АНАЛИЗ G-СЕТИ С ГРУППОВЫМ УДАЛЕНИЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И ДОХОДАМИ

Д. Я. Копать, М. А. Матальцкий

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Гродно, Беларусь

e-mail: dk80395@mail.ru, m.matalytski@gmail.com

Проведено исследование открытой марковской G-сети массового обслуживания в переходном режиме с доходами, в случае группового удаления положительных заявок, размер которой задан некоторым дискретным распределением вероятностей. Найдены выражения для нахождения ожидаемых доходов систем такой сети, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами с заданными средними значениями. Они получены в виде линейных функций времени, коэффициенты которых зависят от параметров систем сети. Результаты могут быть применены при моделировании и прогнозировании потерь в компьютерных системах и сетях от попадания в них вирусов.

Ключевые слова: положительные и отрицательные заявки; групповое удаление положительных заявок; ожидаемые доходы; сеть с доходами; вероятности переходов между состояниями.

INVESTIGATION OF G-NETWORK WITH CUSTOMERS BATCH REMOVAL AND REVENUES

D. Ya. Kopats, M. A. Matalytski

Grodno State University of Yanka Kupala

Grodno, Belarus

The object of research is an open Markov G-network with revenues, in the case of group deletion positive customers, the size of which is set to some discrete probability distribution. The purpose of the research is finding the expected revenues of the network systems. The case when revenues from the network transitions between states are random variables with given mean values has been considered. A method for finding expected revenues of researched network systems has been described. Investigation performed at non-stationary regime. Expressions for such revenues received in the form of a linear function of time, the coefficients of which depend on the parameters of the network systems has been obtained. In the end of the article. The results can be used for modeling and forecasting losses in computer systems and networks while ingress of viruses.

Keywords: positive and negative customers; positive customers batch removal; expected revenues; network with revenues; transition probabilities between states.

ВВЕДЕНИЕ

Результаты, полученные ранее по сетям массового обслуживания (СеМО), с доходами в нестационарном режиме, были представлены в работе [1]. Заявка при переходе из одной системы массового обслуживания (СМО) в другую приносит последней некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается на эту величину. Доходы от переходов между состояниями сетей зависели от их состояний и времени или являлись случайными величинами с заданными моментами первого и второго порядков.

В последние годы внимание было уделено исследованию марковских сетей с доходами и различными особенностями: с ограниченным временем ожидания заявок (в том числе разнотипных), ненадежными системами, с обходами СМО заявками, с положительными и отрицательными заявками, сигналами [2–5]. В настоящей статье рассматривается марковская сеть с доходами, положительными и отрицательными заявками в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами (СВ) с заданными моментами первого порядка, а поступающая в сеть отрицательная заявка уничтожает случайную группу положительных заявок.

Следует отметить, что марковские СеМО с положительными и отрицательными заявками в стационарном режиме (G-сети) без учета доходов были введены в рассмотрение Е. Gelenbe [6] как модели поведения компьютерных вирусов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях и называются ныне G-сетями.

ОПИСАНИЕ СЕТИ

Рассмотрим открытую G-сеть с n однолинейными СМО. В i -ю СМО из внешней среды поступает простейший поток положительных (обычных) заявок с интенсивностью λ_{0i}^+ и простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью λ_{0i}^- , $i = \overline{1, n}$. Все поступающие потоки независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i -й СМО распределены по показательному закону с параметром μ_i , $i = \overline{1, n}$.

Ранее, например в статье [5], считалось, что отрицательная заявка, поступающая в некоторую систему, в которой имелись положительные заявки, мгновенно уничтожала одну из них, а затем сразу же покидала сеть, не получив в этой СМО обслуживания. В данной работе описывается иное поведение отрицательных заявок, которые поступают в СМО сети. Если в момент времени t в i -й системе находится $k_i \geq B_i$ положительных заявок, то при поступлении в нее отрицательной заявки число заявок в ней уменьшается на некоторую величину B_i , (т. е. уничтожается сразу B_i положительных заявок), где B_i – целочисленная случайная величина. Если же $k_i < B_i$, то i -я система полностью опустошается (все положительные заявки, которые находятся в этой СМО в данный момент времени, мгновенно уничтожаются). Таким образом, случайная величина B_i , которая фактически определяет максимальный размер уничтожаемой группы заявок в i -й СМО, подчиняется в общем случае произвольному дискретному закону распределения:

$$P\{B_i = m\} = \pi_{im}, \quad m \geq 1, \quad M\{B_i\} = \sum_{m=1}^{\infty} m\pi_{im} = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Е. Gelenbe исследовал такое поведение отрицательных заявок, в том числе с учетом сигналов, в работе [7], но только в стационарном режиме.

Как и ранее, в каждой системе сети обслуживаются только положительные заявки. Положительная заявка, обслуженная в i -й СМО, с вероятностью p_{ij}^+ направляется в j -ю СМО как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^- как отрицательная заявка, и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$ уходит из сети, $i, j = \overline{1, n}$. Под состоянием рассматриваемой сети в момент времени t будем понимать вектор $k(t) = (k, t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t)$, который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний, где $k_i(t)$ – количество положительных заявок в момент времени t в i -й СМО, $i = \overline{1, n}$.

НАХОЖДЕНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ СИСТЕМ СЕТИ

Опишем динамику изменения доходов i -й СМО сети, $i = \overline{1, n}$. Пусть доход этой системы в начальный момент времени был равен v_{i0} , $i = \overline{1, n}$. Нам будет интересен доход системы $V_i(t)$ в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. Доход СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно записать в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \quad (2)$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода i -й системы на интервале времени $(t, t + \Delta t)$, $i = \overline{1, n}$. Чтобы его найти, выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt , а также изменения доходов i -й СМО, которые связаны с этими событиями, $i = \overline{1, n}$. Возможны следующие ситуации.

1. С вероятностью $\lambda_{0i}^+ \Delta t + o(\Delta t)$ в i -ю СМО поступит положительная заявка извне, которая принесет ей доход в размере r_{0i} , где r_{0i} – случайная величина (СВ) с математическим ожиданием (м. о.) $M\{r_{0i}\} = a_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

2. С вероятностью $\lambda_{0i}^- \pi_{im} \Delta t + o(\Delta t)$ в i -ю СМО поступит отрицательная заявка из внешней среды, которая уничтожит в ней случайную группу положительных заявок B_i и принесет ей убыток в размере $-\bar{r}_{0i}$, где $\bar{r}_{0i}$ – СВ с м. о. $M\{\bar{r}_{0i}\} = \bar{a}_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

3. С вероятностью $\mu_i p_{i0} u(k_i(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ заявка обслужится в i -й системе и уйдет из сети, при этом доход i -й СМО уменьшится на величину R_{i0} , где R_{i0} – СВ с м. о. $M\{R_{i0}\} = b_{i0}$, $i = \overline{1, n}$.

4. С вероятностью $\mu_i p_{ij}^- \pi_{jm} \Delta t + o(\Delta t)$ положительная заявка из i -й СМО переходит в j -ю СМО как отрицательная заявка, которая уничтожает в ней случайную группу положительных заявок B_j , при этом доход i -й СМО уменьшится на величину $\bar{R}_{ij}$, где $\bar{R}_{ij}$ – СВ с м. о. $M\{\bar{R}_{ij}\} = \bar{c}_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

5. Заявка из i -й системы перейдет в j -ю систему с вероятностью $\mu_i p_{ij}^+ u(k_i(t)) \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. При таком переходе доход i -й системы уменьшится на величину R_{ij} , а доход j -й системы увеличится на эту величину, $M\{R_{ij}\} = a_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

6. С вероятностью $\mu_j p_{ji}^+ u(k_j(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ положительная заявка перейдет из j -й в i -ю систему, при этом доход i -й СМО возрастет на величину R_{ji} , а доход j -й СМО уменьшится на эту величину, $M\{R_{ji}\} = a_{ji}$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq i$.

7. С вероятностью $1 - \sum_{j=1}^n [\lambda_{0j}^+ + \lambda_{0j}^- + \mu_j] \Delta t + o(\Delta t)$ на отрезке времени Δt состояние сети не изменится, $j = \overline{1, n}$, $j \neq i$. За каждый малый промежуток времени Δt i -я система из-за нахождения в ней заявок увеличивает свой доход на величину $r_i \Delta t$, где r_i – СВ с м. о. $M\{r_i\} = d_i$, $i = \overline{1, n}$.

Найдем выражение для изменения ожидаемого дохода i -й СМО в момент времени t . Предположим, что все СМО сети функционируют в режиме высокой нагрузки, т. е. $k_i(t) > 0$, $\forall t > 0$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае период занятости СМО равен бесконечности и, значит, их стационарное распределение не существует, коэффициент загрузки СМО больше единицы. Однако следует отметить, что в таких условиях на большинстве интервалов времени функционируют реальные объекты – как, например, беспроводные локальные сети [8].

С учетом вышеописанного получим, что ожидаемые доходы $v_i(t)$ являются линейными функциями времени:

$$v_i(t) = v_{i0} + \left[d_i + \lambda_{0i}^+ a_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j a_{ij} p_{ji}^+ - \lambda_{0i}^- b_i \bar{a}_{0i} - \right. \\ \left. - \mu_i \left(b_{i0} p_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_{ji} p_{ij}^+ - \bar{c}_{ij} b_j p_{ij}^-) \right) \right] t = v_{i0} + \theta_i t, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Можно легко определить, на каких интервалах времени ожидаемые доходы СМО сети принимают положительные и отрицательные значения, найти интервалы возрастания и убывания ожидаемых доходов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Matalytski M. A. On some results in analysis and optimization of Markov networks with incomes and their applications // Automation and Remote Control. 2009. Vol. 70. № 10. P. 1683–1697.
2. Matalytski M. A. Analysis and forecasting of expected incomes in Markov networks with bounded waiting time for the claims // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76. № 6. P. 1005–1017.
3. Matalytski M. A. Analysis and forecasting of expected incomes in Markov networks with unreliable servicing systems // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 15. № 11. P. 2179–2189.
4. Matalytski M., Naumenko V. Finding incomes of HM-network with one-type messages bypass of systems // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science Czesochowa University of Technology. 2012. Vol. 11, № 3. P. 111–123.
5. Naumenko V., Matalytski M. Investigation of networks with positive and negative messages, many-lines queueing systems and incomes // J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2015. Vol. 14, Is. 1. P. 79–90.

6. Gelenbe E. Product form queueing networks with negative and positive customers // J. of Applied Probability. 1991. Vol. 28. P. 656–663.
7. Gelenbe E. G-networks with signals and batch removal // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 1993. Vol. 7. P. 335–342.
8. Вишнеvский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М. : Техносфера, 2003.