где $\tilde{H} = \left[\frac{H_1 G^i}{i=0, k-1}\right]$,

УДК 519.10

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, О.В. КАРЕЛКИНА, КГ. КУЗЬМИН

О РАДИУСЕ КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМИ ДОПЛАТАМИ

A formula of the quasistability radius for the vector integer programming problem with fixed surcharges has been found.

Рассмотрим векторный вариант известной (см., например, [1]) задачи целочисленного линейного программирования с фиксированными доплатами:

$$f(x, C, D) = (f_1(x, C_1, D_1), f_2(x, C_2, D_2), \ldots, f_m(x, C_m, D_m)) \to \min_{x \in X},$$

где $f_i(x, C_i, D_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_j)$,

$$c_{ij}(x_j) = \begin{cases} c_{ij}x_j + d_{ij} & \text{при} \quad x_j > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x_j = 0, \end{cases}$$

$C=[c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D=[d_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \subset \mathbb{Z}^n_+ = \{z \in \mathbb{Z}^n : z_j \geq 0, \ j \in N_n\}$, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $1 < |X| < \infty$, $C_i(D_i)$ – i-я строка матрицы $C(D)$.

Для любого натурального числа p в пространстве $\mathbb{R}^p$ зададим две метрики l_1 и l_∞, т. е. нормами вектора $y=(y_1, y_2, \ldots y_p)$ будем считать соответственно числа

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |y_j|, \quad \|y\|_\infty = \max\{|y_j| : j \in N_p\}.$$

Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из всех ее компонент.

Пусть $\varepsilon > 0$. В зависимости от выбранной метрики (l_1 или l_∞) в пространстве параметров $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$ векторного критерия $f(x, C, D)$ будем возмущать элементы пары (C, D) путем сложения этой пары с парами (C', D') соответственно из множеств

$$\Omega_1(\varepsilon)=\{(C', D')\in \mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}: \|C'\|_1+\|D'\|_1<\varepsilon\},$$

$$\Omega_\infty(\varepsilon)=\{(C', D')\in \mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}: \|C'\|_\infty<\varepsilon, \|D'\|_\infty<\varepsilon\}.$$

Как обычно [2-4], радиусом квазиустойчивости многокритериальной задачи $Z^m(C, D)$ поиска множества Парето

$$P^m(C, D)=\{x\in X: \nexists x'\in X \quad (g(x, x', C, D)\le 0_{(m)},\ g(x, x', C, D)\ne 0_{(m)})\},$$

где $g(x, x', C, D)=(g_1, g_2, \ldots, g_m)$, $g_i=g_i(x, x', C_i, D_i)=f_i(x', C_i, D_i)-f_i(x, C_i, D_i)$, $0_{(m)}=(0, 0, \ldots, 0)\in\mathbf{R}^m$, будем называть число

$$\rho^m(C, D)=\begin{cases}\sup\Xi, \text{ если } \Xi\ne\varnothing,\\ 0 \qquad \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\Xi=\{\varepsilon>0: \forall (C', D')\in\Omega_k(\varepsilon)\ (P^m(C, D)\subseteq P^m(C+C', D+D'))\}$, здесь $k=1$ или $k=\infty$.

Отметим, что ранее в [5] были получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости задачи $Z_m(C, D)$.

Воспользовавшись очевидными неравенствами

$$g_i(x, x', C_i, D_i)\le(\|C_i\|_1+\|D_i\|_1)\|x-x'\|_\infty,$$

$$g_i(x, x', C_i, D_i)\le\|C_i\|_\infty\|x-x'\|_1+\|D_i\|_\infty\|\tilde{x}-\tilde{x}'\|_1,$$

где $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{x}_j=1$, если $x_j>0$; $\tilde{x}_j=0$, если $x_j=0$, и, положив $g_i^+(x, x', C_i, D_i)=\max\{0, g_i(x, x', C_i, D_i)\}$, легко доказать следующие леммы.

Лемма 1. $x, x'\in X, x\ne x'$. *Для всякого числа* φ *с условием*

$$0<\varphi\|x-x'\|_\infty\le\sum_{i\in N_m}g_i^+(x, x', C_i, D_i)$$

и любой возмущающей $(C', D')\in\Omega_1(\varphi)$ *справедливо соотношение*

$$x'\notin P^m(x, C+C', D+D').$$

Лемма 2. *Если для некоторого индекса* $i\in N_m$ *справедливо неравенство*

$$g_i(x, x', C_i, D_i)>\max\{\|C_i'\|_\infty, \|D_i'\|_\infty\}(\|x-x'\|_1+\|\tilde{x}-\tilde{x}'\|_1),$$

то $g_i(x, x', C_i+C_i', D_i+D_i')>0$.

Теорема. *При любом натуральном числе m для радиуса квазиустойчивости* $\rho^m(C, D)$ *задачи* $Z^m(C, D)$ *справедлива формула*

$$\rho^m(C, D)=\min_{x\in P^m(C, D)}\ \min_{x'\in X\setminus\{x\}}\begin{cases}\sum\limits_{i\in N_m}\dfrac{g_i^+(x, x', C_i, D_i)}{\|x-x'\|_\infty}, & \text{если метрика } l_1,\\ \max\limits_{i\in N_m}\dfrac{g_i(x, x', C_i, D_i)}{\|x-x'\|_1+\|\tilde{x}-\tilde{x}'\|_1}, & \text{если метрика } l_\infty.\end{cases}$$

Схема доказательства. Очевидно, что в правой части последней формулы стоят неотрицательные числа, которые для краткости обозначим φ_1 и φ_∞.

Случай l_1. Вначале докажем, что $\rho^m(C, D)\le\varphi_1$. Если $\varphi_1=0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\varphi_1>0$. Тогда для любых векторов $x\in P^m(C, D)$, $x'\in X\setminus\{x\}$ имеем

$$0<\varphi\|x-x'\|_\infty\le\sum_{i\in N_m}g_i^+(x, x', C_i, D_i).$$

Поэтому на основании леммы 1 для любой пары $(C', D')\in\Omega_1(\varphi_1)$ вектор $x'\notin P^m(x, C+C', D+D')$. Следовательно, $\rho^m(C, D)\ge\varphi_1$

Далее покажем, что $\rho^m(C, D)\le\varphi_1$. Пусть $\varepsilon>\varphi_1$. Тогда существуют такие векторы $x\in P^m(C, D)$ и $x'\in X\setminus\{x\}$, что

$$\varphi_1\|x-x'\|_\infty=\sum_{i\in N_m}g_i^+(x, x', C_i, D_i).$$

Поэтому найдутся такие положительные числа η_i, что

$$\eta_i \|x - x'\|_\infty > g_i^+(x, x', C_i, D_i), \ i \in N_m,$$
$$\varepsilon > \sum_{i \in N_m} \eta_i > \varphi_1 .$$

Воспользовавшись этими соотношениями и построив пару $(C', D') \in \Omega_1(\varepsilon)$, $C' = [c'_{ij}]$, $D' = [d'_{ij}]$ по правилам

$$c'_{ij} = \begin{cases} \eta_i \operatorname{sign}(x_q - x'_q), & \text{если } i \in N_m, \ j = q, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$d'_{ij} = 0, \ i \in N_m, j \in N_n,$$

где $q = \arg\max\{|x_j - x'_j| : j \in N_n\}$, после несложных преобразований получаем

$$g_i(x, x', C_i + C'_i, D_i + D'_i) < 0, \quad i \in N_m,$$

т. е. $x \notin P^m(C+C', D+D')$. Следовательно, $\rho^m(C, D) \leq \varphi_1$

Случай l_∞. Сначала докажем неравенство $\rho^m(C, D) \geq \varphi_\infty$. Не исключая общности, будем предполагать, что $\varphi_\infty > 0$. Для любой пары $(C', D') \in \Omega_\infty(\varphi_\infty)$ и любых векторов $x \in P^m(C, D)$ и $x' \in X \setminus \{x\}$ существует такой индекс $l \in N_m$, что

$$\frac{g_l(x, x', C_l, D_l)}{\|x - x'\|_1 + \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|_1} \geq \varphi_\infty > \max\{\|C'\|_\infty, \|D'\|_\infty\}.$$

Тогда согласно лемме 2 имеем $g_l(x, x', C_l + C'_l, D_l + D'_l) > 0$. Поэтому $x \in P^m(C+C', D+D')$. Следовательно, $\rho^m(C, D) \geq \varphi_\infty$.

Далее покажем, что $\rho^m(C, D) \leq \varphi_\infty$. Пусть $\varepsilon > \varphi_\infty$. Тогда существуют такие векторы $x \in P^m(C, D)$ и $x' \in X \setminus \{x\}$, что

$$\forall i \in N_m \quad (\varepsilon > \varphi_\infty \geq \frac{g_i(x, x', C_i, D_i)}{\|x - x'\|_1 + \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|_1}).$$

Пусть $C' = [c'_{ij}]$, $D' = [d'_{ij}]$ - матрицы с элементами $c'_{ij} = \alpha \operatorname{sign}(x_j - x'_j)$, $d'_{ii} = \alpha \operatorname{sign}(\tilde{x}_i - \tilde{x}'_i)$, где $\varepsilon > \alpha > \varphi_\infty$. Тогда легко убеждаемся, что $(C', D') \in \Omega_\infty(\varepsilon)$, $g_i(x, x', C_i + C'_i, D_i + D'_i) < 0$, $i \in N_m$, т. е. $x \notin P^m(C+C', D+D')$. Следовательно, $\rho^m(C, D) \leq \varphi_\infty$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические структуры 29» и межвузовской программы «Фундаментальные и прикладные исследования» Республики Беларусь.

1. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М., 1969.
2. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. // Optimization. 2002. Vol. 51. № 4. P. 645.
3. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А. М. // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79.
4. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. // Докл. Академии наук / РАН. 2005. Т. 401. №6. С. 733.
5. Bukhtoyarov S.E., Emelichev V.A. // Researches in numerical analysis and optimization. Kishinev, 2001. Vol. 3. № 2. P. 152.

Поступила в редакцию 13.06.05.

Владимир Алексеевич Емеличев - доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики.

Ольга Владимировна Карелкина - студентка 5-го курса механико-математического факультета.

Кирилл Геннадьевич Кузьмин - студент 5-го курса механико-математического факультета.