

МЕТОДОЛОГИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНОЙ КОНЦЕПЦИИ ЧИСЛА. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

А. А. Ходова

Национальный институт образования

Минск, Беларусь

e-mail: ada.khodova@gmail.com

Подчеркивается значение популяризации операторной трактовки числа, принимаемой учеными и методистами в ряде стран в целях обеспечения преемственности и общедоступности математического образования. Однако соответствующая информация еще не всюду стала достоянием студентов – будущих учителей и не заинтересовала преподавателей математики в высших учебных заведениях. В школе «точечные» операторные рекомендации дают незначительный эффект на фоне господства количественной трактовки числа. Ее должна заменить операторная концепция происхождения чисел.

Ключевые слова: природа чисел; числовые коды действий человека и машины; управление действиями; операторная концепция числа.

METHODOLOGY OF IMPLEMENTATION OPERATOR CONCEPTS OF NUMBER. INFORMATION SUPPORT

A. A. Khodova

National institute of education

Minsk, Belarus

As the author of the concept and the former school teacher has to emphasize value of promoting of the operator interpretation of number undertaken by scientists and methodologist in a number of the countries for the purpose of ensuring continuity and general availability of mathematical education. However I know from experience the relevant information not everywhere became property of students – future teachers and haven't interested of teachers of mathematics in higher educational institutions. And it isn't casual. At school «dot» operator recommendations give insignificant effect against universal domination of the quantitative interpretation of number. It shall be replaced with operator concept of the nature of numbers.

Keywords: nature of numbers; number codes of actions of the person and machine; control of/by actions; operator concept of number.

Как известно, исходная абстракция высшей математики отождествляет понятия действительного числа и скалярной величины на основе изоморфизма соответствующих математических структур. Математика в высшей школе начинается с обобщения конечных продуктов школьного математического образования: практики *вычислений*, опыта измерения и оперирования *величинами* и их *обозначениями* – «именованными числами». Идея изоморфизма, не объясняя *природу* – *реальный смысл* чисел, указывает лишь на сходство свойств одноименных отношений и операций в системах чисел и величин. Парадокс этого изоморфизма в том, что *числовая символика*, являясь *универсальным инструментом* не только практики, но и познания (развития человека), в процессе теоретического обобщения становится *абстракцией*, лишенной собственного реального смысла. Именно в этом кроется причина появления массовых ошибок учащихся при переходе к алгебре – к оперированию *буквенными* выражениями как числовыми. Здесь наиболее отчетливо проявляется нарушение преемственности в обучении математике и смежным дисциплинам.

Реализация операторной концепции числа (ОКЧ) предполагает полную замену методологии школьного математического образования на основе современных взглядов на *происхождение* понятия числа и *развивающий потенциал* деятельных представлений о числе в структуре и содержании обучения, в технологии управления учебной деятельностью и ожидаемых результатах обучения. Это предложение в значительной степени обобщает результаты теоретико-экспериментальных исследований автора, реализовано в теории и практике преподавания основ арифметики рациональных чисел-операторов в школе, апробированной *стратегии* и *тактике* создания серии учебных пособий, последовательно вводимых по каждой новой теме после апробации предыдущей. Считаю своей задачей остановиться на *этапах* исследования, приведшего к вышеуказанной постановке проблемы, найденных *подходах* к ее решению, попутно показать продуктивность проверки нужной информации личным опытом ее использования – созданием средств обучения [5].

Стимулом к исследованию послужила реформа школьного математического образования под научным руководством А. Н. Колмогорова и А. И. Маркушевича. Первое задание мне как начинающему научному сотруднику НИИ педагогики МО БССР было поручено заместителем директора института Лященко Е. И.: разобраться в причинах затруднений учащихся при выполнении действий с десятичными дробями в экспериментальных классах. Сопоставление пробного и действующего учебников с личным опытом работы в школе показало, что при введении таблицы разрядов десятичной дроби и алгоритмов ослаблены стихийно формируемые интуитивные операторные представления о дробях. Предложенный мной способ *введения* десятичных дробей был апробирован в СШ № 50 г. Минска, впоследствии представлен на Всесоюзных педагогических чтениях (1972 г., секция математики, первая премия) и рекомендован к публикации в журнале «Математика в школе».

Как непосредственное продолжение исследования на 1970 г. планировалось расширить рекомендации для учителей, включая алгоритмы действий над десятичными дробями. В рукописи использовалась терминология, связанная с операторной трактовкой чисел, поэтому первоначально работа была отклонена издательством как «экспериментальная», но после Всесоюзных педагогических чтений принята к печати. Причем с условием изъятия операторной терминологии по той причине, что нельзя противоречить впервые

вводимым в массовую школу учебникам. Этот резон не исключал возможности дальнейшего исследования взаимосвязи между операторным, количественным и порядковым употреблением числовых символов: т. е. между тремя функциями, в которых числа могут выступать на практике. По настоятельному совету администрации с 1970/71 учебного года стала совмещать научную работу с опережающей апробацией реформенных учебников в VI–VIII классах СШ № 50 г. Минска. Предварительная информация по теме исследования была мне известна со студенческих лет благодаря лекциям Ф. М. Шустеф и рекомендованным ею работам И. В. Арнольда.

Таким образом, идеи реформы пришлось испытывать на личном опыте работы по пробным учебникам алгебры и геометрии в *средних* классах, а притягательность идей И. В. Арнольда реализовать, разрабатывая собственные учебные материалы для обобщающего повторения натуральных чисел в IV классе – тоже в *среднем* звене. В этой экспериментальной модели ставилась цель четкого разграничения и последующего синтеза трех функций числа, чтобы облегчить перенос этих представлений на другие виды рациональных чисел. Предварительные результаты моего лавирования между перспективой теоретико-множественного подхода с жестким акцентом на количественной функции числа, с одной стороны, и ретроспективой сохранения и глубокого исследования природы интуитивных операторных представлений о числе, с другой стороны, представлены в тематическом сборнике научных трудов под редакцией Е. И. Лященко [1].

Главный из них – о непригодности использования процесса измерения, числовых шкал и даже измерительной линейки для первого знакомства с операторной функцией числа.

Обычно в школе больше говорят об измерениях, нежели измеряют. Поэтому учащиеся лишены возможности связать представления о числах, получающихся при измерении, со своими действиями. В экспериментальной модели обобщающего повторения натуральных чисел в IV классе этот недостаток был устранен. Практиковалось измерение разных отрезков одной «меркой» и измерение одного отрезка разными мерками. Обозначение длины отрезка с помощью вертикальных черточек дополнялось указанием единицы измерения: $|AB| = 4MC$. Изменения величин иллюстрировались «переходами» (в терминологии И. В. Арнольда) – *направленными отрезками* на числовом луче. С их помощью создавалось общее представление о действиях первой ступени – сложении/вычитании чисел. Согласно логике И. В. Арнольда, введение действий второй ступени – умножения/деления предполагало операторную трактовку чисел, а ее надо было «вытащить» из-под первых двух – количественной и порядковой в процессе измерения. А иначе откуда ее взять? И хотя необходимые действия учащихся были ранее активированы, возникал естественный вопрос, почему об этом не сказали. *Синтез* трех функций числа в процессе измерения оказался сильнее возможности их раздельного *анализа* и установления новой последовательности формирования.

Из сложившейся ситуации напрашивалось несколько выводов. Была приостановлена работа над заключительной частью учебных материалов в связи с очевидной практической нелогичностью возвращения к началу обобщающего повторения. И эта нелогичность говорила в пользу операторного *происхождения* рациональных чисел – утверждения И. В. Арнольда об операторной функции числа как *генетически исходной* по отношению к двум другим. Действительно, она относится к действиям субъекта, с которых *начинается* процесс измерения, и по записи *результата измерения* можно определить *харак-*

тер и *последовательность* выполненных действий, т. е. *воспроизвести* измеренную величину в другое время и в другом месте. Сама собой определилась ближайшая перспектива исследования – найти адекватный способ введения новых (после натуральных) чисел сразу в операторном смысле – дать интерпретацию числовых символов как «*указателей действий*», минуя измерение. Выход из контекста измерения нарушал устойчивость традиционных представлений о числе как количественной характеристике материальных объектов, с одной стороны, и противостояние *синтеза* раздельному анализу трех функций числа, с другой стороны.

В этих серьезных нарушениях И. В. Арнольд не участвовал. Отмечая «*наиболее отвлеченный*» (от материальных объектов – *А. Х.*) *смысл* операторной трактовки чисел, необходимый для овладения формальным аппаратом математики, он сохранил в методических рекомендациях приверженность традиционному *синтезу* трех функций числа. Интерес к его работам способствовал закреплению термина для обозначения интуитивных представлений о числе как «*указателе действий*», *операторе*, в стандартных обозначениях результатов измерения, осознаваемых как *умножение* единицы измерения (величины) на число: $7m = m \cdot 7$; $0,3m = m \cdot 0,3$; $-2\vec{e} = \vec{e} \cdot (-2)$. Этой *общности* в истолковании смысла умножения величины на число не обеспечивала количественная трактовка числа.

Осенью 1974 г., поступив в аспирантуру НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, я сказала заведующей лабораторией математики Масловой Галине Герасимовне, что хотела бы продолжить исследование эффективности операторной трактовки числа. После методологического семинара, руководимого А. И. Маркушевичем, она советовалась с ним, и он спросил, что новое после И. В. Арнольда я могу предложить. К очередному семинару краткое обоснование новизны моих «*намерений*» было представлено Г. Г. Масловой (регистрация №140-Х, 30.10.74.), и через некоторое время утверждена тема исследования. Первый год прошел в изучении методической литературы и поисках *неформальных* приемов ознакомления учащихся с операторной *функцией* числа – реальным *выполнением* предметных действий, руководствуясь обозначением числа как «*указателем действий*». Сознание прочно удерживало связь предметных *действий*, обозначаемых числом, с *субъектом* этих действий – учеником, а интуиция, основанная на ощущениях субъекта в процессе измерения, связывает их с материальными (материализованными) *объектами* и *результатами* действий. Но моя интуиция молчала, возможно, потому, что я сознательно нарушила *синтез* трех функций числа в процессе измерения, исключив из рассмотрения количественную и порядковую функции, соотносимые с материальными объектами.

Изучая публикации, относящиеся к реформе математического образования, и обсуждая ее первые уроки с авторами учебников, на заседаниях методологического семинара и в лаборатории математики, убеждалась в правильности выбранного мной направления исследования. Теоретико-множественная интерпретация арифметических понятий лишь усугубляла формализм традиционной методики, лишая ее даже намек на интуитивную связь с активным жизненным процессом. Искомый способ введения операторной трактовки чисел должен был связать их с непосредственным выполнением *предметных* действий учащимися, т. е. придать каждому числу однозначно понимаемый ими смысл «*указателя предметных действий*».

Учитывая методологический характер этой проблемы, искала и нашла ее решение на пересечении *личного опыта* – участия в проведении реформы, и прогрессивных ее идей. В скромном ротاپринтном пособии А. Н. Колмогорова для математических школ обнаружила определение действительного числа как монотонного аддитивного оператора на (в) системе скалярных величин [1]. И сразу все стало на свои места: число-оператор *отображает* систему величин на себя, т. е. каждой величине этой системы ставит в соответствие величину этой же системы. Более того, *само число – вне этой системы*, как бы «нависает» над ней и символизирует другую, не материальную реальность, а реальность предметных *действий субъекта*.

Сразу оценив методическую эффективность операторных схем для раскрытия деятельности природы числовых кодов, воспользовалась «готовым» определением *скалярной величины* и разработала теоретическую модель арифметики рациональных чисел на основе четырех *простейших операторов* в данной системе величин [3].

Выполняя действия, указываемые числом α , субъект преобразует *любую* величину \vec{e} (*объект* действий), в величину $\alpha\vec{e}$ (*результат* действий). Принятая символика соотносит *коды* величин и *коды* чисел с разными компонентами *действительности*, не сводимой только к материальному миру: в обозначении результата действий $\alpha\vec{e}$ присутствует числовой код α действий субъекта. В этом «сходстве» с именованными числами очевидно превосходство обобщенной операторной концепции. Как и трактовка числового оператора α в «формулах» вида $\vec{m} = \alpha\vec{n}$ обобщает определение понятия числа как *отношения величин*, данное Ньютоном, придав ему отчетливый *деятельный* смысл, и направляет внимание на связь действий субъекта с коллективным опытом и принятием соглашений (в системе величин). Освобождая понятие числа от связи с измерением, определение А. Н. Колмогорова указывает на единственную его функцию – операторную, связывая с ней *происхождение понятия числа* [4].

Представляя подготовленную в аспирантуре диссертацию, я пришла к выводу, что подтверждать эффективность ОКЧ в средних классах поздно. По своей инициативе провела эксперимент в 1«Э» (экспериментальном) классе СШ № 130 г. Минска – присоединилась к коллективному исследованию лаборатории начального обучения под руководством Т. М. Савельевой в связи с переходом к обучению детей с 6 лет. Этот эксперимент был представлен на защите диссертации.

Развивающий потенциал ОКЧ в полной мере проявился в 90-х гг. XX в. и начале следующего десятилетия: с 1989/90 учебного года осуществлялся массовый эксперимент в I–IV классах. Его распространение совпало с развитием информационных технологий. Могу предположить, что в обоих случаях решающую роль играет последовательная реализация ОКЧ, обеспечивая человеку способность управлять своими действиями и действиями автоматов. Основные результаты ее реализации в школьном образовании сформулированы выше и представлены на сайте khodova-math.com.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Колмогоров А. Введение в анализ. М. : Изд-во МГУ, 1966.
2. Системно-структурный подход к определению содержания предмета математики : сб. науч. трудов под ред. Е. И. Ляшенко. Минск : НИИП МП БССР, 1975.

3. Ходова А. А. Рациональное число как оператор в системе скалярных величин // Основные направления совершенствования математического образования в средней школе : сб. науч. трудов. М. : НИИ СИМО АПН СССР, 1977. С. 34–42.
4. Ходова А. А. Подход к формированию понятия числа на основе организации конкретных действий учащихся // Активизация учебно-познавательной деятельности учащихся в процессе обучения предметам естественно-математического цикла : сб. науч. трудов. Минск : НИИП МП БССР, 1980. С. 46–64.
5. Ходова А. А. О природе затруднений в деятельности учителя математики // Деятельностная педагогика и педагогическое образование : сб. тезисов III Международной конференции «ДППО-2015». Воронеж, 18–22 сентября 2015 г. / под ред. А. В. Боровских. Воронеж : Воронежский гос. ун-т, 2015. С. 112–116.
6. Ходова А. А. Операторная концепция числа: методология и личный опыт // Деятельностная педагогика и педагогическое образование : сб. тезисов IV Международной конференции «ДППО-2016»: Воронеж, 9–13 сентября 2016. / под ред. А. В. Боровских. Воронеж : Воронежский гос. ун-т, С. 96–99.