

$$P_{7,2m}(t) = t^{2m} - \frac{3^{2m+1} - 2^{2m+3} + 5}{120} t^4 + \frac{3^{2m+1} - 2^{2m+4} + 13}{24} t^2 - \frac{3^{2m} - 3 \cdot 2^{2m+1} + 15}{10}.$$

$$P_{3,2k} = t^{2k} - 1.$$

УДК 513.83

Г.О. КУКРАК, В.Л. ТИМОХОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭКСПОНЕНТЫ ВИЕТОРИСА

In this paper the class of extendable spaces is introduced. For this class of spaces the necessary and sufficient condition for the map induced on the Vietoris hyperspaces to be perfect is obtained. Besides, the functor of the Vietoris hyperspace on the category of regular isocompact extendable spaces and perfect maps which induces perfect maps on the hyperspaces is considered. The necessary and sufficient condition for this functor to be continuous is proved.

Функтор exp на категории COMP компактных хаусдорфовых пространств (компактов) и их непрерывных отображений и его связи с другими ковариантными функторами на этой категории достаточно хорошо изучены (см., например, [1-4]). В данной работе исследуются некоторые свойства функтора exp на категории более широкой, чем COMP .

Начнем с определений и обозначений. Все топологические пространства предполагаются T_1 -пространствами, а отображения непрерывными, если иное не оговорено. Для пространства X , множества и точки

$$A \subseteq X \quad x \in X \text{ обозначим: } \tau_x$$

и Φ_X - семейство всех открытых и соответственно семейство всех замкнутых подмножеств пространства X , $\tau_x(x)$ ($\tau_x(A)$) - семейство всех открытых окрестностей точки x (соответственно множества A), $[A]x$ - замыкание A в X , $T_1(A) = \{F \in \Phi_X | F \cap A \neq \emptyset\}$, $T_2(A) = \{F \in \Phi_X | \emptyset \neq F \subseteq A\}$. Напомним, что символом $\text{exp} X$ обозначается пространство всех непустых замкнутых подмножеств пространства X , снабженное топологией Виеториса, предбазу которой составляют множества вида $T_1(U)$ и $T_2(U)$, где $U \in \tau_x$ (см., например, [5, с. 192]). Множество A называется дискретным в X , если любое его подмножество замкнуто в X . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется замкнутым, если $f(F) \in \Phi_Y$ для любого $F \in \Phi_X$. Отображение f называется совершенным (квазисовершенным), если оно замкнуто и имеет компактные (соответственно счетно-компактные) прообразы точек [5, с. 277]. Для данного покрытия α пространства X через αx обозначим звезду точки x , т. е. $\alpha x = \bigcup \{V \in \alpha | x \in V\}$. Пространство X называется изокомпактным [6], если компактно любое счетно-компактное множество $F \in \Phi_X$. Пространство X называется δ -хаусдорфовым [7], если для любого бесконечного дискретного в X множества

А найдутся бесконечное подмножество $B \subseteq A$ и дискретное в X семейство $\{U_b | b \in B\}$, где $U_b \in \tau_X(b)$, $b \in B$. Отметим, что любое нормальное пространство 8-хаусдорфово.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ - замкнутое отображение. Тогда оно порождает непрерывное отображение $f_!: \text{exr } X \rightarrow \text{exr } Y$ [4, с. 102] по правилу $f_!(F) = f(F)$, где $F \in \text{exr } X$ (другими словами, определен функтор exr из категории T_1 -пространств и замкнутых отображений в категорию T_1 -пространств и произвольных непрерывных отображений). Естественно, возникает вопрос: при каких ограничениях на f отображение $f_!$ «достаточно хорошее». В [8] была доказана

Теорема 1. Отображение $f_!$ совершенно тогда и только тогда, когда совершенно/и выполняется следующее условие: $f_!(f(F)) \setminus U$ компактно для любых $\emptyset \neq F \in \Phi_X$ и $U \in \tau_X(F)$. (*)

В [9] сформулирована другая характеристика совершенности/ в предположении нормальности и изокомпактности пространств X и Y . Как известно, класс нормальных изокомпактных пространств весьма неудобен с точки зрения теории категорий. Достаточно сказать, что даже квадрат паракомпакта может не быть нормальным [5, с. 458]. В данной работе рассмотрен класс изокомпактных растяжимых пространств (определение 1), более широкий (см. пример 1) и в то же время достаточно удобный с точки зрения теории категорий (см. утверждения 2 и 3). На пространства этого класса обобщается упомянутый результат из [9] (см. далее теорему 2) и полученная в [7] характеристика непрерывности функтора exr (см. теорему 3).

1. Растяжимые пространства

Определение 1. Топологическое пространство X назовем растяжимым, если для любого $A \subseteq X$ из того, что $[A]_X$ не счетно-компактно, следует, что существует бесконечное дискретное в X подмножество $B \subseteq A$.

Утверждение 1. Любое регулярное слабопаракомпактное пространство X растяжимо и изокомпактно.

Доказательство. Изокомпактность слабопаракомпактных пространств хорошо известна [5, с. 477]. Докажем растяжимость пространств. Рассмотрим подмножество $A \subseteq X$ такое, что $[A]_X$ не счетно-компактно. Пусть $B \subseteq [A]_X$, $B = \{b_n | n \in N\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$) и B дискретно в X . В силу регулярности X существует дизъюнктное семейство окрестностей $U_n \in \tau_X(b_n)$, $n \in N$. Рассмотрим покрытие $\alpha = \{X \setminus B\} \cup \{U_n | n \in N\}$. Регулярность и слабая паракомпактность X влечет существование точечно-конечного открытого покрытия β такого, что $\{[V]_X | V \in \beta\}$ вписано в α . Построим теперь бесконечное дискретное в X множество $C \subseteq A$. Выберем произвольно точку $c_1 \in U_1 \cap A$. Нетрудно видеть, что $[\beta c_1]_X \subseteq (X \setminus B) \cup U_1$, откуда следует существование точки $c_2 \in (U_2 \setminus [\beta c_1]_X) \cap A$. Далее заметим, что $[\beta c_1]_X \cup [\beta c_2]_X \subseteq (X \setminus B) \cup U_1 \cup U_2$. Выберем точку $c_3 \in (U_3 \setminus ([\beta c_1]_X \cup [\beta c_2]_X)) \cap A$. Продолжая процесс по индукции, получим множество $C = \{c_n | n \in N\} \subseteq A$, где $c_n \in U_n$, $n \in N$. Очевидно, что C дискретно как подпространство. Докажем его замкнутость. Для произвольной точки $x \in X \setminus C$ либо $\beta x \cap C = \emptyset$, либо $x \in \beta c_k$ для некоторой $c_k \in \beta x \cap C$. Но тогда $\beta c_k \setminus \{c_k\} \in \tau_X(x)$ и $(\beta c_k \setminus \{c_k\}) \cap C = \emptyset$, поскольку по построению $c_n \notin \beta c_k$ при $n \neq k$. ■

Замечание. В утверждении 1 доказано свойство более сильное, чем растяжимость, а именно: если $B = \{b_n | n \in N\} \subseteq [A]_X$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$) и B дискретно в X , то для любого семейства окрестностей $U_n \in \tau_X(b_n)$, $n \in N$, можно выбрать дискретное в X множество $C = \{c_n | n \in N\} \subseteq A$ ($c_n \neq c_k$ при $n \neq k$) так, что $c_n \in U_n$ для любого $n \in N$.

Утверждение 2. а) Замкнутое подпространство растяжимого пространства растяжимо; б) замкнутое подпространство изокомпактного пространства изо-

компактно; в) произведение любой совокупности растяжимых изокомпактных пространств растяжимо и изокомпактно; г) предел обратного спектра растяжимых изокомпактных хаусдорфовых пространств растяжим и изокомпактен (если не пуст).

Доказательство. Пункт а) очевиден, пункт б) доказан в [6]. Докажем в). Пусть пространства $X_i, i \in T$, растяжимы и изокомпактны, $X = \prod_{i \in T} X_i$, $p_i: X \rightarrow X_i$ – проекции. Докажем, что X растяжимо. Пусть $A \subseteq X$ и $[A]_x$ не счетно-компактно. Рассуждая от противного, легко показать, что найдется $s \in T$, для которого $[p_s(A)]_{X_s}$ не счетно-компактно. В силу растяжимости X_s существует дискретное в X_s подмножество $B \subseteq [p_s(A)]_{X_s}$, $B = \{b_n | n \in N\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Выбирая для каждого $n \in N$ точку $\xi_n \in A \cap p_s^{-1}(b_n)$, получаем бесконечное дискретное в X подмножество в A . Докажем изокомпактность X . Пусть $F \subseteq X$ замкнуто в X и счетно-компактно. Допустим, что F не компактно. Тогда найдется $s \in T$ такое, что $[p_s(F)]_{X_s}$ не компактно, а, значит, в силу изокомпактности X_s , и не счетно-компактно. Вследствие растяжимости X_s в $p_s(F)$ существует бесконечное дискретное в X_s подмножество. Но тогда (см. выше) существует и бесконечное дискретное в X подмножество в F , что противоречит счетной компактности F . Пункт г) следует из а), б) и в). •

Утверждение 3. Квасисовершенные отображения сохраняют растяжимость в сторону образа и в сторону прообраза.

Доказательство. Рассмотрим сюръективное квасисовершенное отображение $f: X \rightarrow Y$. 1) Пусть X – растяжимо. Рассмотрим $A \subseteq Y$ такое, что $[A]_Y$ несчетно-компактно. Тогда, поскольку $f([f^{-1}(A)]_X) = [A]_Y$, $[f^{-1}(A)]_X$ не счетно-компактно, и, следовательно, $f^{-1}(A)$ содержит дискретное в X множество $B = \{b_n | n \in N\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Очевидно, что $f(B) \subseteq A$ и любое множество $C \subseteq f(B)$ замкнуто в Y , что доказывает дискретность $f(B)$ в Y . Допустим, что множество $f(B)$ конечно. Тогда для некоторой точки $y \in f(B)$ множество $f^{-1}(y) \cap B$ бесконечно, что противоречит квасисовершенности отображения f . Растяжимость Y доказана. 2) Пусть Y растяжимо, $A \subseteq X$, $[A]_X$ не счетно-компактно. Тогда и $[f(A)]_Y$ не счетно-компактно, поскольку $[A]_X \subseteq f^{-1}([f(A)]_Y)$. Но тогда существует бесконечное дискретное в Y множество $B \subseteq f(A)$, $B = \{b_n | n \in N\}$. Выбирая для каждого $n \in N$ точку $c_n \in f^{-1}(b_n) \cap A$, получаем бесконечное дискретное в X множество $\{c_n | n \in N\} \subseteq A$. ■

С учетом того, что изокомпактность сохраняется квасисовершенными отображениями в сторону образа, а совершенными в сторону прообраза [6], получаем

Следствие. Свойство пространства быть растяжимым и изокомпактным сохраняется квасисовершенными отображениями в сторону образа, а совершенными в сторону прообраза.

Пример 1. Через A_i ($i=0; 1$) обозначим пространство всех ординалов $\alpha \leq \omega_i$ (ω_0 – первый счетный, а ω_1 – первый несчетный ординалы) с базой, образованной множествами вида $\{\alpha\}$, где $\alpha < \omega_i$, и $A_i \setminus B$, где $\omega_i \notin B$ и $|B| < \infty$. Пространство $X = A_0 \times A_1 \setminus \{(\omega_0, \omega_1)\}$ вполне регулярно и слабопаракомпактно [5, с. 485], следовательно, изокомпактно и растяжимо (утверждение 1), но не δ -хаусдорфово (и, следовательно, не нормально). Для последнего достаточно рассмотреть дискретное в X множество точек вида (n, ω_1) , где $n \in N$.

2. Совершенство отображения f

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ совершенно, сюръективно и одно из пространств X и Y растяжимо и изокомпактно. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) f совершенно; б) существует разложение $Y = Y_0 \cup Y_1$ такое, что $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$, Y_1 компактно и замкнуто в Y , а множество $f^{-1}(y)$ одноточечно для любой точки

$y \in Y_0$ (и, следовательно, $f^{-1}(Y_0) \xrightarrow{f} Y_0$ - гомеоморфизм); в) существует разложение $X = X_0 \cup X_1$ такое, что $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, X_1 компактно и замкнуто в X , а $f^{-1}f(x) = \{x\}$ для любой точки $x \in X_0$ (и, следовательно, $f(X_0) \cap f(X_1) = \emptyset$ и $X_0 \xrightarrow{f} f(X_0)$ - гомеоморфизм).

Доказательство, а) $\Rightarrow$ б). Обозначим $M = \{y \in Y \mid |f^{-1}(y)| \geq 2\}$, $Y_1 = [M]_Y$, $Y_0 = Y \setminus Y_1$. Осталось показать, что Y_1 компактно. Если это не так, то в силу растяжимости и изокомпактности пространства Y существует дискретное в Y множество $\{b_n \mid n \in N\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$) такое, что $|f^{-1}(b_n)| \geq 2$ для всех $n \in N$. Выбирая для каждого $n \in N$ точки $x_n, z_n \in f^{-1}(b_n)$, $x_n \neq z_n$, получим два дискретных в X множества $F = \{x_n \mid n \in N\}$ и $\Phi = \{z_n \mid n \in N\}$. Пусть U - произвольное открытое в X множество такое, что $F \subseteq U$, $U \cap \Phi = \emptyset$. Но тогда $\Phi \subseteq f^{-1}(f(F)) \setminus U$, что противоречит совершенности отображения/ в силу теоремы 1.

б) $\Rightarrow$ в). Очевидно. Достаточно положить $X_0 = f^{-1}(Y_0)$, $X_1 = f^{-1}(Y_1)$.

в) $\Rightarrow$ а). Проверим, что $f_!(f(F)) \setminus U$ компактно для любых $\emptyset \neq F \in \Phi_X$ и $U \in \tau_X(F)$. Имеем: $f^{-1}(f(F)) \setminus U = ((f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_0) \cup ((f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_1)$. Легко заметить, что $(f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_0 = \emptyset$, $(f^{-1}(f(F)) \setminus U) \cap X_1$ компактно. ■

Замечание. В теореме 2 в пунктах б) и в) достаточно требовать компактности подпространств Y_1 и X_1 соответственно. Отметим также, что при указанных X и Y требование совершенности отображения f эквивалентно тому, что в определенном смысле исходное отображение f может быть нетривиальным лишь на замкнутом компактном подпространстве $X_1 \subseteq X$.

3. Критерий непрерывности функтора экспоненты Виеториса

Рассмотрим обратный спектр $S = \{X_t, \pi_t^s, T\}$. Если все связующие отображения π_t^s замкнуты, то определен обратный спектр $\exp S = \{\exp X_t, \Pi_t^s, T\}$, где отображения Π_t^s порождены отображениями π_t^s . Обозначим $L = \varprojlim S$, $\pi_t: L \rightarrow X_t$ - канонические $\text{proj} L_t = \pi_t(L)$, $t \in T$. Можно показать [7], что если все π_t^s совершенны и имеют хаусдорфовы прообразы точек, то все π_t также совершенны, в частности, L_t замкнуто в X_t для каждого $t \in T$. При этих ограничениях определено каноническое отображение $H: \exp L \rightarrow \varprojlim \exp S$ по правилу $H(F) = (P_t(F))_{t \in T}$, где $F \in \exp L$, $P_t: \exp L \rightarrow \exp X_t$ порождены отображениями π_t , $t \in T$. Говорят, что функтор $\exp$ непрерывен на спектре S , если H является гомеоморфизмом (см., например, [4, с. 141]).

Обозначим далее для произвольных $s \geq t$: $M_t^s = \{x \in L_t \mid |(\pi_t^s)^{-1}(x) \cap L_s| \geq 2\}$, $M_t = \bigcup_{s \geq t} M_t^s$. Ясно, что $\pi_t^s(M_s) \subseteq M_t$.

Лемма. Пусть все пространства X_t обратного спектра S регулярны, растяжимы и изокомпактны, а связующие отображения совершенны и удовлетворяют условию (*). В этом случае отображение H является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда множества $[M_t]_{X_t}$ компактны для $t \in T$.

Критерий непрерывности функтора $\exp$ на обратных спектрах в категории регулярных растяжимых изокомпактных пространств и совершенных отображений со свойством (*) дает

Теорема 3. Пусть все пространства и связующие отображения спектра S удовлетворяют условиям леммы. В этом случае отображение H есть гомеоморфизм тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ можно подобрать замкнутое в X_t подпространство Y_t и компактное подпространство $\Phi_t \subseteq Y_t$ таким образом, что $\pi_t^s(Y_s) = Y_t$ (и, следовательно, определен обратный спектр $S_1 = \{Y_t, \pi_t^s|Y_s, T\}$, вло-

женный в спектр S), $\pi_t^s(\Phi_s) \subseteq \Phi_t$ и $(\pi_t^s)^{-1}(y)$ одноточечно при $s \geq t$ и $y \in Y_t \setminus \Phi_t$, и $L = \lim_{\leftarrow} S_i$

Схемы доказательств леммы и теоремы 3, приведенные в [7] для более узкого класса пространств, переносятся на рассматриваемый случай без существенных изменений. Теорема 3 показывает, что в категории (более широкой, чем COMP) пространств и отображений, указанных в лемме, функтор exp может быть непрерывен лишь на спектрах, которые в определенном смысле близки к спектрам, состоящим из компактов.

1. Федорчук В.В. // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. № 5. С. 169.
2. Федорчук В.В. // Там же. 1986. Т. 41. № 6.
3. Шепин Е.В. // Там же. 1981. Т. 36. № 3. С. 3.
4. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
6. Васон Р. // Pacif. J. Math. 1970. Vol. 32. № 3. Р. 587.
7. Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 1. С. 51.
8. Кукрак Г.О. // Там же. 1999. № 3. С. 56.
9. Кукрак Г.О. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 26.

Поступила в редакцию 08.10.04.

Глеб Олегович Кукрак - кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

Владимир Леонидович Тимохович - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

$$\begin{aligned}
 & H^q(G, A), \quad q \geq 0, \\
 & \underline{C}(G, A), \quad q \geq 0 \\
 & C^q(G, A) = \{f: \underbrace{G \times \dots \times G}_q \rightarrow A \mid f \\
 & \quad \partial^q: C^q(G, A) \rightarrow C^{q+1}(G, A) \quad \partial f(g_1, \dots, g_{q+1}) = \\
 & = g_1 f(g_2, \dots, g_{q+1}) + \sum_{i=1}^q (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{q+1}) + (-1)^{q+1} f(g_1, \dots, g_q).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \infty, \quad H^n(G, \mathbf{F}_p[[G]]) = \{0\} \\
 & \mathbf{Z}_p[[N]] \quad \mathbf{Z}_p[[N]] \\
 & \mathbf{Z}_p[[N]] \quad H^q(N, \mathbf{F}_p), \quad 0 \leq q \leq n, .
 \end{aligned}$$