

$$\rho(x)$$

$$\hat{y} = y$$

$$(y_0(x) \equiv y,$$

$$\rho_0(x) = f(x, y_0(x)), \quad \varepsilon_0(x) \approx \int_t^x f(z, y_0(z)) dz, \quad y_1(x) = y_0(x) + \int_t^x f(z, y_0(z)) dz \quad \text{и т. д.})$$

УДК 519.65

С.В. ОГРЫЗКО

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ЭРМИТА - БИРКГОФА

This article introduces the methods of construction of an interpolation polynomial on values of approximate function and also on values of not necessarily consecutive derivatives as in the Her-mite interpolation.

Приведем методы построения интерполяционных полиномов по значениям приближаемой функции, а также по значениям не обязательно последовательных производных, как в случае эрмитовского интерполирования [1-3]. Интерполяционные полиномы подобного типа возникают при построении разностных и дифференциально-разностных схем повышенной точности для уравнений в частных производных.

Запишем представление достаточно гладкой функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = P_n(x) + R(x),$$

где $P_n(x)$ - интерполяционный полином по значениям функции в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$; $R(x)$ - остаточный член, например, в форме Лагранжа.

Значения полинома $P_n(x)$ совпадают со значениями интерполируемой функции $f(x)$: $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, и поэтому выполняются условия: $R(x_i) = 0$, $i = \overline{0, n}$.

Нам необходимо представить остаточный член интерполяционной формулы в виде суммы нескольких слагаемых с использованием производных функции $f(x)$.

Построение интерполяционной формулы

Рассмотрим вариант равноотстоящих узлов $x_j = x_0 + jh$, $j = \overline{0, n}$, $h > 0$. Не ограничивая общности, изучим случай, когда задано пять узлов интерполирования: $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$.

Тогда

$$j(x) = P_4(x) + R(x), \quad (1)$$

где $P_4(x)$ - интерполяционный полином по пяти узлам.

Остаточный член представим в форме Лагранжа:

$$R(x) = \omega(x) \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}, \quad \xi \in (x_{i-2}, x_{i+2}),$$

$$\omega(x) = (x - x_{i-2})(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}).$$

Для представления остатка $R(x)$ как суммы нескольких слагаемых формулу (1) запишем в виде:

$$f(x) = P_4(x) + \omega(x) \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!} + R_6(x),$$

где $R_6(x)$ - новый искомый остаток.

$$\text{Пусть } \overline{P}_5(x) = P_4(x) + \omega(x) \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!}.$$

Таким образом, $\overline{P}_5(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\overline{P}_5(x_k) = f(x_k), \quad k = \overline{i-2, i+2}, \quad \overline{P}_5^{(5)}(x_i) = f^{(5)}(x_i). \quad (2)$$

Другими словами, $\overline{P}_5(x)$ есть единственный, построенный по входным данным (2) интерполяционный полином. Новый остаток $R_6(x)$ должен при этом удовлетворять условиям:

$$R_6(x_k) = 0, \quad k = \overline{i-2, i+2}, \quad R_6^{(5)}(x_i) = 0.$$

Для вывода остатка $R_6(x)$ будем использовать тот же подход, что и при выводе остатка $R_5(x)$ интерполяционной формулы по значениям функции [4, 5]. Но это уже будет видоизмененный метод.

Остаточный член интерполяционной формулы

Представим $R_6(x)$ в следующем виде:

$$R_6(x) = \omega(x)(x - x_i)K,$$

где K - некоторая постоянная.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - \overline{P}_5(z) - K(z - x_i)\omega(z).$$

Очевидно, что $\varphi(x_{i-2}) = \varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_i) = \varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_{i+2}) = 0$. Кроме того, можно подобрать константу K так, чтобы $\varphi(x)$, где $x \in (x_{i-2}, x_{i+2})$, $x \neq x_k$, $k = \overline{i-2, i+2}$, также обращалась бы в 0. Это возможно, поскольку

$$K = \frac{f(x) - \overline{P}_5(x)}{\omega(x)(x - x_i)},$$

а знаменатель этой дроби отличен от 0, ибо $x \neq x_k$, $k = i-2, i+2$. Функция $\varphi(z)$ обращается в 0 на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ в шести точках: $x, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$. Следовательно, на основании теоремы Ролля производная $\varphi'(z)$ обращается в 0 по крайней мере пять раз на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$

Применяя теорему Ролля к $\varphi'(z)$, получим, что $\varphi''(z)$ обращается в 0 по крайней мере в четырех точках на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$. Продолжая этот процесс дальше, получим, что существует по крайней мере одна точка на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, в которой $\varphi^{(5)}(z)=0$.

В то же время по построению $\varphi^{(5)}(x_i)=0$. Таким образом, $\varphi^{(5)}(z)$ имеет по крайней мере два корня на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$. Тогда по теореме Ролля $\varphi^{(6)}(z)$ имеет по крайней мере один корень на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, т. е. существует некоторая точка ξ , лежащая на $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, что $\varphi^{(6)}(\xi)=0$:

$$\varphi^{(6)}(z)=f^{(6)}(z)-6!K.$$

Положив в последнем равенстве $z=\xi$, получим, что $K = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}$.

Тогда функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = P_4(x) + \omega(x) \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!} + \omega(x)(x-x_i) \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}, \quad (3)$$

где $\xi \in [x_{i-2}, x_{i+2}]$

Аналогично можно найти $R_7(x)$, $R_8(x)$ и т. д. Но это довольно трудоемкий процесс. Далее будет приведен более простой метод нахождения остатка.

Метод нахождения разложения остаточного члена

Исследование многочленов остаточного члена

Исходя из формулы (3), запишем:

$$\begin{aligned} f(x) = P_4(x) + Q_5^*(x) \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!} + Q_6^*(x) \frac{f^{(6)}(x_i)}{6!} + \\ + Q_7^*(x) \frac{f^{(7)}(x_i)}{7!} + R(x) = \bar{P}_7(x) + R(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\bar{P}_7(x)$ - интерполяционный полином, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\bar{P}_7(x_k) = f(x_k), \quad k = i-2, i+2, \quad \bar{P}_7^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i), \quad m = 5, 6, 7. \quad (5)$$

Сделаем замену переменных:

$$x = x_i + th, \quad (6)$$

при которой точки интерполирования $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ перейдут в $t_{i-2}=-2, t_{i-1}=-1, t_i=0, t_{i+1}=1, t_{i+2}=2$ соответственно. Таким образом, выражение (4) примет вид:

$$f(x_i + th) = P_4(x_i + th) + Q_5^*(x_i + th) \frac{f^{(5)}(x_i)}{5!} + Q_6^*(x_i + th) \frac{f^{(6)}(x_i)}{6!} + \dots \quad (7)$$

Обозначим через $Q_m(t) = \frac{1}{h^m m!} Q_m^*(x_i + th)$ и выпишем условия, которым должны удовлетворять многочлены $Q_m(t)$, исходя из условий интерполирования (5): $Q_m(t_k) = 0$, $k = i-2, i+2, m=5, 6, \dots$,

$$\begin{cases} Q_5^{(5)}(t_i) = 1, \\ Q_6^{(5)}(t_i) = 0, \\ Q_7^{(5)}(t_i) = 0, \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} Q_5^{(6)}(t_i) = 0, \\ Q_6^{(6)}(t_i) = 1, \\ Q_7^{(6)}(t_i) = 0, \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} Q_5^{(7)}(t_i) = 0, \\ Q_6^{(7)}(t_i) = 0, \\ Q_7^{(7)}(t_i) = 1, \\ \dots \end{cases} \quad \text{и т. д.} \quad (8)$$

Используя формулы (1) и (6), получим, что $Q_5(t) = (t-2)(t-1)t$.

Выбрав из системы (8) все уравнения относительно $Q_6(t)$ и с учетом представления $Q_6(t) = Q_5(t)(t-a)$, получаем, что $a=0$, т.е. $Q_6(t)$ имеет вид $Q_6(t)=(t_2-2_2)(t_2-1_2)t_2$.

Этот же результат можно получить, используя формулу (7) и замену переменных (6). Аналогично строятся многочлены $Q_7(t)$, $Q_8(t)$ и т. д.

Нахождение коэффициентов многочленов

Представление (7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) = & P_4(x) + \frac{h^5}{5!} t P_{5,4}(t) f^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{6!} t^2 P_{5,4}(t) f^{(6)}(x_i) + \\ & + \frac{h^7}{7!} t P_{5,6}(t) f^{(7)}(x_i) + \frac{h^8}{8!} t^2 P_{5,6}(t) f^{(8)}(x_i) + \dots + \\ & + \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} t P_{5,2m}(t) f^{(2m+1)}(x_i) + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} t^2 P_{5,2m}(t) f^{(2m+2)}(\xi), \end{aligned}$$

где $P_4(x)$ - интерполяционный полином по пяти узлам; многочлен $P_{5,2m}(t)$ имеет вид:

$$P_{5,2m}(t) = t^{2m} - A_{5,m} t^2 - B_{5,m}, \quad m = 2, 3, 4, \dots,$$

где $A_{5,m}$, $B_{5,m}$ - некоторые постоянные коэффициенты.

Замечание. У многочлена $P_{i,j}$ индекс i обозначает количество узлов интерполирования, а индексу - степень многочлена $Q(t)$.

Найдем коэффициенты $A_{5,m}$, $B_{5,m}$ из условия выполнения равенств:

$$P_{5,2m}(t_k) = 0, \quad k = i-2, \quad i-1.$$

Тогда за счет четности степеней переменной t при коэффициентах получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = A_{5,m} 1 + B_{5,m}, \\ 2^{2m} = A_{5,m} 2^2 + B_{5,m}. \end{cases}$$

Эта система по методу Крамера дает решение:

$$A_{5,m} = \frac{2^{2m} - 1}{3}, \quad B_{5,m} = \frac{2^{2m} - 4}{-3}, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Итак, для пяти узлов интерполирования построен многочлен $P_{5,2m}(t)$:

$$P_{5,2m}(t) = t^{2m} - \frac{2^{2m} - 1}{3} t^2 + \frac{2^{2m} - 4}{3}.$$

В случае семи узлов интерполирования будет иметь место следующее представление:

$$\begin{aligned} f(x) = & P_6(x) + \frac{h^7}{7!} t P_{7,6}(t) f^{(7)}(x_i) + \frac{h^8}{8!} t^2 P_{7,6}(t) f^{(8)}(x_i) + \\ & + \frac{h^9}{9!} t P_{7,8}(t) f^{(9)}(x_i) + \frac{h^{10}}{10!} t^2 P_{7,8}(t) f^{(10)}(x_i) + \dots + \\ & + \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} t P_{7,2m}(t) f^{(2m+1)}(x_i) + \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!} t^2 P_{7,2m}(t) f^{(2m+2)}(\xi), \end{aligned}$$

где $P_{7,2m}(t) = t^{2m} - A_{7,m} t^4 - B_{7,m} t^2 - C_{7,m}$, $m = 3, 4, \dots$

Неизвестные коэффициенты $A_{7,m}$, $B_{7,m}$, $C_{7,m}$ находим из решения системы:

$$\begin{cases} 1 = A_{7,m} + B_{7,m} + C_{7,m}, \\ 2^{2m} = A_{7,m} 2^4 + B_{7,m} 2^2 + C_{7,m}, \\ 3^{2m} = A_{7,m} 3^4 + B_{7,m} 3^2 + C_{7,m}. \end{cases}$$

$$P_{7,2m}(t) = t^{2m} - \frac{3^{2m+1} - 2^{2m+3} + 5}{120} t^4 + \frac{3^{2m+1} - 2^{2m+4} + 13}{24} t^2 - \frac{3^{2m} - 3 \cdot 2^{2m+1} + 15}{10}.$$

В случае трех узлов $P_{3,2k} = t^{2k} - 1$.

Таким образом, получено разложение функции, в котором остаточный член представляется в виде суммы последовательных главных частей.

1. Янович Л.А., Дорошко В.В. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. №4. С. 15.

2. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Мн., 1968.

3. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М, 1971.

4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2 т. М., 1959. Т. 1.

5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: в 2 т. М., 1976. Т. 1.

Поступила в редакцию 28.02.05.

Светлана Валерьевна Огрызко - аспирант кафедры вычислительной математики и информатики. Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и информатики А.В. Самусенко.

$$\begin{array}{l} \varphi_X \qquad \qquad \qquad A \subseteq X \qquad \qquad x \in X \qquad \qquad \tau_X \\ \qquad \qquad \qquad X, \tau_X(x) (\tau_X(A)) \\ T_1(A) = \{ F \in \varphi_X | F \cap A \neq \emptyset \}, \quad T_2(A) = \{ F \in \varphi_X | \emptyset \neq F \subseteq A \} \\ \qquad \qquad \qquad U \in \tau_X \\ f: X \rightarrow Y \qquad \qquad \qquad f(F) \in \varphi_Y \qquad \qquad F \in \varphi_X \\ \qquad \qquad \qquad \alpha \qquad \qquad \qquad \alpha x \\ \alpha x = \cup \{ V \in \alpha | x \in V \} \\ \delta \qquad \qquad \qquad F \in \varphi_X \end{array}$$