

$$H \in \tau^*(R_1)$$

$$R_1 \subseteq B.$$

$$G/N=RN/N=R_1N/N\subseteq BN/N, \text{ т. е. } LIN=BNIN.$$

τ

$$X^{\tau}=(G\in Y|H\in\tau(G)$$

τ

$\chi^{\tau*}$

X^{τ^*}

$$G/M_G \in X^{\tau^*}$$

τ^*

$N_G^{\tau^*}$

$$R \in X^{\tau*}.$$

$N^{\tau*}_G$

$$R \subseteq L \subseteq G \quad L \in X^{\tau*}.$$

$$H \in \tau^*(L)$$

$H \subset L$.

τ^*

$$L \subset R$$

X^{τ^*}

$$N_{G/N}^{\tau^*}$$

X^{τ^*}

X^{τ^*}

$$G=R \in X^{\tau^*}$$

$X^{\tau*}$

УДК 519.872

А.В. КАЗИМИРСКИЙ

ФОРМУЛА ЛИТТЛА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВМАР/SM/1

In this paper, the Little's law for BMAP/SM/1 queue is derived.

Традиционно под формулой Литтла (см. [1]) понимается соотношение $L = \lambda V$, где L - средняя длина очереди в системе в произвольный момент времени, V - среднее время пребывания произвольного требования в системе, λ - средняя интенсивность входящего потока требований. В современной литературе имеется ряд публикаций о формуле Литтла для широкого класса систем обслуживания (см., например, [2]). В то же время, несмотря на почти пятнадцатилетнюю историю исследования систем с групповым марковским потоком требований, сложно найти работы, в которых доказывалась бы выполнимость

формулы Литтла для таких систем. Исключение в данном отношении составляет работа [3], однако предложенное в ней доказательство требует дополнительных уточнений.

Математическая модель

Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с бесконечным буфером. В систему поступает групповой марковский поток требований (ВМАР-поток), впервые рассмотренный в [4]. Он определяется следующим образом. Пусть есть цепь Маркова $v_i \geq 0$, с пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$. Время пребывания процесса v_i в состоянии v имеет показательное распределение с параметром λ_v , $v = 0, W$. После окончания этого времени с вероятностью $d_k(v, r)$, $k \geq 0$, в систему поступает группа из k требований, и процесс V , переходит в состояние r , $v, r = 0, W$. Предполагается, что $d_0(v, v) = -\lambda_v$, $v = 0, W$, и $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^W d_k(v, r) = 1$, $v = 0, W$. Интенсивности переходов процесса v_i целесообразно хранить в матрицах D_k , $k \geq 0$, элементы $(D_k)_{v,r}$ которых задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} (D_0)_{v,v} &= -\lambda_v, \quad v = 0, 1, \dots, W, \\ (D_0)_{v,r} &= \lambda_v d_0(v, r), \quad v \neq r, \quad v, r = 0, W, \\ (D_k)_{v,r} &= \lambda_v d_k(v, r), \quad v, r = 0, W, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Средняя интенсивность входящего потока требований задается следующим образом: $\lambda = \theta \sum_{k=1}^{\infty} k D_k \mathbf{1}$, где θ - вектор-строка, который является единственным решением системы линейных уравнений: $\theta \sum_{k=0}^{\infty} D_k = 0$, $\theta \mathbf{1} = 1$, $\mathbf{1}$ - вектор-столбец соответствующей размерности, состоящий из единиц.

Если поступающее требование застаёт обслуживающий прибор незанятым, то немедленно начинается обслуживание данного требования. В противном случае требование помещается в буфер неограниченного размера, где ожидает начала обслуживания. Дисциплина обслуживания типа «первым пришел - первым ушел» (FIFO - First in - First Out). Во многих реальных системах величины времени обслуживания последовательных запросов могут быть взаимозависимыми и распределенными по разным законам. Для моделирования таких процессов используется формализм полумарковских процессов (SM-процессов) обслуживания, состоящий в следующем. Имеется полумарковский случайный процесс n_t , $t \geq 0$, который полностью характеризуется своим пространством состояний $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 1$, и квадратной матрицей $B(t)$ размерности N с компонентами $(B(t))_{n,m}$, называемой полумарковским ядром. Предполагается, что с вероятностью $(B(t))_{n,m}$ время обслуживания требования не превысит t , $t \geq 0$ и после окончания обслуживания состояние процесса n , станет равным m , если в момент начала обслуживания оно было равным n , $n, m = 1, N$.

Среднее время обслуживания требования в системе задается следующим образом: $b_1 = \delta \int_0^{\infty} t dB(t) \mathbf{1}$, где δ - вектор-строка, состоящий из стационарных вероятностей процесса n_t , $t \geq 0$, который определяется как единственное решение следующей системы линейных уравнений: $\delta B(+\infty) = \delta$, $\delta \mathbf{1} = 1$.

Стационарное распределение количества требований в системе

Рассмотрим следующие вероятности:

$$\begin{aligned} p_i(0, n, v) &= \Pr\{i_t = 0, n_t = n, v_t = v\}, \\ p_i(i, n, v, x) &= \Pr\{i_t = i, n_t = n, v_t = v, x_t \leq x\}, \end{aligned}$$

$$i \geq 1, n = \overline{1, N}, v = \overline{0, W}, x \geq 0,$$

где i_t - количество требований в системе, n_t при $i=0$ - текущее состояние управляющего процесса SM-обслуживания, в случае $i \geq 1$ - состояние управляющего процесса SM-обслуживания, при котором начнется обслуживание следующего требования, v_t - состояние управляющего процесса ВМАР-потока, x_t - время до окончания обслуживания требования в момент времени t , $t \geq 0$. Предполагается, что данные вероятности удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{n=1}^N \sum_{v=0}^W \left(p_i(0, n, v) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i(i, n, v, +\infty) \right) = 1.$$

Введем векторы вероятностей:

$$\mathbf{p}_i(0, n) = (p_i(0, n, 0), \dots, p_i(0, n, W)),$$

$$\mathbf{p}(0) = (\mathbf{p}_i(0, 1), \dots, \mathbf{p}_i(0, N)),$$

$$\mathbf{p}_i(i, n, x) = (p(i, n, 0, x), \dots, p(i, n, W, x)),$$

$$\mathbf{p}_i(i, x) = (\mathbf{p}_i(i, 1, x), \dots, \mathbf{p}_i(i, N, x)).$$

Условие существования стационарного распределения длины очереди в системе ВМАР/SM/1 сформулировано в [5]. Для существования стационарного распределения в данной системе необходимо и достаточно выполнения соотношения $\lambda b_1 < 1$. Обозначим векторы стационарных вероятностей:

$$\mathbf{p}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_t(0), \quad \mathbf{p}(i, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_t(i, x),$$

а также их производные и преобразования Лапласа - Стильтеса:

$$\mathbf{p}'(i, x) = d\mathbf{p}(i, x)/dx,$$

$$\mathbf{p}^*(i, s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\mathbf{p}(i, x), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Лемма 1. Векторы $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}^*(i, s)$ являются решениями следующей системы уравнений:

$$\mathbf{p}(0)D_0 + \mathbf{p}'(1, 0) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} s\mathbf{p}^*(i, s) + \sum_{j=1}^i \mathbf{p}^*(j, s)(I_N \otimes D_{i-j}) + \mathbf{p}(0)(B^*(s) \otimes D_i) + \\ + \mathbf{p}'(i+1, 0)(B^*(s) \otimes I_{W+1}) - \mathbf{p}'(i, 0) = 0, \quad i \geq 1, \quad \operatorname{Re} s > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{где } B^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dB(t).$$

Доказательство. Используя Δt -метод для марковских процессов (см. [6]), составим следующие разностные уравнения:

$$p_{i+\Delta}(0, n, v) = p_i(0, n, v)(1 - \lambda_v \Delta) + \sum_{r=0}^W p_i(0, n, r) \lambda_r d_0(r, v) \Delta + p_i(1, n, v, \Delta) + o(\Delta),$$

$$\begin{aligned} p_{i+\Delta}(i, n, v, x) = & (p_i(i, n, v, x) - p_i(i, n, v, \Delta))(1 - \lambda_v \Delta) + \\ & + \sum_{j=1}^i \sum_{r=0}^W p_i(j, n, r, x + \Delta) \lambda_r d_{i-j}(r, v) + \\ & + \sum_{m=1}^N \left(p_i(i+1, m, v, \Delta) + \sum_{r=0}^W p_i(0, m, r) \lambda_r d_i(r, v) \Delta \right) (B(x))_{m,n} + o(\Delta), \\ & i \geq 1, n = \overline{1, N}, v = \overline{0, W}, x \geq 0. \end{aligned}$$

После группировки использованных в данных уравнениях величин в векторы и матрицы получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{t+\Delta}(0) &= \mathbf{p}_t(0)(I_{N(W+1)} + I_N \otimes D_0^\Delta) + \mathbf{p}_t(1, \Delta), \\ \mathbf{p}_{t+\Delta}(i, x) &= (\mathbf{p}_t(i, x + \Delta) - \mathbf{p}_t(i, \Delta))(I_{N(W+1)} + I_N \otimes D_0^\Delta) + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{p}_t(j, x + \Delta)(I_N \otimes D_{i-j}^\Delta) + \mathbf{p}_t(i+1, \Delta)(B(x) \otimes I_{W+1}) + \\ &+ \mathbf{p}_t(0)(B(x) \otimes D_i^\Delta) = 0, \quad i \geq 1, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

После вычитания из левой и правой частей данных уравнений векторов $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(i, x)$ соответственно, деления на Δ и взятия пределов при $\Delta \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ получаются уравнения (1) и (2). ■

Следствие 1. Выполняется соотношение

$$\left(\mathbf{p}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^*(i, 0) \right) (I_N \otimes \mathbf{1}_{W+1}) = \theta. \quad (3)$$

Доказательство. Просуммируем уравнения (1) и (2) и умножим справа на $I_N \otimes \mathbf{1}_{W+1}$, получим

$$\left(\mathbf{p}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^*(i, 0) \right) (I_N \otimes \mathbf{1}_{W+1}) \sum_{k=0}^{\infty} D_k = 0.$$

С учетом условий нормировки

$$\left(\mathbf{p}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^*(i, 0) \right) \mathbf{1} = 1$$

получается (3). ■

Распределение времени пребывания требования в системе

Пусть y_t - случайная величина времени пребывания требования, прибывшего в систему в момент времени $t, t \geq 0$. Определим следующие вероятности:

$$w(n, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr \{ n_{t+y_t+0} = n, y_t \leq x \}, \quad n = 1, \bar{N}, \quad x \geq 0,$$

где n_{t+y_t+0} - состояние управляющего процесса SM-обслуживания сразу после ухода из системы требования, пришедшего в момент времени $t, t \geq 0$. Условие нормировки для данных вероятностей:

$$\sum_{n=1}^N w(n, +\infty) = 1.$$

Сгруппируем введенные вероятности в вектор $\mathbf{w}(x) = (w(1, x), \dots, w(N, x))$ с преобразованием Лапласа - Стильеса $\mathbf{w}^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\mathbf{w}(x), \quad \text{Re } s > 0$.

Лемма 2. Вектор $\mathbf{w}^*(s), \text{Re } s > 0$, вычисляется следующим образом:

$$\lambda \mathbf{w}(s) = \mathbf{p}(0) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \left((B^*(s))^l \otimes D_k \mathbf{1} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^*(i, s) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \left((B^*(s))^{i+l-1} \otimes D_k \mathbf{1} \right). \quad (4)$$

Доказательство. Вероятности прихода требования в составе группы из k требований в промежутке времени $[t; t+\Delta)$ составляют векторы:

$$\mathbf{p}_t(0)(I_N \otimes kD_k)\Delta + o(\Delta), \quad \mathbf{p}_t(i, x)(I_N \otimes kD_k)\Delta + o(\Delta), \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Предполагается, что требование, пришедшее в составе группы размера k , занимает произвольную позицию с вероятностью k^{-1} . Условная вероятность того, что перед пришедшим в момент времени t требованием в буфере находится j требований, включая его самого, выглядит следующим образом:

$$\frac{\mathbf{p}_t(0) \sum_{k=j}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) \Delta + \sum_{i=1}^j \mathbf{p}_t(j, x) \sum_{k=j-i+1}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) \Delta + o(\Delta)}{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbf{p}_t(0) \sum_{k=j}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) + \sum_{i=1}^j \mathbf{p}_t(j, x) \sum_{k=j-i+1}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) \right) \mathbf{1} \Delta + o(\Delta)} \quad (5)$$

После деления числителя и знаменателя выражения (5) на Δ с последующим взятием пределов при $\Delta \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ с учетом (3) выражение (5) преобразуется к виду

$$\lambda^{-1} \left(\mathbf{p}(0) \sum_{k=j}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) + \sum_{i=1}^j \mathbf{p}(j, x) \sum_{k=j-i+1}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) \right), \quad j \geq 1.$$

Для того чтобы получить (4), применим метод катастроф (см., например, [7]). Предположим, что с некоторой интенсивностью $s, s > 0$, поступает поток так называемых катастроф. Тогда вектор Лапласа - Стильеса $\mathbf{w}^*(s)$ состоит из вероятностей того, что за время пребывания требования не наступит ни одной катастрофы, а матрица $(B^*(s))$ — из вероятностей того, что за время обслуживания $j, j \geq 1$, требований подряд не наступит ни одной катастрофы. Изначально полагается, что s — действительное число, но общеизвестно, что для любой функции действительной переменной может быть построено аналитическое продолжение в комплексной плоскости, поэтому s можно положить комплексным, и тогда условие $s > 0$ преобразуется в $\operatorname{Re} s > 0$.

С учетом сказанного можно записать формулу полной вероятности для $\mathbf{w}^*(s)$:

$$\mathbf{w}^*(s) = \lambda^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbf{p}(0) \sum_{k=j}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) + \sum_{i=1}^j \mathbf{p}(j, x) \sum_{k=j-i+1}^{\infty} k^{-1} (I_N \otimes kD_k) \right) \left((B^*(s))^j \otimes \mathbf{1}_{w+1} \right), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Отсюда после изменения порядка суммирования получается (4). ■

Теорема. Преобразование Лапласа - Стильеса $\mathbf{w}^*(s)$ вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{w}^*(s) \mathbf{1} = \mathbf{1} - \lambda^{-1} s \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^*(i, s) \sum_{j=1}^{i-1} \left((B^*(s))^j \mathbf{1}_{N+1} \otimes \mathbf{1}_{w+1} \right), \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (6)$$

Доказательство. После умножения левой и правой частей каждого уравнения системы (2) для $i \geq 1$ справа на $\sum_{j=1}^{i-1} \left((B^*(s))^j \mathbf{1}_{N+1} \otimes \mathbf{1}_{w+1} \right)$ и нескольких изменений порядка суммирования получается выражение

$$\lambda \mathbf{w}^*(s) \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}'(1, 0) \mathbf{1} - s \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}^*(i, s) \sum_{j=1}^{i-1} \left((B^*(s))^j \mathbf{1}_{N+1} \otimes \mathbf{1}_{w+1} \right). \quad (7)$$

Подставляя $s=0$ в данное уравнение и учитывая условие нормировки $\mathbf{w}^*(0) \mathbf{1} = \mathbf{1}$, имеем $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}'(i, 0) \mathbf{1}$. После подстановки этого выражения в (7) получается (6). ■

Следствие 2. Для рассматриваемой системы выполняется формула Литтла $L = \lambda V$, где $V = -d\mathbf{w}^*(s)/ds|_{s=0} \mathbf{1}$ — среднее время пребывания требования в системе, $L = \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbf{p}^*(i, 0) \mathbf{1}$ — среднее число требований в системе в произвольный момент времени.

1. Little J.D.C. // Operations Research. 1961. 9 (3). P. 383.

2. Stidham S.Jr. // Ibid. 1974. 22 (2). P. 417.

3. Takine T. // Queueing Systems. 2001. 37 (1/3). P. 31.
4. Lucantoni D. // Stochastic Models. 1991. 7. P. 1.
5. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн., 2000.
6. Гнеденко Б.В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М, 1987.
7. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., 1966.

Поступила в редакцию 22.04.05.

Арсений Викторович Казимирский - аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, заведующий лабораторией прикладно-го вероятностного анализа А.Н. Дудин.

$$1/2 < h-r \leq 1 \text{ и } h-r=1/2, \text{ то } |B_{h,r}|$$

$$h-r \in [1/2, 1].$$

$$(B_{h,r}) \quad t_n = \sum_{k=0}^n \left[\cos \frac{(k+r)\pi}{2(n+h)} \right] a_k. \quad (1)$$

$$M_n \rightarrow M \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$(C, 1) \quad M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k. \quad (2)$$

$$(N) \quad g_n = \frac{s_0 + s_2 + \dots + s_{n-1}}{n+1} + \frac{s_n}{2(n+1)}. \quad (3)$$

$$|B_{h,r}|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| = O(1); \quad t_{n-1} = 0. \quad (4)$$

.....