

РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ В УНИТАРНЫХ КОДАХ

В.П. СУПРУН, доцент, кандидат технических наук
Д.А. ГОРОДЕЦКИЙ, аспирант

Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
пр-т Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
E-mail: suprun@bsu.by, danila.gorodecky@gmail.com

В статье рассматриваются вопросы реализации основных операций модулярной арифметики – операций сложения и умножения для случая представления данных в унитарных кодах. Предлагаются аналитические описания функций, которые реализуются на выходах модулярного сумматора и модулярного умножителя. Приводятся логические схемы сумматора и умножителя по модулю три. Приведенные схемы являются более эффективными по сравнению со своими аналогами.

Ключевые слова: модулярная арифметика, вычислительное устройство, унитарные коды, модулярный сумматор, модулярный умножитель, логическая схема

1. ВВЕДЕНИЕ

Применение аппарата модулярной арифметики позволяет повысить производительность вычислительных устройств за счет параллельной и независимой обработки цифровых сигналов. Модулярное представление информации обеспечивает более надежное обнаружение и исправление ошибок при ее хранении и передаче, а также при выполнении (вычислении) арифметических операций [1, 2].

К настоящему времени разработан ряд методов синтеза сумматоров и умножителей по заданному модулю (см., например, [2-5]).

В данной работе рассматриваются вопросы синтеза устройств, реализующих двухместные арифметические операции сложения и умножения в унитарных кодах по модулю P . В качестве примера подробно рассматривается реализация указанных операций для значений модуля $P = 3$ и $P = 5$. В работе приводится схема устройства, реализующего некоторую суперпозицию этих операций. Данная схема синтезирована на основе применения метода блочно-структурного синтеза [6].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Применение унитарных кодов является широко распространенным в вычислительной технике способом представления данных. Операнд A в унитарном коде по модулю P представляется посредством p -разрядного двоичного вектора $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$, где $a_i = 1$ тогда и только тогда, когда $A \equiv i \pmod{P}$, где $i = 0, 1, \dots, p-1$.

Так как двоичный вектор $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ содержит ровно одну единицу, то имеет место равенство

$$a_0 + \dots + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + \dots + a_{p-1} = 1, \quad (1)$$

которое с учетом того, что $1 - a_i = \overline{a_i}$, равносильно выражению

$$a_0 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{p-1} = \overline{a_i}, \quad (2)$$

где $0 \leq i \leq p-1$.

Устройства, реализующие операции сложения $A + B = S \pmod{P}$ и умножения $A \cdot B = R \pmod{P}$ в унитарных кодах по модулю P , будем обозначать как $\mathfrak{R}_1$ (модулярный сумматор) и $\mathfrak{R}_2$ (модулярный умножитель), соответственно. Входные A, B и выходные S, R операнды задаются посредством p -разрядных унитарных двоичных векторов

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}), B = (b_0, b_1, \dots, b_{p-1}), S = (s_0, s_1, \dots, s_{p-1}) \text{ и } R = (r_0, r_1, \dots, r_{p-1}),$$

где $s_k = 1$ и $r_k = 1$ тогда и только тогда, когда $A + B = k \pmod{P}$ и $A \cdot B = k \pmod{P}$, соответственно, где $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Основное свойство логических функций

$$S_k = S_k(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b_0, b_1, \dots, b_{p-1}) \text{ и } R_k = R_k(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b_0, b_1, \dots, b_{p-1}),$$

которые реализуются на выходах устройств $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$, соответственно, где $k = 0, 1, \dots, p-1$, можно сформулировать с помощью следующих двух утверждений.

Утверждение 1. Из определения операции $A + B = S \pmod{P}$ следует, что $S_k = 1$ тогда и только тогда, когда $a_i + b_j = 2$, где $i + j = k \pmod{P}$ и $i, j = 0, 1, \dots, p-1$.

Утверждение 2. Из определения операции $A \cdot B = R \pmod{P}$ следует, что $R_k = 1$ тогда и только тогда, когда $a_i \cdot b_j = 2$, где $i \cdot j = k \pmod{P}$ и $i, j = 0, 1, \dots, p-1$.

В дальнейшем в качестве критерия оптимальности схемы $S(\mathfrak{R})$ вычислительного устройства $\mathfrak{R}$ будем использовать такие ее характеристики, как сложность $l(\mathfrak{R})$ (число входов логических элементов), глубина $g(\mathfrak{R})$ (которая, как правило, определяет быстродействие схемы) и число внешних выводов $m(\mathfrak{R})$. В этой связи эффективность синтезированных ниже логических схем $S(\mathfrak{R}_1)$, $S(\mathfrak{R}_2)$ и $S(\mathfrak{R}^*)$ устройств $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ и $\mathfrak{R}^*$ будем оценивать с учетом значений данных характеристик.

Далее приводятся аналитические представления функций, которые реализуются на выходах сумматора $\mathfrak{R}_1$ и умножителя $\mathfrak{R}_2$ при условии, что $P = 3$ и $P = 5$.

3. СЛОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ТРИ

Рассмотрим операцию сложения $A + B = S \pmod{3}$ в унитарных кодах, где $A = (a_0, a_1, a_2)$, $B = (b_0, b_1, b_2)$, $S = (s_0, s_1, s_2)$ и $s_k = 1$ тогда и только тогда, когда $A + B = k \pmod{3}$ и $k = 0, 1, 2$.

Из утверждения 1 следует, что логические функции S_0 , S_1 и S_2 , реализуемые на выходах сумматора $\mathfrak{R}_1$, можно представить как

- $S_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = 2$, $a_1 + b_2 = 2$ или $a_2 + b_1 = 2$;
- $S_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_1 = 2$, $a_1 + b_0 = 2$ или $a_2 + b_2 = 2$;
- $S_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_2 = 2$, $a_1 + b_1 = 2$ или $a_2 + b_0 = 2$.

Более простые аналитические описания функций S_0 , S_1 и S_2 представлены с помощью следующего утверждения.

Утверждение 3. Функция $S_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$; функция $S_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = a_1 + b_1$; функция $S_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = a_2 + b_2$.

Доказательство. Для доказательства утверждения применительно к функции S_0 необходимо рассмотреть три случая, а именно, выполнение условий $a_0 + b_0 = 2$, $a_1 + b_2 = 2$ и $a_2 + b_1 = 2$. Для этого будем использовать свойство (1) унитарных двоичных кодов $A = (a_0, a_1, a_2)$ и $B = (b_0, b_1, b_2)$ вида $a_0 + a_1 + a_2 = 1$ и $b_0 + b_1 + b_2 = 1$.

Если $a_0 + b_0 = 2$, то $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ и $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, т.е. $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 0$.

Если $a_1 + b_2 = 2$, то $a_1 = 1$, $b_2 = 1$ и $a_2 = b_1 = 0$, т.е. $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 1$.

Если $a_2 + b_1 = 2$, то $a_2 = 1$, $b_1 = 1$ и $a_1 = b_2 = 0$, т.е. $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 1$.

Доказательство утверждения относительно функций S_1 и S_2 проводится по аналогии.

Значит, функции S_0, S_1, S_2 можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + b_1 = a_2 + b_2; \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + b_0 = a_1 + b_1; \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + b_0 = a_2 + b_2; \\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание равенства $1 - a_2 = \overline{a_2}$ и $1 - b_2 = \overline{b_2}$, можно утверждать, что условия $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ и $a_1 + b_1 + \overline{a_2} + \overline{b_2} = 2$ эквивалентны (по аналогии с этим являются эквивалентными условия $a_0 + b_0 = a_1 + b_1$ и $a_0 + b_0 + \overline{a_1} + \overline{b_1} = 2$, а также $a_0 + b_0 = a_2 + b_2$ и $\overline{a_0} + \overline{b_0} + a_2 + b_2 = 2$).

В этой связи представления функций S_0, S_1, S_2 посредством (3) можно переписать как

$$S_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + \overline{a_2} + b_1 + \overline{b_2} = 2; \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + \overline{a_1} + b_0 + \overline{b_1} = 2; \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4)$$

$$S_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + \overline{b_0} + b_2 = 2; \\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис.1(а) приведена логическая схема $S_1(\mathfrak{R}_1)$ сумматора $\mathfrak{R}_1$, синтезированная на основе применения представлений (4). Схема $S_1(\mathfrak{R}_1)$ состоит из трех логических элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом два, и имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_1) = 12$, $g(\mathfrak{R}_1) = 1$ и $m(\mathfrak{R}_1) = 9$.

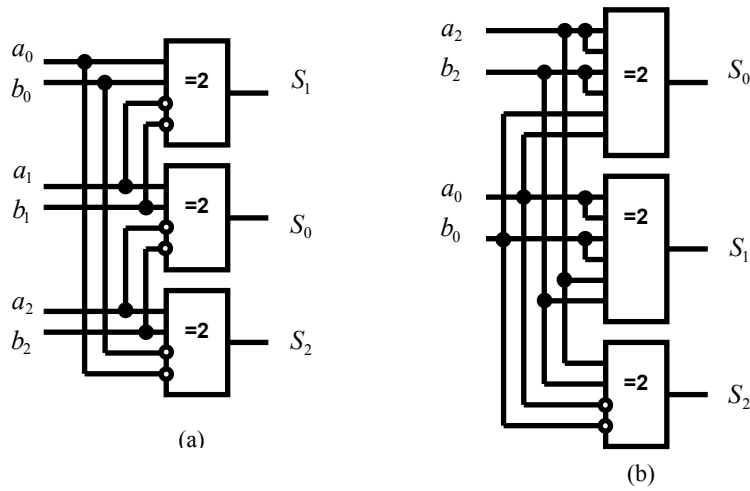


Рис.1. Логические схемы модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$:
(а) схема $S_1(\mathfrak{R}_1)$; (б) схема $S_2(\mathfrak{R}_1)$.

Так как свойство (1) означает, что $a_1 = 1 - a_0 - a_2$ и $b_1 = 1 - b_0 - b_2$, то имеет место следующая цепочка эквивалентных преобразований:

$$a_1 + \overline{a_2} + b_1 + \overline{b_2} = 2, \quad (1 - a_0 - a_2) + \overline{a_2} + (1 - b_0 - b_2) + \overline{b_2} = 2,$$

$$1 - a_0 - a_2 + (1 - a_2) + 1 - b_0 - b_2 + (1 - b_2) = 2, \quad a_0 + 2a_2 + b_0 + 2b_2 = 2.$$

Поскольку $\overline{a_1} = a_0 + a_2$ и $\overline{b_1} = b_0 + b_2$, то условия $a_0 + \overline{a_1} + b_0 + \overline{b_1} = 2$ и $2a_0 + a_2 + 2b_0 + b_2 = 2$ также эквивалентны.

В этой связи система представлений (4) будет эквивалентна системе

$$S_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_2 + b_0 + 2b_2 = 2; \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2a_0 + a_2 + 2b_0 + b_2 = 2; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5)$$

$$S_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + \overline{b_0} + b_2 = 2; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис.1(b) приведена логическая схема $S_2(\mathfrak{R}_1)$ сумматора $\mathfrak{R}_1$, синтезированная на основе применения формул (5). Схема $S_2(\mathfrak{R}_1)$ содержит три элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом два и имеет характеристики $l(\mathfrak{R}_1) = 16$, $g(\mathfrak{R}_1) = 1$ и $m(\mathfrak{R}_1) = 7$.

Основным достоинством логической схемы $S_2(\mathfrak{R}_1)$ является минимальное число внешних выводов, равное семи (четыре входа и три выхода).

Логические схемы $S_1(\mathfrak{R}_1)$ и $S_2(\mathfrak{R}_1)$ (рис.1) сумматора унитарных кодов по модулю три $\mathfrak{R}_1$ являются более эффективными по сложности, глубине или по числу внешних выводов по сравнению со всеми известными аналогами (см., например, Патенты на изобретение РБ 2305, 2314, 2473, 3270, 13247).

4. УМНОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ТРИ

Рассмотрим операцию умножения $A \cdot B = R \pmod{3}$ в унитарных кодах, где $A = (a_0, a_1, a_2)$, $B = (b_0, b_1, b_2)$, $R = (r_0, r_1, r_2)$, а $r_k = 1$ тогда и только тогда, когда $A \cdot B = k \pmod{3}$ и $k = 0, 1, 2$.

Из утверждения 2 следует, что логические функции R_0 , R_1 и R_2 , реализуемые на выходах умножителя $\mathfrak{R}_2$, можно представить, как

- $R_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 = 1$ или $b_0 = 1$;
- $R_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_1 = 2$ или $a_2 + b_2 = 2$;
- $R_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_2 = 2$ или $a_2 + b_1 = 2$.

Более простые аналитические описания функций R_0 , R_1 и R_2 представлены с помощью следующего утверждения.

Утверждение 4. Функция $R_0 = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 2$; функция $R_1 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_1 + 2a_2 + 2b_1 + b_2 = 3$; функция $R_2 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_1 + 2a_2 + b_1 + 2b_2 = 3$.

Доказательство. Так как функция $R_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 = 1$ или $b_0 = 1$, то $R_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = 0$, т.е. $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 2$.

Условие $a_1 + b_1 = 2$ эквивалентно $a_1 = b_1 = 1$, а условие $a_2 + b_2 = 2$ эквивалентно $a_2 = b_2 = 1$. В этой связи совокупность двух условий $a_1 + b_1 = 2$ или $a_2 + b_2 = 2$ будет эквивалентна одному условию $a_1 + 2a_2 + 2b_1 + b_2 = 3$.

Аналогично, совокупность условий $a_1 + b_2 = 2$ или $a_2 + b_1 = 2$ эквивалентна одному условию $a_1 + 2a_2 + b_1 + 2b_2 = 3$.

На рис.2(а) приведена логическая схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$ умножителя $\mathfrak{R}_2$, которая содержит элемент ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом два и два элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом три. Схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$ имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_2)=16$, $g(\mathfrak{R}_2)=1$ и $m(\mathfrak{R}_2)=7$ (Патент на изобретение РБ 12448).

Приведенная на рис.2(а) схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$ превосходит по некоторым характеристикам существующие аналоги (см., например, Патенты на изобретение РБ 6568, 12000).

Следует отметить, что существуют еще более простые аналитические представления логических функций R_0 , R_1 , R_2 .

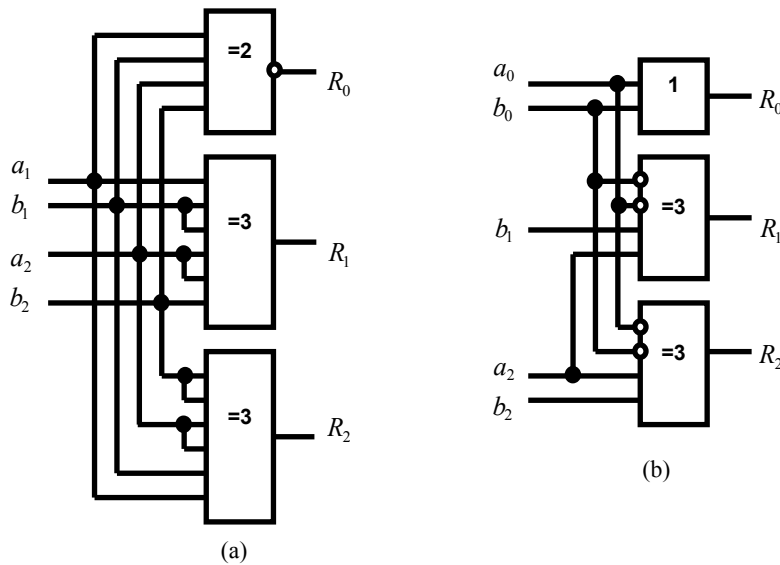


Рис.2. Логические схемы модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$:
(а) схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$; (б) схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$.

Утверждение 5. Функция $R_0=1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_0 \vee b_0 = 1$; функция $R_1=1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_2 + b_1 + \overline{a_0} + \overline{b_0} = 3$ (или $a_1 + b_2 + \overline{a_0} + \overline{b_0} = 3$); функция $R_2=1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_2 + b_2 + \overline{a_0} + \overline{b_0} = 3$.

Доказательство. Поскольку функция $R_0=1$ тогда и только тогда, когда $a_0=1$ или $b_0=1$, то $R_0 = a_0 \vee b_0$.

Свойства унитарных кодов (1) и (2) при условии, что $P=3$, принимают вид $a_0 + a_1 + a_2 = 1$, $b_0 + b_1 + b_2 = 1$, $a_1 + a_2 = \overline{a_0}$ и $b_1 + b_2 = \overline{b_0}$. Тогда будут справедливы следующие две цепочки равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_1 + 2a_2 + 2b_1 + b_2 = 3, \quad a_1 + 2a_2 + 2b_1 + b_2 = 1 + (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2), \\ & a_2 + b_1 = 1 + a_0 + b_0, \quad a_2 + b_1 - a_0 - b_0 = 1, \quad a_2 + b_1 + \overline{a_0} + \overline{b_0} = 3; \end{aligned}$$

$$2) \ a_1 + 2a_2 + b_1 + 2b_2 = 3, \ a_1 + 2a_2 + b_1 + 2b_2 = 1 + (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2), \\ a_2 + b_2 = 1 + a_0 + b_0, \ a_2 + b_2 - a_0 - b_0 = 1, \ a_2 + b_2 + \overline{a_0} + \overline{b_0} = 3.$$

В соответствии с доказанным выше утверждением логические функции R_0 , R_1 , R_2 можно представить следующим образом:

$$R_0 = a_0 \vee b_0, \\ R_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + \overline{b_0} + a_2 + b_1 = 3; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \quad (6) \\ R_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + \overline{b_0} + a_2 + b_2 = 3; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

На рис.2(b) изображена логическая схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$, синтезированная на основе использования (6). Схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$ содержит элемент ИЛИ, два элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом три и имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_2) = 10$, $g(\mathfrak{R}_2) = 1$ и $m(\mathfrak{R}_2) = 8$.

Схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$ имеет меньшее число внешних выводов, а схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$ – меньшую сложность (по числу входов логических элементов).

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ПО МОДУЛЮ ТРИ

Пусть устройство $\mathfrak{R}$ реализует некоторую суперпозицию операций сложения и умножения. При синтезе устройства $\mathfrak{R}$ можно использовать блочно-структурный метод логического синтеза [6]. Суть метода состоит в следующем. Первоначально формируется структура устройства $\mathfrak{R}$, состоящая из взаимосвязанных «блоков», реализующих арифметические операции сложения и умножения. Затем каждый из «блоков» заменяется подходящей (для этой структуры) логической схемой.

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза устройства $\mathfrak{R}^*$, предназначенного для реализации в унитарных кодах арифметической операции $A \cdot B + C \cdot D = S \pmod{3}$.

Структура устройства $\mathfrak{R}^*$ содержит один «блок» сложения и два «блока» умножения. Если заменить «блоки» на соответствующие логические схемы $S_2(\mathfrak{R}_1)$ и $S_2(\mathfrak{R}_2)$, которые приведены на рис.1(b) и рис.2(b), то получим логическую схему $S(\mathfrak{R}^*)$ устройства $\mathfrak{R}^*$, изображенную на рис.3.

Логическая схема $S(\mathfrak{R}^*)$ содержит два элемента ИЛИ, два элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом три, три элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом два и обладает следующими характеристиками: $l(\mathfrak{R}^*) = 28$, $g(\mathfrak{R}^*) = 2$ и $m(\mathfrak{R}^*) = 11$. Логическая схема $S(\mathfrak{R}^*)$ является более эффективной по сравнению со своими аналогами (см. Патенты на изобретение РБ 9341, 10535).

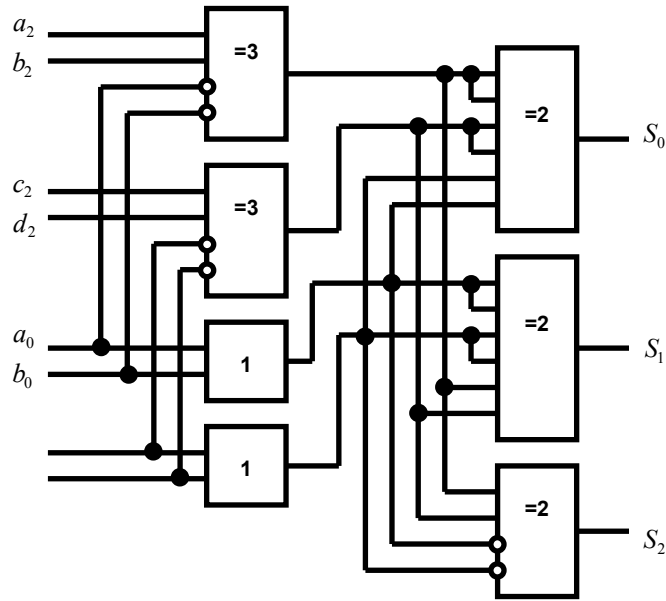


Рис.3. Логическая схема $S(\mathfrak{R}^*)$ вычислительного устройства $\mathfrak{R}^*$.

6. СЛОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ПЯТЬ

Рассмотрим операцию сложения $A + B = S \pmod{5}$ в унитарных кодах, где

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4), \quad B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4), \quad S = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4), \quad \text{а } s_k = 1$$

тогда и только тогда, когда $A + B = k \pmod{5}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Из утверждения 1 следует, что логические функции S_0, S_1, S_2, S_3 и S_4 , реализуемые на выходах сумматора $\mathfrak{R}_1$, можно представить как

- $S_0 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_0 + b_0 = 2$, $a_1 + b_4 = 2$, $a_2 + b_3 = 2$, $a_3 + b_2 = 2$, $a_4 + b_1 = 2$;
- $S_1 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_0 + b_1 = 2$, $a_1 + b_0 = 2$, $a_2 + b_4 = 2$, $a_3 + b_3 = 2$, $a_4 + b_2 = 2$;
- $S_2 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_0 + b_2 = 2$, $a_1 + b_1 = 2$, $a_2 + b_0 = 2$, $a_3 + b_4 = 2$, $a_4 + b_3 = 2$;
- $S_3 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_0 + b_3 = 2$, $a_1 + b_2 = 2$, $a_2 + b_1 = 2$, $a_3 + b_0 = 2$, $a_4 + b_4 = 2$;
- $S_4 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_0 + b_4 = 2$, $a_1 + b_3 = 2$, $a_2 + b_2 = 2$, $a_3 + b_1 = 2$, $a_4 + b_0 = 2$.

Далее приведем более простые аналитические описания функций S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 .

Утверждение 6. Функция $S_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_1 = a_4 + b_4$ и $a_2 + b_2 = a_3 + b_3$; функция $S_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2 = a_4 + b_4$; функция $S_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = a_2 + b_2$ и $a_3 + b_3 = a_4 + b_4$; функция $S_3 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = a_3 + b_3$ и $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$; функция $S_4 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b_0 = a_4 + b_4$ и $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (относительно описания функции S_0) необходимо рассмотреть пять случаев, т.е. $a_0 + b_0 = 2$, $a_1 + b_4 = 2$, $a_2 + b_3 = 2$, $a_3 + b_2 = 2$ и $a_4 + b_1 = 2$.

Если $a_0 + b_0 = 2$, то $a_0 = 1$ и $b_0 = 1$. Тогда $a_1 + b_1 = a_4 + b_4 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 0$, т.е. $a_1 + b_1 = a_4 + b_4$ и $a_2 + b_2 = a_3 + b_3$.

Если $a_1 + b_4 = 2$, то $a_1 = 1$ и $b_4 = 1$. Тогда $a_1 + b_1 = a_4 + b_4 = 1$ и $a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 0$.

Если $a_2 + b_3 = 2$, то $a_2 = 1$ и $b_3 = 1$. Тогда $a_1 + b_1 = a_4 + b_4 = 0$ и $a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 1$.

Если $a_3 + b_2 = 2$, то $a_3 = 1$ и $b_2 = 1$. Тогда $a_1 + b_1 = a_4 + b_4 = 0$ и $a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 1$.

Если $a_4 + b_1 = 2$, то $a_4 = 1$ и $b_1 = 1$. Тогда $a_1 + b_1 = a_4 + b_4 = 1$ и $a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 0$.

Отсюда следует справедливость утверждения для функции S_0 . Утверждения относительно остальных функций S_1 , S_2 , S_3 и S_4 , доказываются по аналогичной схеме.

Так как

$$\overline{a_3} = 1 - a_3, \quad \overline{b_3} = 1 - b_3, \quad \overline{a_4} = 1 - a_4 \quad \text{и} \quad \overline{b_4} = 1 - b_4,$$

то можно утверждать, что условия

$$a_1 + b_1 = a_4 + b_4 \quad \text{и} \quad a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

эквивалентны условиям

$$a_1 + b_1 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2 \quad \text{и} \quad a_2 + b_2 + \overline{a_3} + \overline{b_3} = 2.$$

Аналогично можно доказать, что условия

$$a_0 + b_0 = a_1 + b_1 \quad \text{и} \quad a_2 + b_2 = a_4 + b_4, \quad a_0 + b_0 = a_2 + b_2 \quad \text{и} \quad a_3 + b_3 = a_4 + b_4,$$

$$a_0 + b_0 = a_3 + b_3 \quad \text{и} \quad a_1 + b_1 = a_2 + b_2, \quad a_0 + b_0 = a_4 + b_4 \quad \text{и} \quad a_1 + b_1 = a_3 + b_3$$

эквивалентны условиям

$$a_0 + b_0 + \overline{a_1} + \overline{b_1} = 2 \quad \text{и} \quad a_2 + b_2 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2, \quad a_0 + b_0 + \overline{a_2} + \overline{b_2} = 2 \quad \text{и} \quad a_3 + b_3 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2,$$

$$a_0 + b_0 + \overline{a_3} + \overline{b_3} = 2 \quad \text{и} \quad a_1 + b_1 + \overline{a_2} + \overline{b_2} = 2, \quad a_0 + b_0 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2 \quad \text{и} \quad a_1 + b_1 + \overline{a_3} + \overline{b_3} = 2,$$

соответственно.

Исходя из приведенных выше рассуждений, следует, что описание логических функций S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 посредством утверждения 6, эквивалентно системе условий

$$\begin{aligned} S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + b_1 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2 \text{ и } a_2 + b_2 + \overline{a_3} + \overline{b_3} = 2; \\ 0 & - \text{ в противном случае,} \end{cases} \\ S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + b_0 + \overline{a_1} + \overline{b_1} = 2 \text{ и } a_2 + b_2 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2; \\ 0 & - \text{ в противном случае,} \end{cases} \\ S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + b_0 + \overline{a_2} + \overline{b_2} = 2 \text{ и } a_3 + b_3 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2; \\ 0 & - \text{ в противном случае,} \end{cases} \\ S_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + b_0 + \overline{a_3} + \overline{b_3} = 2 \text{ и } a_1 + b_1 + \overline{a_2} + \overline{b_2} = 2; \\ 0 & - \text{ в противном случае,} \end{cases} \\ S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + b_0 + \overline{a_4} + \overline{b_4} = 2 \text{ и } a_1 + b_1 + \overline{a_3} + \overline{b_3} = 2; \\ 0 & - \text{ в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Систему условий (7) можно использовать при синтезе логической схемы $S(\mathfrak{R}_1)$ сумматора $\mathfrak{R}_1$, предназначенного для реализации операции сложения $A+B=S \pmod{5}$. В таком случае логическая схема $S(\mathfrak{R}_1)$ будет содержать десять элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом два (каждый из которых имеет четыре входа), пять элементов И и будет иметь следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_1)=50$, $g(\mathfrak{R}_1)=2$ и $m(\mathfrak{R}_1)=15$.

Синтезированная таким образом логическая схема $S(\mathfrak{R}_1)$ модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$ будет более эффективной по сравнению с существующими аналогами (см., например, Патенты на изобретение РБ 2991, 10834).

7. УМНОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ПЯТЬ

Рассмотрим операцию умножения $A \cdot B = R \pmod{5}$ в унитарных кодах, где $A=(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B=(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$, $R=(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4)$, а $r_k=1$ тогда и только тогда, когда $A \cdot B = k \pmod{5}$, где $k=0,1,2,3,4$.

Из утверждения 2 следует, что логические функции R_0 , R_1 , R_2 , R_3 и R_4 , реализуемые на выходах умножителя $\mathfrak{R}_2$, можно представить, как

- $R_0=1$ тогда и только тогда, когда $a_0=1$ или $b_0=1$;
- $R_1=1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_1+b_1=2$, $a_2+b_3=2$, $a_3+b_2=2$, $a_4+b_4=2$;
- $R_2=1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_1+b_2=2$, $a_2+b_1=2$, $a_3+b_4=2$, $a_4+b_3=2$;
- $R_3=1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_1+b_3=2$, $a_2+b_4=2$, $a_3+b_1=2$, $a_4+b_2=2$;
- $R_4=1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_1+b_4=2$, $a_2+b_2=2$, $a_3+b_3=2$, $a_4+b_1=2$.

Далее приведем более простые аналитические описания функций R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 .

Утверждение 7. Функция $R_0=0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4=2$; функция $R_1=1$ тогда и только тогда, когда $a_1+2a_4+2b_1+b_4=3$ или $a_2+2a_3+b_2+2b_3=3$; функция $R_2=1$ тогда и только тогда, когда $a_1+2a_2+b_1+2b_2=3$ или $a_3+2a_4+b_3+2b_4=3$; функция $R_3=1$ тогда и только тогда, когда $a_1+2a_3+b_1+2b_3=3$ или $a_2+2a_4+b_2+2b_4=3$; функция $R_4=1$ тогда и только тогда, когда $a_1+2a_4+b_1+2b_4=3$ или $a_2+2a_3+2b_2+b_3=3$.

Доказательство. Так как функция $R_0=1$ тогда и только тогда, когда $a_0=1$ или $b_0=1$, то $R_0=0$ тогда и только тогда, когда $a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4=2$ (поскольку последнее равенство эквивалентно равенству $a_0+b_0=0$).

Условие $a_1+2a_4+2b_1+b_4=3$ эквивалентно $a_1=b_1=1$ или $a_4=b_4=1$, а условие $a_2+2a_3+b_2+2b_3=3$ эквивалентно $a_2=b_3=1$ или $a_3=b_2=1$. Следовательно, функция $R_1=1$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равенств $a_1+b_1=2$, $a_2+b_3=2$, $a_3+b_2=2$, $a_4+b_4=2$.

По аналогичной схеме проводится доказательство утверждения относительно функций R_2 , R_3 и R_4 .

Из доказанного утверждения 7 следует новое утверждение, использование которого позволяет упростить аналитическое представление функций R_0 , R_1 , R_2 , R_3 и R_4 .

Утверждение 8. Функция $R_0 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a_0 \vee b_0 = 1;$$

функция $R_1 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\overline{a_4} + \overline{b_1} + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3 = 1 \quad \text{или} \quad \overline{a_3} + \overline{b_3} + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4 = 1;$$

функция $R_2 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\overline{a_2} + \overline{b_2} + a_0 + a_3 + a_4 + b_0 + b_3 + b_4 = 1 \quad \text{или} \quad \overline{a_4} + \overline{b_4} + a_0 + a_1 + a_2 + b_0 + b_1 + b_2 = 1;$$

функция $R_3 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\overline{a_3} + \overline{b_3} + a_0 + a_2 + a_4 + b_0 + b_2 + b_4 = 1 \quad \text{или} \quad \overline{a_4} + \overline{b_4} + a_0 + a_1 + a_3 + b_0 + b_1 + b_3 = 1;$$

функция $R_4 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\overline{a_4} + \overline{b_4} + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3 = 1 \quad \text{или} \quad \overline{a_3} + \overline{b_2} + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4 = 1.$$

Доказательство. Поскольку функция $R_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 = 1$ или $b_0 = 1$, то $R_0 = a_0 \vee b_0$.

Так как

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \quad \text{и} \quad 1 - a_i = \overline{a_i}, \quad 1 - b_i = \overline{b_i} \quad (\text{где } i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

то справедливы следующие равносильные преобразования аналитического представления функции R_1 :

$$1) \quad a_1 + 2a_4 + 2b_1 + b_4 = 3,$$

$$a_1 + 2a_4 + 2b_1 + b_4 = 1 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4),$$

$$a_4 + b_1 = 1 + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3,$$

$$2 + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3 - a_4 - b_1 = 1,$$

$$\overline{a_4} + \overline{b_1} + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3 = 1;$$

$$2) \quad a_2 + 2a_3 + b_2 + 2b_3 = 3,$$

$$a_2 + 2a_3 + b_2 + 2b_3 = 1 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4),$$

$$a_3 + b_3 = 1 + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4,$$

$$2 + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4 - a_3 - b_3 = 1,$$

$$\overline{a_3} + \overline{b_3} + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4 = 1.$$

Доказательство утверждения относительно представления функций R_2, R_3, R_4 проводится аналогично.

Из доказанного утверждения 8 следует, что

$$R_0 = a_0 \vee b_0,$$

$$R_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_4} + \overline{b_1} + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3 = 1 \quad \text{или} \quad \overline{a_3} + \overline{b_3} + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4 = 1; \\ 0 & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_2} + \overline{b_2} + a_0 + a_3 + a_4 + b_0 + b_3 + b_4 = 1 \text{ или } \overline{a_4} + \overline{b_4} + a_0 + a_1 + a_2 + b_0 + b_1 + b_2 = 1; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_3} + \overline{b_3} + a_0 + a_2 + a_4 + b_0 + b_2 + b_4 = 1 \text{ или } \overline{a_4} + \overline{b_4} + a_0 + a_1 + a_3 + b_0 + b_1 + b_3 = 1; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_4} + \overline{b_4} + a_0 + a_2 + a_3 + b_0 + b_2 + b_3 = 1 \text{ или } \overline{a_3} + \overline{b_2} + a_0 + a_1 + a_4 + b_0 + b_1 + b_4 = 1; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Приведенную выше систему условий можно использовать при синтезе логической схемы $S(\mathfrak{R}_2)$ умножителя $\mathfrak{R}_2$, предназначенного для реализации операции умножения $A \cdot B = S \pmod{5}$. Синтезированная при этом логическая схема $S(\mathfrak{R}_2)$ будет содержать восемь элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, каждый из которых имеет восемь входов, и пять элементов ИЛИ. Схема $S(\mathfrak{R}_2)$ будет иметь следующие характеристики:

$$l(\mathfrak{R}_2) = 74, \quad g(\mathfrak{R}_2) = 2 \quad \text{и} \quad m(\mathfrak{R}_2) = 15.$$

Логическая схема $S(\mathfrak{R}_2)$ превосходит по некоторым характеристикам существующие аналоги (см., например, Патенты на изобретение РБ 10531, 10652, 13493).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предлагаются аналитические представления логических функций, реализуемых на выходах модулярного сумматора и модулярного умножителя при условии, что $P = 3$ и $P = 5$. На основе применения предлагаемых аналитических представлений синтезированы логические схемы сумматоров и умножителей, отличающихся друг от друга сложностью и числом внешних выводов. Синтезированные логические схемы сумматоров и умножителей превосходят все существующие аналоги по сложности, глубине или числу внешних выводов. В качестве примера была рассмотрена задача синтеза устройства, реализующего суперпозицию операций сложения и умножения. При решении этой задачи был использован метод из [6].

На все логические схемы, приведенные в статье, подготовлены и поданы заявки на Патенты на изобретение Республики Беларусь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долгов А.И. Диагностика устройств, функционирующих в системе остаточных классов. М.: Радио и связь, 1982.
- [2] Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Ряднов С.А. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем / Под ред. Н.И. Червякова. М.: Физматлит, 2003.
- [3] Корнилов А.И., Семенов М.Ю., Калашиников В.С. Методы аппаратной оптимизации сумматоров для двух операндов в системе остаточных классов // Известия ВУЗов. Электроника. – 2004. № 1. С. 75 – 82.
- [4] Супрун В.П., Городецкий Д.А. Синтез n -операндных сумматоров по модулю три // Автоматика и вычислительная техника. – 2010. № 3. С. 72 – 80.

[5] *Стемпковский А.Л., Корнилов А.И., Семенов М.Ю.* Особенности реализации устройств цифровой обработки сигналов в интегральном исполнении с применением модулярной арифметики // Информационные технологии. – 2004. № 2. С. 2-9.

[6] *Супрун В.П., Городецкий Д.А.* Метод блочно-структурного синтеза вычислительных устройств модулярной арифметики // Информатика. – 2009. № 4 (24). С. 74 – 79.

Рукопись получена 22.06.2010