1

.

УДК 517.5

Е.В. ИГНАТЬЕВА

КАСАТЕЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ В ТОЧКЕ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА

In this paper we study tangential convergence at a point of generalized Poisson integrals of functions defined on homogeneous type space and having a certain regularity. We give sharp conditions of relationship between the geometry of the region, inside which the convergence holds, and the character of local smoothness of a function.

В данной работе рассматривается сходимость в точке для обобщенных интегралов Пуассона

на пространстве однородного типа X вдоль области

$$Pf(x,t)=\int_X p(x,y,t)f(y)\,d\mu(y)$$

Геометрия этой области определяется поведением функции е в нуле.

В случае
$$\Gamma_\varepsilon(x_0)=\{(x,t)\in X\times(0,1]:d(x,x_0)<\varepsilon(t)\}. \tag{1}$$

$\varepsilon(t)=t$ такие вопросы являются классическими и восходят к знаменитой теореме Фату (см., например, [1]). В частности, известно, что в каждой точке Лебега для интеграла Пуассона для полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$ или единичного шара в $\mathbb{R}^n$ имеет место некасательная сходимость. Если же $\lim\limits_{t\to+0} t/\varepsilon(t)=0$, то область (1) является «касательной». Вопросы сходимости вдоль таких областей начали изучаться сравнительно недавно (историю задачи и обзор результатов см., например, в [2, 3]). Исследованию касательной сходимости в точке для обобщенных интегралов Пуассона была посвящена статья [4], в которой рассматривались функции на пространстве с квазиметрикой d и мерой μ с ограничениями типа локальной гладкости первого порядка.

Целью нашей работы является усиление результатов [4] в нескольких направлениях. Во-первых, мы ослабим условия на меру μ (в [4] использовалось условие $\mu(B(x,t))\approx t^\gamma(\gamma>0)$, которое существенно сужает класс мер, обычно рассматриваемых в контексте пространств однородного типа). Во-вторых, мы рассмотрим функции, обладающие локальной гладкостью произвольного порядка, а не только первого, как это было в [4]. Для точных формулировок приведем необходимые определения.

Пусть X - локально компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d. Последнее означает, что функция $d: X\times X\to[0,\infty)$ удовлетворяет условиям:
$$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y,\ d(x,y)=d(y,x),$$

существует такое число $a_d \ge 1$, что $d(x, y) \le a_d[d(x, z)+d(z, y)]$ для всех $x, y, z \in Z$, и семейство шаров $B(x, t)=\{y \in X: d(x, y)<t\}$ образует базу окрестностей топологии X.

Пусть еще μ - положительная борелевская мера на X со свойством удвоения $\mu(B(x, 2t)) \le c\mu(B(x, t))$, $x \in X$, $t>0$. Легко видеть, что тогда

$$\mu(B(x, s)) \le c(s/t)^\gamma \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad 0<t<s \tag{2}$$

(можно взять $\gamma=\log_2 c$). Тройку (X, d, μ) называют пространством однородного типа [5].

Пусть $\Omega(\beta)$ - класс возрастающих функций $\omega:(0, 1] \to (0, 1]$ таких, что $\omega(1)=1$, $\omega(t)t^{-\beta}$ почти убывают на $(0, 1]$. Если еще $\omega(+0)=0$, то пишем $\omega \in \Omega_0(\beta)$. Определим также $\Omega(\infty) = \bigcup_{\beta>0} \Omega(\beta)$. При условии однородности $\mu(B(x, t)) \approx t^\gamma (\gamma>0)$, существенно более сильном, чем (2), и при условиях

$$\exists \alpha > 0 \quad |p(x, y, t)| \le ct^\alpha [d(x, y)+t]^{-\gamma-\alpha}, \quad x, y \in X, \ t \in (0, 1], \text{ и}$$

$$\int_X p(x, y, t)\, d\mu(y) = 1, \quad x \in X, \ t \in (0, 1],$$

на «ядро Пуассона» $p \in C(X \times X \times (0, 1])$ в [4] было доказано следующее утверждение. *Пусть* $\eta \in \Omega(1)$, $\varepsilon \in \Omega_0(1)$ *таковы, что* $\sup_{0<t\le 1} \eta(t) \left(\frac{t}{\varepsilon^{-1}(t)} \right)^\gamma < +\infty$. *Тогда если* $x_0 \in X$ *и* *фун* $f \in L^1_\mu(X)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{\eta(t)\mu(B(x_0, t))} \int_{B(x_0, t)} |f(x) - f(x_0)|\, d\mu(x) = 0,$$

то $\Gamma_\varepsilon(x_0) - \lim Pf = f(x_0)$.

Рассмотрим более широкий класс P ядер $p \in C(X \times X \times (0, 1])$, удовлетворяющих условиям

$$\int_X p(x, z, t)\, d\mu(z) = 1, \qquad \int_{d(x, z)<t} |p(x, z, t)|\, d\mu(z) \le c,$$

$$\exists \alpha > 0 \quad |p(x, y, t)| \le ct^\alpha [(\mu(B(x, d(x, y))))^{1/\gamma} + t]^{-\gamma-\alpha}$$

при всех $x, y \in X$, $t \in (0, 1]$.

Будем также считать, что вместе с (2) для меры μ и некоторой точки $x_0 \in X$ выполняется условие

$$\mu(B(x_0, t)) \ge ct^\gamma, \quad t > 0. \tag{3}$$

Отметим, что если X компактно, то (3) следует из (2). В общей же ситуации оно автоматически выполняется лишь для небольших t. Нетрудно убедиться, что из (2) и (3) вытекает неравенство

$$\mu(B(x, t)) \ge ct^\gamma \quad \text{при всех} \quad t > 0, \ x \in B(x_0, 1). \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), *функция* $f \in L^1_\mu(X)$ *непрерывна в* $x_0 \in X$, $p \in \mathbf{P}$. *Тогда*

$$\lim_{x \to x_0,\, t \to +0} Pf(x, t) = f(x_0).$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|Pf(x, t) - f(x_0)| \le \int_X |f(y) - f(x_0)| |p(x, y, t)| d\mu(y) = I.$$

В силу непрерывности функции / в точке x_0 для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $y \in B(x_0, \delta)$

$$|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Будем считать, что $d(x_0, x)<\delta/(2a_d)$. Тогда $B(x, \delta/(2a_d))\subset B(x_0, \delta)$ и, следовательно, для всех $y\in B(x, \delta_1)$, где $\delta_1=\delta/(2a_d)$, выполнено неравенство (5). Далее разобьем интеграл I на два

$$I=\left(\int\limits_{d(x,\,y)<\delta_1}+\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}\right)|f(y)-f(x_0)|\,|p(x,y,t)|\,d\mu(y)=I_1+I_2$$

и определим номер n из неравенств $2^n t<\delta_1\leq 2^{n+1}t$. Тогда

$$I_1\leq\varepsilon\int\limits_{d(x,\,y)<t}|p(x,y,t)|\,d\mu(y)+\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{2^k t\leq d(x,\,y)<2^{k+1}t}|p(x,y,t)|\,d\mu(y)\leq$$

$$\leq c\varepsilon+c\varepsilon t^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{2^k t\leq d(x,\,y)<2^{k+1}t}[(\mu(B(x,d(x,y))))^{1/\gamma}+t]^{-\gamma-\alpha}\,d\mu(y)\leq$$

$$\leq c\varepsilon+c\varepsilon t^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}(\mu(B(x,2^k t)))^{-\alpha/\gamma}\leq c\varepsilon+c\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}\leq c\varepsilon$$

(была использована оценка (4)). Далее

$$I_2\leq\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}|p(x,y,t)|\,|f(x_0)|\,d\mu(y)+\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}|p(x,y,t)|\,|f(y)|\,d\mu(y). \tag{6}$$

$$\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}|f(x_0)|\,|p(x,y,t)|\,d\mu(y)\leq|f(x_0)|\,t^{\alpha}\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}\frac{d\mu(y)}{[\mu(B(x,d(x,y)))]^{1+\alpha/\gamma}}\leq$$

$$\leq t^{\alpha}\,|f(x_0)|\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^k\delta_1\leq d(x,\,y)\leq 2^{k+1}\delta_1}\frac{d\mu(y)}{[\mu(B(x,2^k\delta_1))]^{1+\alpha/\gamma}}\leq ct^{\alpha}\delta_1^{-\alpha}\,|f(x_0)|\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}.$$

Оценим второе слагаемое справа в (6).

$$\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}|f(y)|\,|p(x,y,t)|\,d\mu(y)\leq ct^{\alpha}\int\limits_{d(x,\,y)\geq\delta_1}\frac{|f(y)|\,d\mu(y)}{[cd(x,y)+t]^{\gamma+\alpha}}\leq c\frac{t^{\alpha}}{\delta_1^{\alpha+\gamma}}\|f\|_1 .$$

Из последних двух неравенств получаем $I_2\leq ct^{\alpha}\delta_1^{-\alpha-\gamma}\left(\|f\|_1+|f(x_0)|\right)$ и за счет выбора t можем сделать I_2 сколь угодно малым.

Теорема 1. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), $p\in\mathbf{P}$, *и для* $\eta\in\Omega(\infty)$, $\varepsilon\in\Omega_0$ (1) *выполнено условие*

$$\sup_{0<t\leq 1}\frac{\eta(t)}{\left(\varepsilon^{-1}(t)\right)^{\gamma}}\mu(B(x_0,t))<+\infty. \tag{7}$$

Тогда если для $f\in L^1_{\mu}(X)$, $x_0\in X$, *существует такая функция* $T_{x_0}\in L^1_{\mu}(X)$, *непрерывная в точке* x_0, *что*

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\eta(t)\mu(B(x_0,t))}\int\limits_{B(x_0,\,t)}|f(x)-T_{x_0}(x)|\,d\mu(x)=0, \tag{8}$$

то $\Gamma_{\varepsilon}(x_0)-\lim Pf=T_{x_0}(x_0)$.

Доказательство. Пусть $(x,t)\in\Gamma_{\varepsilon}(x_0)$. Рассмотрим

$$|Pf(x,t)-T_{x_0}(x_0)|=|Pf(x,t)-PT_{x_0}(x,t)+PT_{x_0}(x,t)-T_{x_0}(x_0)|\leq$$

$$\leq|Pf(x,t)-PT_{x_0}(x,t)|+|PT_{x_0}(x,t)-T_{x_0}(x_0)|.$$

В силу леммы 1 второе слагаемое стремится к нулю при $t\to+0$. Рассмотрим первое слагаемое

$$|Pf(x,t)-PT_{x_0}(x,t)|=\left|\int\limits_X p(x,y,t)f(y)\,d\mu(y)-\int\limits_X p(x,y,t)T_{x_0}(y)\,d\mu(y)\right|=$$

$$= \left| \int_X \Delta(y) p(x,y,t) \chi_{B(x_0,\rho)} d\mu(y) + \int_X \Delta(y) p(x,y,t) \left(1 - \chi_{B(x_0,\rho)}\right) d\mu(y) \right|,$$

где $\Delta(y)=f(y)-T_{x_0}(y)$, а $\chi_{B(x_0,\rho)}$ - характеристическая функция шара радиуса $\rho>0$ (ρ будет выбрано ниже) с центром в точке x_0. Тогда

$$| Pf(x,t) - PT_{x_0}(x,t) | \le$$
$$\le \int_{B(x_0,\rho)} | \Delta(y) || p(x,y,t) | d\mu(y) + \left| P\left[(f - T_{x_0})(1 - \chi_{B(x_0,\rho)}) \right](x,t) \right| = I_1 + I_2.$$

Так как функция $(f - T_{x_0})(1 - \chi_{B(x_0,\rho)})$ равна нулю в шаре $B(x_0, \rho)$, то второе слагаемое стремится к нулю при $t \to +0$ по лемме 1.

Для оценки первого слагаемого рассмотрим возрастающую функцию

$$\omega(\delta) = \sup_{0<t<\delta} \frac{1}{\eta(t)\mu(B(x_0,t))} \int_{B(x_0,t)} | f(y) - T_{x_0}(y) | d\mu(x). \qquad (9)$$

В силу (9) $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$ и найдется функция $\omega_* \in \Omega_0$ (1) такая, что $\omega_*(\delta) \ge \omega(\delta)$. Тогда

$$I_1 = \left(\int_{d(x_0,y)<4a_d\varepsilon(t)} + \int_{4a_d\varepsilon(t)\le d(x_0,y)<\rho} \right) |\Delta(y)| |p(x,y,t)| d\mu(y) = I_{11} + I_{12}.$$

$$I_{11} \le ct^{\alpha} \int_{d(x_0,y)\le 4a_d\varepsilon(t)} |\Delta(y)| \, |[(\mu(B(x,d(x,y))))^{1/\gamma} + t]^{-\gamma-\alpha} d\mu(y) \le$$
$$\le ct^{-\gamma} \eta(4a_d\varepsilon(t)) \mu(B(x_0, 4a_d\varepsilon(t))) \omega(4a_d\varepsilon(t)) \le c\omega_*(\varepsilon(t)).$$

Предпоследнее неравенство следует из определения функции w (9), а последнее - из условия (7). Далее обозначим через $k_1=[\log_2(\varepsilon(t)/t)]+2$, $k_2=[\log_2(\rho/(a_d t))]$, тогда

$$I_{12} \le \sum_{k=k_1}^{k_2} \int_{a_d 2^k t < d(x_0,y) \le a_d 2^{k+1} t} \frac{ct^{\alpha}}{[(\mu(B(x,d(x,y))))^{1/\gamma} + t]^{\gamma+\alpha}} |\Delta(y)| d\mu(y).$$

Если $y \in \{ z : a_d 2^k t < d(x_0, z) \le a_d 2^{k+1} t \}$, то $d(x,y) \ge 2^{k-1} t$ и

$$I_{12} \le \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{ct^{\alpha}}{(\mu(B(x, 2^{k-1}t)))^{1+\alpha/\gamma}} \int_{B(x_0,\, a_d 2^{k+1} t)} |\Delta(y)| d\mu(y) \le$$
$$\le c\omega(2\rho)\eta(\rho) \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{t^{\alpha} \mu B(x_0, a_d 2^{k+1} t)}{(\mu B(x, 2^{k-1}t))^{1+\alpha/\gamma}} \le c\omega_*(\rho)\eta(\rho) \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{2^{-k\alpha} \mu B(x_0, a_d 2^{k+1} t)}{\mu B(x, 2^{k-1} t)}.$$

Так как $(x,t) \in \Gamma_{\varepsilon}(x_0)$, то $B(x_0, a_d 2^{k+1} t) \subset B(x, a_d^2 2^{k+2} t)$ и

$$I_{12} \le c\omega_*(\rho)\eta(\rho) \sum_{k=k_1}^{k_2} 2^{-k\alpha} \left(8a_d^2 \right)^{\gamma} \le c\omega_*(\rho)\eta(\rho),$$

$$I_1 \le c(\omega_*(\varepsilon(t)) + \omega_*(\rho)\eta(\rho)).$$

Выберем ρ так, чтобы второе слагаемое было малым. Тогда выбором t можно добиться и малости первого слагаемого. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 1 обобщает приведенное в начале работы утверждение из [4] по нескольким направлениям. Во-первых, мы не требуем однородности меры μ, во-вторых, наши условия на ядро p являются более общими, в-третьих, функция η, определяющая характер локальной гладкости для f, может иметь любой порядок, не выше некоторого степенного, а не только не выше первого. Последнее обобщение позволяет более гибко классифицировать локальные свойства функции/и расширить класс областей Γ_{ε}.

Далее установим, что связь между геометрией области $\Gamma_\varepsilon(x_0)$ (определяемой функцией $\varepsilon\in\Omega_0$ (1)) и локальной гладкостью функции (определяемой функцией $\eta\in\Omega(\infty)$), которая выражается условием (7) в теореме 1, является точной.

Предположим, что мера μ удовлетворяет условию однородности

$$t^\gamma/\theta \le \mu(B(x,t)) \le \theta t^\gamma,\ \gamma>0, \theta>1,$$

и $p(x,y,t)=C(x,t)t^\alpha[(\mu(B(x,d(x,y))))^{1/\gamma}+t]^{-\gamma-\alpha}$, где нормирующий множитель $C(x,\ t)$ определяется равенством $\int\limits_X p(x,y,t)\,d\mu(y)=1$. Легко видеть, что при этом $0<c_1\le C(x,t)\le c_2$ для всех $x\in X$ и $t>0$.

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon\in$

$$\sup_{0<t\le 1}\frac{\eta(t)}{\left(\varepsilon^{-1}(t)\right)^\gamma}\mu(B(x_0,t))=+\infty. \tag{10}$$

Тогда существ

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\eta(t)\mu(B(x_0,t))}\int\limits_{B(x_0,t)}|f(x)|\,d\mu(x)=0, \tag{11}$$

для которой $\Gamma_\varepsilon(x_0)-\overline{\lim}\,Pf_0=+\infty$.

Доказательство. Будем предполагать, что $\lim\limits_{t\to+0}\varepsilon(t)/t=+\infty$ (если это не так, то $\varepsilon(t)\approx t$ и рассуждения будут проще). Условие (10) равносильно существованию последовательн

$$a_k=\frac{t_k^\gamma}{\eta(\varepsilon(t_k))\mu(B(x_0,\varepsilon(t_k)))}\to+0.$$

Последовательность $t_k\downarrow 0$ можно считать такой редкой, что

$$t_{k+1}/t_k\le 1/(k+1)^3,\ \ \varepsilon_{k+1}/\varepsilon_k\le 1/(4a_d\theta^{2/\gamma}),\ \text{ где }\ \varepsilon_k=\varepsilon(t_k),$$

и, кроме того, шары $B_k=B(x_k,\ t_k)$ не пересекаются, и $x_0\notin B_k$. Здесь точка x_k выбрана так, чтобы $\varepsilon_k/(4\theta^{2/\gamma})<d(x_0,x_k)<\varepsilon_k/2$.

Положим $b_k=a_k^{-1/2}$ и о функцию f_0 равенством

$$f_0=\sum_{i=1}^\infty \min(b_i,i)\chi_{B_i}$$

(χ_E - характеристическая функция множества E).

Пусть $0<t\le\varepsilon_1$ и k - наименьший номер, для которог о $B_k\cap B(x_0,\ t)\ne\varnothing$. Тогда $t\ge\varepsilon_k/(8a_d)$ и можно записать

$$\frac{1}{\eta(t)\mu(B(x_0,t))}\int\limits_{B(x_0,t)}|f_0(x)|\,d\mu(x)\le\frac{c}{\eta(\frac{\varepsilon_k}{8a_d})\mu(B(x_0,\frac{\varepsilon_k}{8a_d}))}\sum_{i=k}^\infty\min(b_i,i)\,t_i^\gamma\le$$

$$\le\frac{ct_k^\gamma}{\eta(\varepsilon_k)\mu(B(x_0,\varepsilon_k))}\left(b_k+\sum_{i=k+1}^\infty\frac{1}{i^2}\right)\le ca_k\left(b_k+\frac{1}{k}\right)\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

В то же время $d(x_0,x_k)\le\frac{1}{2}\varepsilon_k<\varepsilon(t_k)$, $(x_k,t_k)\in\Gamma_\varepsilon(x_0)$ и

$$Pf_0(x_k,t_k)=C(x_k,t_k)\int\limits_X\frac{t_k^\alpha}{[(\mu(B(x_k,d(x_k,y))))^{1/\gamma}+t_k]^{\gamma+\alpha}}f_0(y)\,d\mu(y)\ge$$

$$\ge ct_k^\alpha\int\limits_{B(x_k,t_k)}\frac{f_0(y)}{[\mu(B(x_k,d(x_k,t_k)))^{1/\gamma}+t_k]^{\alpha+\gamma}}d\mu(y)\ge c\min(b_k,k)t_k^\alpha t_k^\gamma t_k^{-\gamma-\alpha}\to+\infty\left(k\to\infty\right),$$

следовательно, $\Gamma_\varepsilon(x_0)-\overline{\lim}\,Pf_0=+\infty$

1. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973.
2. Nagel A., Rudin W., Shapiro J. // Ann. Math. 1982. Vol. 116. №2. P. 331.
3. Кротов В.Г.//Мат. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 230.
4. Кротов В.Г., Королева А. А.// Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 1.С. 83.
5. Coifman R.R., Weiss G.//Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 44. № 4. P. 569.

Поступила в редакцию 28.04.05.

Елизавета Вадимовна Игнатьева - аспирант кафедры математических методов теории управления. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор, заведую-щий кафедрой математических методов теории управления В.Г. Кротов.

```
StrainDisplacementRelations[ε,u,Cylindrical[r,φ,z]][[1]]
ε[r, r][r, φ, z] == Dt[u[r][r, φ, z], r]
```