностей на основе дискретного вейвлет-преобразования [4]. Основная идея состоит в том, что условная плотность распределения вероятностей может быть достаточно точно аппроксимирована вейвлет-преобразованием.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основная проблема, рассматриваемая в данной статье, состоит в следующем. Найти условную плотность распределения вероятностей состояния вектора $x(t) \in R^n$, который удовлетворяет следующей дискретной нелинейной системе:

$$x(k+1) = f(x(k), k) + u(k), \quad (1)$$

при условии, что известны наблюдения $Y_k = (y(1), y(2), \dots, y(k))$, причем

$$y(k) = h(x(k)) + v(k), \quad (2)$$

где $y(k) \in R^p$. Здесь, $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ являются действительными, возможно нелинейными функциями. Плотность распределения вероятностей $P_{x(0)}(x)$ начального состояния $x(0)$ предполагается известной. Последовательности $\{u(k)\}$ и $\{v(k)\}$, $k = 0, 1, \dots$, предполагаются последовательностями независимых случайных векторов с известными плотностями распределения вероятностей $P_{u(k)}(x)$ и $P_{v(k)}(x)$ соответственно. Здесь $P_{x(0)}(x)$, $P_{u(k)}(x)$, $P_{v(k)}(x)$ не обязательно являются гауссовскими.

Нетрудно показать, используя понятия условных и многомерных распределений, что условная плотность предсказания $P_{x(k+1)/Y_k}(x)$ и условная плотность фильтрации $P_{x(k+1)/Y_{k+1}}(x)$ могут быть получены рекуррентно из $P_{x(0)/Y_0} = P_{x(0)}(x)$ по формулам

$$P_{x(k+1)/Y_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{u(k)}(x - f(y, k)) \cdot P_{x(k)/Y_k}(y) dy, \quad (3)$$

$$P_{x(k+1)/Y_{k+1}}(x) = \frac{1}{c} P_{v(k)}(y(k+1) - h(x)) \cdot P_{x(k+1)/Y_k}(x), \quad (4)$$

где $\frac{1}{c}$ — нормирующий множитель.

АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВНОЙ ПЛОТНОСТИ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В интервале (3) перейдем к замене переменной по формуле для каждого момента времени k (k – фиксировано) $Z = f(y, k)$, $y = f^{-1}(y, k)$, $q_k(z) = P_{x(k)/Y_k}(f^{-1}(z, k)) \cdot \left| \det \frac{\partial y}{\partial z} \right|$ в предположении, что функция $f(x, k)$ для каждого k является монотонной и непрерывно дифференцируемой функцией, тогда получим

$$P_{x(k+1)/Y_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{u(k)}(x-z) \cdot q_k(z) dz. \quad (5)$$

Вычисление условной плотности вероятностей (5) является очень сложным, мы упростим вычисления, используя вейвлет-преобразование функций $P_{u(k)}(\cdot)$ и $q_k(\cdot)$. Для простоты рассмотрим только скалярный случай, т. е. когда $n = p = 1$. Первый шаг состоит в дискретизации плотностей $P_{u(k)}(x-z)$ и $q_k(z)$ значениями $\{r_i\}_{i=0}^{N-1}$, $\{j_i\}_{i=0}^{N-1}$, тогда интеграл (5) может быть представлен в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{N-1} r_{i-k} \cdot j_k.$$

Поскольку условная плотность предсказания и условная плотность фильтрации определяются формулами (3), (4), то есть основания предположить, что они являются достаточно гладкими функциями. В этом случае высокочастотные компоненты вейвлет-преобразования данных функций являются достаточно малыми и ими можно пренебречь.

Выражение $\sum_{k=0}^{N-1} r_{i-k} \cdot j_k$ может быть представлено в матричном виде $R \cdot j$, где

$$j = (j_0, j_1, \dots, j_{N-1})^T, \\ R = (r, P_r, P_r^2, \dots, P_r^{N-1}),$$

где $r = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})$,

$$P = \begin{pmatrix} 00 \dots 00 \\ 10 \dots 00 \\ \dots \dots \dots \\ 00 \quad 10 \end{pmatrix} - (N \times N) \text{ матрица.}$$

Пусть $\{r_i^{(k)}\}_{i=0}^{N-1}$, $\{j_i^{(k)}\}_{i=0}^{N-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – последовательности, полученные операцией дискретизации функций:

$$\begin{aligned}
r_j^{(0)} &= P_{u(0)}(x_j), \quad s_j^{(0)} = P_{x(0)}(x_j), \\
r_j^{(1)} &= P_{u(1)}(x_j), \quad s_j^{(1)} = \sum_{k=0}^{N-1} r_{j-k}^{(1)} \cdot s_k^{(0)}, \\
&\dots\dots\dots \\
r_j^{(m)} &= P_{u(m)}(x_j), \quad s_j^{(m)} = \sum_{k=0}^{N-1} r_{j-k}^{(m)} \cdot s_k^{(m-1)}, \\
&\dots\dots\dots \\
r_j^{(N-1)} &= P_{u(N-1)}(x_j), \quad s_j^{(N-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} r_{j-k}^{(N-1)} \cdot s_k^{(N-2)}.
\end{aligned}$$

Вейвлет-анализ начинается с определения последовательностей

$$\begin{aligned}
a_{0,m}^{(k)} &= r_m^{(k)}, \quad \bar{a}_{0,m}^{(k)} = s_m^{(k)}, \quad m = \overline{0, N-1}, k = 0, 1, 2, \dots, \\
a_{j,m}^{(k)} &= \sum_{\ell} \bar{h}_{\ell} \cdot a_{j-1, 2n+\ell}^{(k)}, \\
d_{j,n}^{(k)} &= \sum_{\ell} \bar{p}_{\ell} \cdot a_{j-1, 2n+\ell}^{(k)}, \quad j = \overline{1, J},
\end{aligned}$$

где $\{\bar{h}_{\ell}\}, \{\bar{p}_{\ell}\}$ – последовательность, определяемая материнским вейвлетом. $\{d_{j,n}^{(k)}\}$, $j = \overline{1, J}$, $J < N$, – коэффициенты вейвлет-преобразования последовательности $\{r_m^{(k)}\}$. Аналогичные формулы могут быть получены для последовательности $\{\bar{a}_{0,m}^{(k)} := s_m^{(k)}\}$.

Формула синтеза имеет вид

$$a_{j-1,m}^{(k)} = \sum_{\ell} \bar{h}_{n-2\ell} \cdot a_{j,\ell}^{(k)} + \sum_{\ell} p_{n-2\ell} \cdot d_{j,\ell}^{(k)}.$$

Для конкретных вычислений необходимо иметь таблицу значений $\{h_{\ell}\}, \{p_{\ell}\}$, определяемую выбранным материнским вейвлетом.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим следующую нелинейную систему

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= 0,5x(k) + 2\cos(1,2k) + u(k), \\
y(k) &= \frac{x^2(k)}{20} + v(k),
\end{aligned}$$

где $u(k) - N(0; 0.5)$, $v(k) - N(0; 0.1)$, $E\{x(0)\} = 10$,

$$P_{x(0)/Y_0}(x) = 0,5N(-4; 5) + 0,5N(10; 2).$$

Таблица значений $\{h_{\ell}\}, \{p_{\ell}\}$, соответствующих вейвлету Добеши третьего порядка (${}_3\psi(x)$), имеет вид

k	0	1	2	3	4	5
h_k	0,33267	0,80689	0,45988	-0,13501	-0,08544	0,03522
$P_k = (-1)^k h_{5-k}$	0,03523	0,08544	-0,13501	-0,45988	0,80689	-0,33267

Результаты оценивания состояния $x(k)$ приведены в таблице

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(k)$	12	9	0	-0,5	0	0,2	2	1,8	0,1	-2	-1
$\hat{x}(k)$	10	11	2	0	-2	0	1,8	1,7	0,1	-2,1	-1,2

Результаты моделирования показывают эффективность данного подхода к решению задачи нелинейной фильтрации и прогнозирования временных рядов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Jazminski A. Stochastic Process and Filtering Theory. Academic Press. New York, 1970.
2. Polson N., Cardin B., Stoffer D. A Monte-Carlo approach to nonnormal and nonlinear state space modeling // J. Amer. Jtuhst. Assoc. 1992, P. 493–500.
3. Theocharis J., Petridis V. Comparison of the tree nonlinear filtering schemes. Inform. Jci. 32 1984. P. 91–116.
4. Kaiser G. A Friendly Guide to Warelets. Birk hauser. Boston, 1994.
5. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М. : Техносфера, 2004.