УДК 519.2

Д.В. КИШИЛОВ

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТЕСТА ДЛЯ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ИСКАЖЕНИЙ

The paper is devoted to the performance and robustness analysis of sequential testing of simple hypotheses on parameters of absolutely continuous distributions. Upper and lower bounds are obtained for the error probabilities and conditional expected sequence sizes of the test when the model is under contaminations of Tukey - Huber type.

Пусть наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_i \in R$, определенных на пространстве (Ω, F) с абсолютно непрерывной функцией распределения вероятностей $F(x)$. Проверяются две простые гипотезы:

$$H_0 : F(x) = F_0(x)\,,\ H_1 : F(x) = F_1(x)\,, \tag{1}$$

где $F_0(x)$, $F_1(x)$ - некоторые функции распределения вероятностей с плотностями $p_0(x)$ и $p_1(x)$ соответственно, $\mathrm{mes}\{x{:}p_0(x)\neq p_1(x)\}>0$.

Обозначим:

$$\lambda_W(x) = \log\frac{p_1(x)}{p_0(x)},\ x\in R;\quad \Lambda_n = \Lambda_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{t=1}^{n}\lambda_W(x_t),\ n\in N\,. \tag{2}$$

В тесте Вальда [1] после n—\, 2, ... наблюдений принимается решение

$$d_n = 1_{[C_+,+\infty]}(\Lambda_n) + 2\cdot 1_{(C_-,C_+)}(\Lambda_n)\,, \tag{3}$$

где $1_D(\cdot)$ - индикаторная функция множества D. Значения d_n=0 и d_n=1 означают остановку процесса наблюдения и принятие гипотезы H_0 или H_1 соответственно. Решение d_n=2 означает, что нужно сделать (n+1)-е наблюдение. Пороги C_- $C_+\in R$, $C_-<0<C_+$, являются параметрами теста. В (2) функция $\lambda_W(\cdot)$ может быть заменена некоторой другой функцией $\lambda(\cdot):R\to R$. В этом случае будем говорить, что тест (3) построен на функции $\lambda(\cdot)$.

В качестве модели искажений рассмотрим модель «выбросов» типа Тьюки - Хьюбера [2]. В этом случае фактическая функция распределения вероятностей наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид:

$$\bar{F}_k(x) = (1-\varepsilon_k)F_k(x) + \varepsilon_k\tilde{F}_k(x)\,,\ x\in R\,, \tag{4}$$

где $\varepsilon_k\in[0;\,0{,}5)$, $\tilde{F}_k(\cdot)\neq F_k(\cdot)$ - «засоряющая» функция распределения.

Воспользуемся подходом из [3] для вычисления оценок вероятностей ошибок первого и второго рода α, β и условных средних длин последовательности $t^{(k)}$ (при верной гипотезе H_k) теста (3) при искажениях (4). Обозначим через Y множество значений функции $\lambda_W(\cdot)$, $\bar{Y} = Y\cap[C_- - C_+,\ C_+ - C_-]$. Выберем числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы выполнялись условия

$$\lambda_0 \le \ldots \le \lambda_m,\ \bar{Y}\subset[\lambda_0,\lambda_m],\ \max_{i=\overline{1,m}}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\le\delta\,, \tag{5}$$

$$\exists a\in R_+,\ \lambda_i = m_i a,\ \forall i\in\{0,\ldots,m\},\ m_i\in Z\,, \tag{6}$$

где $\delta>0$ - параметр аппроксимации.

Построим функции $\bar{\lambda}(x)$, $\underline{\lambda}(x): R\to R$ следующим образом:

$$\bar{\lambda}(x) = \begin{cases}\lambda_0, & \lambda(x)\le\lambda_0,\\ \lambda_i, & \lambda(x)\in(\lambda_{i-1},\lambda_i],\ i=\overline{1,m-1},\\ \lambda_m, & \lambda(x)>\lambda_{m-1},\end{cases}\qquad \underline{\lambda}(x) = \begin{cases}\lambda_0, & \lambda(x)\le\lambda_1,\\ \lambda_i, & \lambda(x)\in(\lambda_i,\lambda_{i+1}],\ i=\overline{1,m-1},\\ \lambda_m, & \lambda(x)>\lambda_m.\end{cases}$$

Обозначим через $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ вероятности ошибок первого и второго рода теста (3), построенного на функциях $\overline{\lambda}(x)$ и $\underline{\lambda}(x)$ соответственно. Определим моменты остановки: $\tau_0=\inf\{n:\Lambda_n\le C_-\}$, $\tau_1=\inf\{n:\Lambda_n\ge C_+\}$, $\overline{\tau}_0=\inf\{n:\overline{\Lambda}_n\le C_-\}$, $\overline{\tau}_1=\inf\{n:\overline{\Lambda}_n\ge C_+\}$, $\underline{\tau}_0=\inf\{n:\underline{\Lambda}_n\le C_-\}$, $\underline{\tau}_1=\inf\{n:\underline{\Lambda}_n\ge C_+\}$, где $\overline{\Lambda}_n=\sum_{t=1}^{n}\overline{\lambda}(x_t)$, $\underline{\Lambda}_n=\sum_{t=1}^{n}\underline{\lambda}(x_t)$. Обозначим:

$$T_-^{(0)}=\overline{\alpha}E_0\{\overline{\tau}_1\,|\,\overline{\tau}_1<\overline{\tau}_0\}+(1-\underline{\alpha})E_0\{\underline{\tau}_0\,|\,\underline{\tau}_0<\underline{\tau}_1\},$$
$$T_+^{(0)}=\underline{\alpha}E_0\{\underline{\tau}_1\,|\,\underline{\tau}_1<\underline{\tau}_0\}+(1-\overline{\alpha})E_0\{\overline{\tau}_0\,|\,\overline{\tau}_0<\overline{\tau}_1\},$$
$$T_-^{(1)}=\underline{\beta}E_1\{\underline{\tau}_0\,|\,\underline{\tau}_0<\underline{\tau}_1\}+(1-\overline{\beta})E_1\{\overline{\tau}_1\,|\,\overline{\tau}_1<\overline{\tau}_0\},$$
$$T_+^{(1)}=\overline{\beta}E_1\{\overline{\tau}_0\,|\,\overline{\tau}_0<\overline{\tau}_1\}+(1-\underline{\beta})E_1\{\underline{\tau}_1\,|\,\underline{\tau}_1<\underline{\tau}_0\},$$

$E_k\{\cdot\}$ - математическое ожидание при истинной гипотезе H_k, $k=0,1$.

Теорема 1. *Если имеет место модель* (4), *функции* $\overline{\lambda}(x)$, $\underline{\lambda}(x)$ *удовлетворяют условиям* (5), (6), *то справедливы следующие неравенства*

$$\underline{\alpha}\le\alpha\le\overline{\alpha},\ \overline{\beta}\le\beta\le\underline{\beta},$$
$$t_-^{(k)}\le t^{(k)}\le t_+^{(k)},\ t_\pm^{(k)}=T_\pm^{(k)}+o(1),\ \delta\to0,\ k=0,1.$$

Доказательство. По построению $\overline{\lambda}(x)\ge\lambda(x)$ при $\lambda(x)\in\overline{Y}$. Так как $\forall n<\min\{\tau_0,\tau_1\}$ статистика $\Lambda_n\in(C_-,C_+)$, то $\lambda(x_n)\in\overline{Y}\Rightarrow\lambda(x_n)\le\overline{\lambda}(x_n)\Rightarrow\Lambda_n\le\overline{\Lambda}_n$, $\forall n<\min\{\tau_0,\tau_1\}$. Следовательно, $\tau_0\le\overline{\tau}_0$ и $\tau_1\ge\overline{\tau}_1$. Аналогично $\tau_1\le\underline{\tau}_1$ и $\tau_0\ge\underline{\tau}_0$ Дальнейшее доказательство следует из теоремы 2 в [3]. •

Поскольку выполняется (6), функции $\overline{\lambda}(\cdot)$ и $\underline{\lambda}(\cdot)$ удовлетворяют так называемому условию «соизмеримости» [3]. В [3, 4] для тестов, построенных на таких функциях, получены аналитические выражения для вероятностей ошибок первого и второго рода и величин, входящих в $T_\pm^{(k)}$. Таким образом, теорема 1 позволяет вычислять оценки сверху и снизу условных вероятностей ошибок для теста (3). Кроме того, при достаточно малых δ, $T_-^{(k)}$ и $T_+^{(k)}$ в качестве оценок сверху и снизу для условной средней длины можно использовать последовательности $t^{(k)}$. Представление оценок в аналитической форме позволяет с их помощью анализировать робастность теста (3).

В заключение приведем результаты численных экспериментов. Проверялись гипотезы $H_0:x_t\sim N(\mu_0,1)$, $H_1:x_t\sim N(\mu_1,1)$, $\mu_0=-\mu_1=0{,}1$. Искажающие распределения вероятностей отличались большей дисперсией: $N(\mu_k,10)$. Пороги C_-, C_+ для теста (3) находим по формулам [1]: $C_-=\log\beta_0/(1-\alpha_0)$, $C_+=\log(1-\beta_0)/\alpha_0$, где α_0, β_0 – максимально допустимые вероятности ошибок первого и второго рода. Числа λ_i для построения функций $\overline{\lambda}(\cdot)$, $\underline{\lambda}(\cdot)$ задавали по формуле: $\lambda_i=(i-\lceil C_+-C_-\rceil)\delta$, $i=0,\ldots,2\lceil C_+-C_-\rceil$, $\delta=0{,}01$.

Для различных пар значений α_0, β_0 методом Монте-Карло вычисляли оценки характеристик теста $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{t}^{(0)}$, $\hat{t}^{(1)}$. Количество экспериментов при каждом наборе параметров составило $N = 20\,000$. Для тех же значений в соответствии с теоремой 1 были найдены оценки снизу и сверху. Вычисления производили как для гипотетической модели (вероятность появления «выброса» $\varepsilon=0$), так и для модели с искажениями (4) ($\varepsilon=0{,}1$). Для модели без искажений были определены оценки условной средней длины последовательности $\tilde{t}^{(k)}$, построенные в [5]. Результаты численного моделирования представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Оценки вероятностей ошибок

ε	α_0	β_0	$\hat\alpha$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\hat\beta$	$\underline{\beta}$	$\overline{\beta}$
0	0,01	0,01	0,010	0,003	0,028	0,008	0,003	0,028
	0,01	0,10	0,009	0,003	0,026	0,090	0,049	0,160
	0,10	0,10	0,091	0,053	0,150	0,094	0,053	0,150
0,1	0,01	0,01	0,071	0,042	0,131	0,077	0,042	0,131
	0,01	0,10	0,066	0,038	0,104	0,250	0,186	0,332
	0,10	0,10	0,221	0,170	0,277	0,212	0,170	0,277

Таблица 2

Оценки условных средних длин последовательности

ε	α_0	β_0	$\hat t^{(0)}$	$T_-^{(0)}$	$T_+^{(0)}$	$\tilde t^{(0)}$	$\hat t^{(1)}$	$T_-^{(1)}$	$T_+^{(1)}$	$\tilde t^{(1)}$
0	0,01	0,01	233,9	195,6	288,6	225,2	230,5	195,6	288,6	225,2
	0,01	0,10	118,2	102,0	142,6	111,2	199,1	189,6	214,4	191,0
	0,10	0,10	94,8	94,8	96,2	87,9	95,3	94,8	96,2	87,9
0,1	0,01	0,01	203,3	199,4	213,0	–	205,7	199,4	213,0	–
	0,01	0,10	103,3	101,9	104,3	–	143,8	154,8	133,3	–
	0,10	0,10	67,5	72,3	62,2	–	66,8	72,3	62,2	–

Полученные результаты согласуются с теорией. Сравнение оценок $T_-^{(k)}$, $T_+^{(k)}$ с оценками Вальда показывает, что, когда «выбросов» нет или уровень искажений невысок, предпочтительнее использовать оценки $T_-^{(k)}$, $T_+^{(k)}$, так как оценки Вальда занижают среднюю длину последовательности. Анализ результатов для модели с искажениями показывает, что оценки $T_-^{(k)}$, $T_+^{(k)}$ в этом случае недостаточно точны («верхняя граница» меньше «нижней») и нужно использовать аппроксимацию с меньшим значением параметра δ.

Работа выполнена при финансовой поддержке БГУ (грант № 2005883 для студентов и аспирантов).

1. Вальд А. Последовательный анализ. М.. 1960.
2. Huber P. Robust Statistics. New York, 1981.
3. Kharin A., Kishylau D. // Austrian J. of Statistics. 2005. 34.
4. Kharin A. // Ibid. 2002. Vol. 31. № 4.
5. Siegmund D. Sequential Analysis. Tests and Confidence Intervals. New York, 1985.

Поступила в редакцию 27.06.05.

Дмитрий Валерьевич Кишилов - аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики А.Ю. Харин.