УДК 519.853

Методы корректировки параметров дробно-линейной целевой функции в задачах нелинейного программирования

Л.А. Пилипчук
Белорусский государственный университет

В статье рассматриваются методы корректировки параметров дробно-линейной целевой функции в задачах нелинейного программирования. Построена математическая модель обратной задачи для определения изменений параметров целевой функции в соответствии с выбранной нормой.

Цель статьи – построение математической модели обратной задачи для определения изменений параметров целевой функции в соответствии с выбранной нормой.

Материал и методы. *Материалом исследования послужила модель прямой экстремальной задачи с дробно-линейной функцией и линейными ограничениями. В работе использовались методы оптимизации и математического программирования.*

Результаты и их обсуждение. *Применялись принципы обратной оптимизации для нахождения оптимальных параметров целевой функции в дробно-линейных задачах потокового программирования с дополнительными ограничениями. В соответствии с выбранной нормой были определены такие изменения параметров целевой функции, при которых допустимое базисное решение становится оптимальным решением. Корректировка параметров целевых функций в задачах дробно-линейного программирования используется с целью определения их оптимальных значений.*

Заключение. *Полученные результаты могут быть применены для корректировки параметров целевых функций в задачах дробно-линейного потокового программирования с целью определения значений параметров, при которых допустимое базисное решение является оптимальным решением.*

Ключевые слова: *математическое программирование, дробно-линейная целевая функция, допустимое решение, оптимальное решение, двойственная задача, обратная задача, базис, поток, обобщенная сеть, норма.*

Methods of Adjusting the Parameters of Fractional-Linear Objective Function in Problems of Nonlinear Programming

L.A. Pilipchuk
Belarusian State University

This article centers round the methods of adjusting the parameters of linear-fractional objective functions in problems of nonlinear programming. A mathematical model of the inverse problem for determining the changes of parameters in the objective function in accordance with the selected norm is built.

The purpose of the article is the construction of a mathematical model of the inverse optimization problem for determining of changes for the parameters of the objective function according to the selected norm.

Material and methods. *The material of the research is the model of the direct extreme problem with a linear-fractional function and linear restrictions. The methods of optimization and mathematical programming are used in this work.*

Findings and their discussion. *The principles of inverse optimization are applied for finding the optimal parameters of fractional linear objective function in linear-fractional programming problems with additional restrictions. In accordance with the selected norm such changes of parameters of the objective function are determined for which a feasible basic solution becomes the optimal solution. The results can be used to adjust the parameters of the objective function in a linear-fractional programming for the purpose of determining their optimal values.*

Conclusion. *The results can be used to adjust the parameters of the objective functions in problems of linear fractional programming network flow to determine the values of the parameters under which a feasible basic solution is the optimal solution.*

Key words: *mathematical programming, linear fractional objective function, feasible solution, optimal solution, dual problem, inverse problem, basis, flow, generalized network, norm.*

В статье рассматриваются методы корректировки параметров дробно-линейной целевой функции в задачах нелинейного программирования. Построена математическая модель обратной задачи для определения изменений параметров целевой функции в соответствии с выбранной нормой.

Цель статьи – построение математической модели обратной задачи для определения изменений параметров целевой функции в соответствии с выбранной нормой.

Материал и методы. Материалом исследования послужила модель прямой экстремальной задачи с дробно-линейной функцией и линейными ограничениями. В работе использовались методы оптимизации и математического программирования.

Прямая задача. Рассмотрим математическую модель прямой задачи нелинейного потокового программирования следующего вида:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}+\beta}{\sum_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij}+\gamma}\to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji}=a_i,\ i\in I, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij}=\alpha_p,\ p=\overline{1,l}, \tag{3}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ (i,j)\in U, \tag{4}$$

с дробно-линейной целевой функцией (1) и линейными ограничениями (2)–(4).

Параметры $c_{ij},q_{ij},\mu_{ij},a_i,\lambda_{ij}^p,\alpha_p,\beta,\gamma$ задачи (1)–(4) определены, I – множество узлов, U – множество дуг ориентированного связного графа $G=(I,U)$, x_{ij} – величина дугового потока дуги $(i,j)\in U$, μ_{ij} – коэффициент преобразования дугового потока x_{ij} дуги (i,j): дуговой поток дуги $(i,j)\in U$ величины x_{ij} исходит из узла i и входит в узел j в преобразованном виде $\mu_{ij}x_{ij}$. Обозначим $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$, $\mu=(\mu_{ij},(i,j)\in U)$ – векторы дуговых потоков и коэффициентов их преобразования; $I_i^+(U)=\{j\in I:(i,j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j\in I:(j,i)\in U\}$. Полагаем, что знаменатель $q(x)$ дробно-линейной целевой функции (1) не меняет знак на множестве V решений системы уравнений и неравенств (2)–(4). Без ограничения общности предположим, что знаменатель $q(x)>0, x\in V$. Выделим подмножество $Z\subseteq V$ *допустимых базисных решений* задачи (1)–(4). Допустимое базисное решение $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$, $x\in Z$ задачи (1)–(4) определяется следующим образом:

$$x=(x_{ij},(i,j)\in U_S;\quad x_{ij}=0,(i,j)\in U\setminus U_S),$$

где U_S – множество *базисных* дуг обобщенного графа $G=(I,U)$ задачи (1)–(4), которые соответствуют столбцам базисной матрицы системы уравнений (2)–(3).

Пусть $x=(x_{ij},(i,j)\in U_S;\quad x_{ij}=0,(i,j)\in U\setminus U_S)$ – некоторое известное допустимое базисное решение задачи (1)–(4) для заданных параметров $c_{ij},q_{ij},\mu_{ij},a_i,\lambda_{ij}^p,\alpha_p,\beta,\gamma$, которое не является оптимальным решением задачи (1)–(4). Необходимо изменить параметры $c_{ij},q_{ij},\beta,\gamma$ целевой функции (1) задачи (1)–(4) наименьшим образом так, чтобы для новых значений параметров целевой функции заданное допустимое базисное решение $x\in Z$ стало оптимальным решением.

Двойственная задача. Двойственная задача для задачи (1)–(4) имеет следующий вид:

$$g(y,r,z)=z\to \max, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} y_i-\mu_{ij}y_j+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^p r_p+q_{ij}z\le c_{ij},(i,j)\in U,\\ -\sum_{i\in I}a_i y_i-\sum_{p=1}^{l}\alpha_p r_p+\gamma z=\beta, \end{gathered} \tag{6}$$

где $z\in R^1$, $y=(y_i,i\in I)$, $r=(r_p,p=\overline{1,l})$.

Применяя теорию двойственности, легко доказать теоремы 1, 2, 3.

Теорема 1. *Если $x\in V$ – некоторое допустимое решение задачи (1)–(4) и (y,r,z) – некоторое допустимое решение двойственной задачи (5)–(6), то $f(x)\ge g(y,r,z)$.*

Теорема 2. *Если x^0 – допустимое решение задачи (1)–(4), (y^0,r^0,z^0) – допустимое решение задачи (5)–(6) и выполняется равенство $f(x^0)=g(y^0,r^0,z^0)$, то x^0 – оптимальное решение задачи (1)–(4), (y^0,r^0,z^0) – оптимальное решение задачи (5)–(6), которая является двойственной для прямой задачи (1)–(4).*

Теорема 3. *Если x^0 – оптимальное решение задачи (1)–(4), тогда существует (y^0,r^0,z^0) – оптимальное решение задачи (5)–(6).*

Теорема 4. *Пусть $x^0=(x_{ij}^0,(i,j)\in U)$ – допустимое решение задачи (1)–(4). Если выполняются условия:*

$$
\begin{aligned}
& y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z \le c_{ij}, (i,j) \in U, \\
& -\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \beta, \qquad (7) \\
& (y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z - c_{ij}) x_{ij}^0 = 0, (i,j) \in U,
\end{aligned}
$$

то x^0 – оптимальное решение задачи (1)–(4).

Доказательство. Задача (5)–(6) является двойственной к задаче (1)–(4). Если для допустимого решения x^0 задачи (1)–(4) и допустимого решения (y,r,z), $y=(y_i, i\in I)$, $r=(r_p, p=\overline{1,l})$, $z\in R^1$ задачи (5)–(6) выполнены следующие соотношения

$$(y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z - c_{ij}) x_{ij}^0 = 0, (i,j) \in U,$$

то имеем:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}^0 + \beta = \\
& = \sum_{(i,j)\in U} \left(y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z \right) x_{ij}^0 + \beta = \\
& = \sum_{i\in I} a_i y_i + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{i\in I} q_{ij} z x_{ij}^0 - \sum_{i\in I} a_i y_i - \\
& - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \\
& = z \sum_{(i,j)\in U} q_{ij} x_{ij}^0 + \gamma z = z \left(\sum_{i\in I} q_{ij} x_{ij}^0 + \gamma \right).
\end{aligned}
$$

Итак, значение целевой функции прямой задачи (1)–(4) совпадает со значением z целевой функции задачи (5)–(6), которая является двойственной к задаче (1)–(4):

$$f\left(x^0\right) = \frac{\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}^0 + \beta}{\sum_{(i,j)\in U} q_{ij} x_{ij}^0 + \gamma} = g(y,r,z) = z.$$

Согласно теореме 2 $x^0 = (x_{ij}^0, (i,j)\in U)$ – оптимальное решение задачи (1)–(4). Теорема доказана.

Обратная задача: изменение параметров целевой функции. Пусть $x^0 = (x_{ij}^0, (i,j)\in U)$ – некоторое допустимое решение задачи (1)–(4), $x^0 \in Z$, которое не является оптимальным. Применим принципы обратной оптимизации [1–6] для изменения параметров целевой функции (1). По теореме 4, для некоторых решений (y,r,z), $y=(y_i, i\in I)$, $r=(r_p, p=\overline{1,l})$, $z\in R^1$ двойственной задачи (5)–(6) параметры $c=(c_{ij},(i,j)\in U)$ могут быть заменены на $\widetilde{c}=(\widetilde{c}_{ij},(i,j)\in U)$ так, чтобы выполнялись условия оптимальности:

$$\left(y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z - \widetilde{c}_{ij} \right) x_{ij}^0 = 0, (i,j)\in U.$$

Тогда допустимое решение x^0 становится оптимальным решением скорректированной прямой задачи (1)–(4) для новых значений $\widetilde{c}=(\widetilde{c}_{ij},(i,j)\in U)$ параметров целевой функции.

В зависимости от значений дуговых потоков $x_{ij}^0, (i,j)\in U$ заданного допустимого решения x^0 задачи (1)–(4) сформируем множества дуг B_1, B_2 следующим образом:

$$B_1 = \left\{(i,j)\in U : x_{ij}^0 = 0\right\}, \ B_2 = \left\{(i,j)\in U : x_{ij}^0 > 0\right\}.$$

Обратная задача для задачи (1)–(4) имеет вид:

$$\left\|\widetilde{c} - c\right\| \to \min, \qquad (8)$$

$$
\begin{aligned}
& y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z \le \widetilde{c}_{ij}, (i,j)\in B_1, \\
& y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z = \widetilde{c}_{ij}, (i,j)\in B_2, \qquad (9) \\
& -\sum_{i\in I} a_i y_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \beta.
\end{aligned}
$$

Обозначим через θ_{ij}, ψ_{ij} соответственно увеличение и уменьшение параметра $c_{ij}, (i,j)\in U$ дробно-линейной целевой функции (1). Параметры $\widetilde{c}_{ij}, (i,j)\in U$ вычисляются следующим образом:

$$\widetilde{c}_{ij} = c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}, \theta_{ij} \ge 0, \psi_{ij} \ge 0, (i,j)\in U.$$

При этом θ_{ij}, ψ_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения, т.е. $\theta_{ij}\psi_{ij} = 0, (i,j)\in U$. Остальные параметры задачи (1)–(4) не изменяются.

Обратную задачу (8)–(9) можно представить следующим образом:

$$\left\|\widetilde{c} - c\right\| \to \min, \qquad (10)$$

$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z \le c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij},$$
$$\theta_{ij} \ge 0, \psi_{ij} \ge 0, (i,j) \in B_1,$$
$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z = c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}, \quad (11)$$
$$\theta_{ij} \ge 0, \psi_{ij} \ge 0, (i,j) \in B_2,$$
$$-\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \beta.$$

В соответствии с нормой l_1

$$l_1 = \|\widetilde{c} - c\|_1 = \sum_{(i,j)\in U} |\widetilde{c}_{ij} - c_{ij}| =$$
$$= \sum_{(i,j)\in U} |\theta_{ij} - \psi_{ij}| = \sum_{(i,j)\in U} (\theta_{ij} + \psi_{ij})$$

математическая модель обратной задачи для изменения параметров $c_{ij}, (i,j) \in U$ целевой функции (1) имеет следующий вид:

$$u(\theta, \psi) = \sum_{(i,j)\in U} (\theta_{ij} + \psi_{ij}) \to \min, \quad (12)$$

$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z \le c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij},$$
$$\theta_{ij} \ge 0, \psi_{ij} \ge 0, (i,j) \in B_1,$$
$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + q_{ij} z = c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}, \quad (13)$$
$$\theta_{ij} \ge 0, \psi_{ij} \ge 0, (i,j) \in B_2,$$
$$-\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \beta,$$

где $\theta = (\theta_{ij}, (i,j) \in U)$, $\psi = (\psi_{ij}, (i,j) \in U)$.

В результате решения обратной задачи минимизации нормы (12) при ограничениях (13) получены векторы $\theta = (\theta_{ij}, (i,j) \in U)$, $\psi = (\psi_{ij}, (i,j) \in U)$. Параметры $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}$, $(i,j) \in U$ отличаются от исходных значений параметров $c_{ij}, (i,j) \in U$ наименьшим образом. Для новых параметров $\widetilde{c}_{ij}, (i,j) \in U$ заданное допустимое решение $x^0 \in Z$ задачи (1)–(4) является оптимальным решением дробно-линейной задачи потокового программирования следующего вида:

$$\frac{\sum_{(i,j)\in U} (c_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}) x_{ij} + \beta}{\sum_{(i,j)\in U} q_{ij} x_{ij} + \gamma} \to \min, \quad (14)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \mu_{ji} x_{ji} = a_i, \; i \in I, \quad (15)$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \alpha_p, \; p = \overline{1,l}, \quad (16)$$

$$x_{ij} \ge 0, \; (i,j) \in U. \quad (17)$$

Численный пример корректировки параметров целевой функции. Для конечного связного ориентированного обобщенного графа $G = (I,U)$, $|I| = 5$, $I = \{1,2,3,4,5\}$, $U = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,5), (3,5),(4,3),(4,5)\}$ рассмотрим математическую модель экстремальной сетевой задачи дробно-линейного потокового программирования следующего вида:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij} + \beta}{\sum_{(i,j)\in U} q_{ij} x_{ij} + \gamma} \to \min,$$
$$p(x) = 5x_{1,2} + x_{1,4} + x_{2,3} + 5x_{2,5} + 5x_{3,5} +$$
$$+ 4x_{4,3} + 2x_{4,5}, \quad q(x) = 2x_{1,2} + x_{1,4} + 3x_{2,3} +$$
$$+ 6x_{2,5} + 2x_{3,5} + x_{4,3} + 4x_{4,5}, \quad (18)$$

$$x_{1,2} + x_{1,4} = 4,$$
$$x_{2,3} + x_{2,5} - \frac{1}{2} x_{1,2} = 3,$$
$$x_{3,5} - \frac{1}{5} x_{2,3} - \frac{1}{7} x_{4,3} = \frac{7}{5}, \quad (19)$$
$$x_{4,3} + x_{4,5} - \frac{1}{3} x_{1,4} = \frac{13}{3},$$
$$-\frac{1}{4} x_{2,5} - \frac{2}{3} x_{3,5} - x_{4,5} = -\frac{79}{12};$$

$$\frac{1}{2} x_{1,2} + \frac{1}{7} x_{1,4} + x_{2,3} + \frac{1}{8} x_{2,5} + x_{3,5} +$$
$$+ x_{4,3} + 2x_{4,5} = \frac{919}{56}; \quad (20)$$

$$x_{1,2} \ge 0, \quad x_{1,4} \ge 0, \quad x_{2,3} \ge 0, \quad x_{2,5} \ge 0,$$
$$x_{3,5} \ge 0, \quad x_{4,3} \ge 0, \quad x_{4,5} \ge 0. \quad (21)$$

Базисное допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i,j) \in U_S;\; x_{ij}^0 = 0, (i,j) \in U \setminus U_S)$ задачи (18)–(21) определено следующим образом:

$$x_{1,2}^0 = 2, \quad x_{1,4}^0 = 2, \quad x_{2,3}^0 = 3, \quad x_{2,5}^0 = 1,$$
$$x_{3,5}^0 = 2, \quad x_{4,3}^0 = 0, \quad x_{4,5}^0 = 5, \quad (22)$$

где $U_S = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,5),(3,5),(4,5)\}$, $U \setminus U_S = \{(4,3)\}$. Теоретико-графовые свойства базиса U_S, который соответствует базисному допустимому решению (22), получены в [7] на основании применения теории декомпозиции [8–9].

Двойственная задача для задачи (18)–(21) имеет следующий вид:

$$g(y,r,z)=z\to\max, \tag{23}$$

$$\begin{gathered}
y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}r_1+2z\le 5,\quad y_1-\frac{1}{3}y_4+\frac{1}{7}r_1+z\le 1,\\
y_2-\frac{1}{5}y_3+r_1+3z\le 1,\quad y_2-\frac{1}{4}y_5+\frac{1}{8}r_1+6z\le 5,\\
y_3-\frac{2}{3}y_5+r_1+2z\le 5,\quad y_4-\frac{1}{7}y_3+r_1+z\le 4,\\
y_4-y_5+2r_1+4z\le 2,\\
-4y_1-3y_2-\frac{7}{5}y_3-\frac{13}{3}y_4+\frac{79}{12}y_5-\frac{919}{56}r_1=0.
\end{gathered} \tag{24}$$

В зависимости от значений дуговых потоков $x_{ij}^0=0,(i,j)\in U$ базисного допустимого решения (22) задачи (18)–(21) сформируем множества $B_1=\{(i,j)\in U: x_{ij}^0=0\}$, $B_2=\{(i,j)\in U: x_{ij}^0>0\}$: $B_1=\{(4,3)\}$, $B_2=\{(1,2),(1,4),(2,3),(2,5),(3,5),(4,5)\}$.

В соответствии с нормой $l_1=\sum_{(i,j)\in U}(\theta_{ij}+\psi_{ij})$ обратная задача для (18)–(21) имеет вид:

$$\begin{gathered}
u(\theta,\psi)=\theta_{1,2}+\psi_{1,2}+\theta_{1,4}+\psi_{1,4}+\theta_{2,3}+\\
+\psi_{2,3}+\theta_{2,5}+\psi_{2,5}+\theta_{3,5}+\psi_{3,5}+\\
+\theta_{4,3}+\psi_{4,3}+\theta_{4,5}+\psi_{4,5}\to\min,
\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}
y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}r_1+2z=5+\theta_{1,2}-\psi_{1,2},\\
y_1-\frac{1}{3}y_4+\frac{1}{7}r_1+z=1+\theta_{1,4}-\psi_{1,4},\\
y_2-\frac{1}{5}y_3+r_1+3z=1+\theta_{2,3}-\psi_{2,3},\\
y_2-\frac{1}{4}y_5+\frac{1}{8}r_1+6z=5+\theta_{2,5}-\psi_{2,5},\\
y_3-\frac{2}{3}y_5+r_1+2z=5+\theta_{3,5}-\psi_{3,5},\\
y_4-\frac{1}{7}y_3+r_1+z\le 4+\theta_{4,3}-\psi_{4,3},\\
y_4-y_5+2r_1+4z=2+\theta_{4,5}-\psi_{4,5},\\
-4y_1-3y_2-\frac{7}{5}y_3-\frac{13}{3}y_4+\frac{79}{12}y_5-\frac{919}{56}r_1=0,
\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}
\theta_{1,2}\ge 0,\psi_{1,2}\ge 0,\theta_{1,4}\ge 0,\psi_{1,4}\ge 0,\theta_{2,3}\ge 0,\\
\psi_{2,3}\ge 0,\theta_{2,5}\ge 0,\psi_{2,5}\ge 0,\theta_{3,5}\ge 0,\psi_{3,5}\ge 0,\\
\theta_{4,3}\ge 0,\psi_{4,3}\ge 0,\theta_{4,5}\ge 0,\psi_{4,5}\ge 0.
\end{gathered} \tag{27}$$

В результате решения обратной задачи минимизации нормы (25) при ограничениях (26)–(27) получено следующее ненулевое значение $\theta_{1,4}$ увеличения параметра $c_{1,4}$ целевой функции (18):

$$\theta_{1,4}=\frac{947\,600}{486\,221}.$$

Новые параметры $\widetilde{c}_{ij}=c_{ij}+\theta_{ij}-\psi_{ij}$, $(i,j)\in U$ вычисляются следующим образом:

$$\widetilde{c}_{ij}=\begin{cases}1+\dfrac{947\,600}{486\,221}, & \text{если}\quad (i,j)=(1,4),\\ c_{ij}, \quad \text{если}\quad (i,j)\in U\setminus(1,4)= \\ =\{1,2),(2,3),(2,5),(3,5),(4,3),(4,5)\}.\end{cases} \tag{28}$$

Базисное допустимое решение (22) является оптимальным решением дробно-линейной экстремальной задачи потокового программирования с целевой функцией вида (29) и ограничениями (19)–(21).

$$\begin{gathered}
f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}\to\min,\\
p(x)=5x_{1,2}+\left(1+\frac{947\,600}{486\,221}\right)x_{1,4}+x_{2,3}+\\
+5x_{2,5}+5x_{3,5}+4x_{4,3}+2x_{4,5},\quad q(x)=2x_{1,2}+\\
+x_{1,4}+3x_{2,3}+6x_{2,5}+2x_{3,5}+x_{4,3}+4x_{4,5}.
\end{gathered} \tag{29}$$

Для новых значений параметров (28) значение дробно-линейной целевой функции (29) на оптимальном решении (22) равно:

$$f(x^0)=\frac{p(x^0)}{q(x^0)}=\frac{\sum_{(i,j)\in U}\widetilde{c}_{ij}x_{ij}^0+\beta}{\sum_{(i,j)\in U}q_{ij}x_{ij}^0+\gamma}=\frac{474\,312}{486\,221}.$$

Двойственная задача (23)–(24) для коэффициентов целевой функции (28) имеет следующий вид:

$$g(y,r,z)=z\to\max, \tag{30}$$

$$\begin{gathered}
y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}r_1+2z\le 5,\\
y_1-\frac{1}{3}y_4+\frac{1}{7}r_1+z\le 1+\frac{947\,600}{486\,221},\\
y_2-\frac{1}{5}y_3+r_1+3z\le 1,\\
y_2-\frac{1}{4}y_5+\frac{1}{8}r_1+6z\le 5,\\
y_3-\frac{2}{3}y_5+r_1+2z\le 5,\\
y_4-\frac{1}{7}y_3+r_1+z\le 4,\\
y_4-y_5+2r_1+4z\le 2,\\
-4y_1-3y_2-\frac{7}{5}y_3-\frac{13}{3}y_4+\frac{79}{12}y_5-\frac{919}{56}r_1=0.
\end{gathered} \tag{31}$$

В результате решения двойственной задачи (30)–(31) получено оптимальное решение вида

$$z^0 = \frac{474\,312}{486\,221},\ y_1^0 = \frac{1\,845\,678}{486\,221},\ y_2^0 = \frac{252\,648}{486\,221},$$
$$y_3^0 = \frac{3\,578\,085}{486\,221},\quad y_4^0 = \frac{2\,455\,473}{486\,221}, \qquad (32)$$
$$y_5^0 = \frac{2\,432\,787}{486\,221},\quad r_1 = \frac{473\,746}{486\,221}.$$

Для новых параметров (28) значение целевой функции (30) на оптимальном решении (32) двойственной задачи (30)–(31) совпадает со значением целевой функции на оптимальном решении (22) прямой задачи потокового программирования с дробно-линейной целевой функции (29) и ограничениями (19)–(21):

$$f(x^0) = g(y^0, r^0, z^0) = z^0 = \frac{474\,312}{486\,221}.$$

Заключение. Для допустимого базисного решения однородной дробно-линейной задачи потокового программирования применяются принципы обратной оптимизации для моделирования изменений значений как можно меньшего числа параметров дробно-линейной целевой функции таким образом, чтобы допустимое базисное решение стало оптимальным. Доказаны условия оптимальности для допустимого решения исследуемой задачи. Построена математическая модель обратной задачи для определения изменений параметров целевой функции в соответствии с выбранной нормой. Получены формулы вычисления новых параметров дробно-линейной целевой функции, для которых допустимое базисное решение становится оптимальным базисным решением исследуемой однородной задачи нелинейного потокового программирования. Результаты могут быть применены для корректировки параметров целевых функций в задачах дробно-линейного программирования с целью определения значений параметров, при которых допустимое базисное решение является оптимальным решением. Для решения прямых, двойственных и обратных задач, рассматриваемых в статье, используются типы разреженности матриц ограничений, специфика задач, концепции теории графов, результаты, полученные в теории потоков для обобщенных графов (сетей) [10–12], и технологии численного решения нелинейных сетевых задач математического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burton, D. On an instance of the inverse shortest paths problem / D. Burton, Ph.L. Toint // Mathematical Programming. – 1992. – Vol. 53. – Issue 1. – P. 45–61.
2. Ahuja, R.K. Inverse Optimization / R.K. Ahuja, J.B. Orlin // Operation Research. – 2001. – Vol. 49. – Issue 5. – P. 771–783.
3. Jain, S. An Inverse Capacitated Transportation Problem / S. Jain, N. Arya // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 5. – Issue 4. – P. 24–27.
4. Пилипчук, Л.А. Обратная задача корректировки параметров ограничений для одной линейной неоднородной задачи сетевой оптимизации / Л.А. Пилипчук // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Інформатика. – 2016. – № 1. – С. 136–143.
5. Hladik, M. Generalized linear fractional programming under interval uncertainty / M. Hladik // Eur. J. Oper. Res. – 2010. – Vol. 205(1). – P. 42–46.
6. Xu, C. Some inverse optimization problems on network / C. Xu, X. Xu // J. Systems Science & Complexity. – 2013. – Vol. 26, № 3. – P. 350–364.
7. Пилипчук, Л.А. Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2013. – 235 с.
8. Пилипчук, Л.А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л.А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2012. – 260 с.
9. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
10. Pilipchuk, L.A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L.A. Pilipchuk, O.V. German, A.S. Pilipchuk // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Інформатика. – 2015. – № 2. – С. 91–96.
11. Пилипчук, Л.А. Применение конструктивных методов декомпозиции для решения одной нелинейной задачи сетевой оптимизации / Л.А. Пилипчук // Веснік Гродзенск. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 2(192). – С. 54–61.
12. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1980. – Ч. 3: Специальные задачи. – 368 с.

REFERENCES

1. Burton D., Toint Ph.L. On an instance of the inverse shortest paths problem / D. Burton, Ph.L. Toint // Mathematical Programming. – 1992. – Vol. 53. – Issue 1. – P. 45–61.
2. Ahuja R.K., Orlin J.B. Inverse Optimization / R.K. Ahuja, J.B. Orlin // Operation Research. – 2001. – Vol. 49. – Issue 5. – P. 771–783.
3. Jain S., Arya N. An Inverse Capacitated Transportation Problem / S. Jain, N. Arya // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 5. – Issue 4. – P. 24–27.
4. Pilipchuk L.A. *Vestnik BGU* [Newsletter of Belarusian State University], Ser. 1. Fiz., Mat., Inform., 2016, 1, pp. 136–143.
5. Hladik M. Generalized linear fractional programming under interval uncertainty / M. Hladik // Eur. J. Oper. Res. – 2010. 205(1). – P. 42–46.
6. Xu C., Xu X. Some inverse optimization problems on network / C. Xu, X. Xu // J. Systems Science & Complexity. – 2013. – Vol. 26. – No. 3. – P. 350–364.
7. Pilipchuk L.A. *Drobno-lineiniye ekstremalniye neodnorodniye zadachi potokovogo programmirovaniya* [Fractional-Linear Extreme Inhomogeneous Problems in Network Flow Programming], Minsk, 2013, 235 p.
8. Pilipchuk L.A. *Razrezhennyye nedoopredelennyye sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy* [Sparse Underdetermined Systems of Linear Algebraic Equations], Minsk, 2012, 260 p.
9. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
10. Pilipchuk, L.A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L.A. Pilipchuk, O.V. German, A.S. Pilipchuk // *Vestnik BGU*. Ser. 1. Fiz., Mat., Inform. – 2015. – No. 2. – P. 91–96.
11. Pilipchuk L.A. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaunaga universiteta imya Yanki Kupali. Ser. 2. Matematika. Fizika. Infarmatika, vilichalnaya tekhnika i kiravanne* [Newsletter of Grodno State University], 2015, 2 (192), pp. 54–61.
12. Gabasov R., Kirillova F.M. *Metody lineynogo programmirovaniya: v 3 ch. Ch. 3. Spetsialniye zadachi* [Methods of Linear Programming in 3 Parts. Part 3. Special Problems], Minsk, 1980, 368 p.

Поступила в редакцию 16.11.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: pilipchuk@bsu.by – Пилипчук Л.А.