# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

УДК 681.325:519.713

В. П. Супрун, Д. А. Городецкий

## РЕАЛИЗАЦИЯ БИСИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЛОГИЧЕСКИМИ СХЕМАМИ

Предлагаются новые способы представления бисимметрических булевых функций посредством фундаментальных и полиномиально-однородных симметрических булевых функций. Приводятся эффективные логические схемы, реализующие бисимметрические булевы функции, которые зависят от четырех и пяти переменных.

***Ключевые слова:*** *бисимметрические булевы функции, фундаментальные симметрические булевы функции, полиномиально-однородные симметрические булевы функции, логические схемы.*

**Введение.** При проектировании вычислительных устройств возникает задача реализации на одном логическом модуле всех булевых функций, принадлежащих определенному классу, в качестве которого часто используется класс симметрических булевых функций или некоторые его подклассы. Интерес к симметрическим булевым функциям (или функциям, обладающим свойством частичной симметрии переменных) объясняется тем, что такими булевыми функциями описываются структура и поведение многих типовых устройств вычислительной техники [1]. Например, $n$-входовый одноразрядный сумматор, $n$-операндный сумматор по модулю $P$, схема контроля четности (нечетности).

К настоящему времени задача вычисления (реализации) на одном логическом модуле произвольных симметрических булевых функций практически решена [2—4]. Также получены результаты по реализации на одном логическом модуле фундаментальных [5] и полиномиально-однородных [6] симметрических булевых функций, частично симметрических булевых функций [7]. Кроме того, многие устройства, разработанные одним из авторов, защищены Патентами на изобретение Республики Беларусь (см. Патенты № 1433, 1587, 2117, 2118, 2119, 2377, 2793, 2990, 5171, 5173, 5174, 5178, 5179, 5838, 5938, 6995, 7592, 7947, 8421, 8566, 8619, 8859, 8973, 9051, 9147, 10216, 10219, 10549, 11024, 11027, 11028, 11275, 11785).

В настоящей статье приводятся новые аналитические представления бисимметрических булевых функций $n$ переменных. На основе применения приведенных здесь аналитических представлений предлагаются логические схемы устройств, предназначенных для вычисления бисимметрических булевых функций, которые зависят от четырех и пяти переменных.

**Основные понятия и определения.** Произвольная симметрическая булева функция $n$ переменных $F(X)=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеризуется множеством рабочих чисел $A(F)=\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Функция $F$ принимает единичные значения на тех и только тех наборах значений $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые содержат ровно $a_i$ единиц, где $0 \le a_i \le n$, $0 \le i \le r$ и $0 \le r \le n+1$. Такая функция $F$ обозначается как $F = F_n^{a_1, a_2, \ldots, a_r}(X)$.

Если $r = 1$, то функция $F = F_n^a(X)$ называется *фундаментальной* (или элементарной) симметрической булевой функцией.

Симметрическая булева функция $n$ переменных $F = F(X)$ называется *полиномиально-однородной*, если ее полином Жегалкина содержит (все) элементарные конъюнкции, ранг которых равен $k$, где $0 \le k \le n$. Полиномиально-однородные симметрические функции обозначаются через $E_n^k = E_n^k(X)$. Из определения следует, что $E_n^0 = 1$, $E_n^1 = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, $E_n^2 = x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_1 x_n \oplus \ldots \oplus x_{n-1} x_n$, $\ldots$, $E_n^n = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Произвольная симметрическая булева функция $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взаимно однозначно представляется $(n+1)$-разрядным (локальным) двоичным кодом $\pi(F) = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, где $\pi_i$ — значение функции $F$ на (любом) наборе значений $n$ переменных, содержащем $i$ $(0 \le i \le n)$ единиц. Иначе, $\pi_i = 1$ тогда и только тогда, когда $i$ — рабочее число функции $F$.

Известно, что отношение частичной симметрии переменных произвольной булевой функции $F = F(X)$ разбивает (единственным образом) множество ее переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на классы симметрии $X_1, X_2, \ldots, X_k$, где $1 \le k \le n$. Если $k = 1$, то функция $F$ является (полностью) симметрической; если $k = 2$, то $F$ — *бисимметрическая* булева функция; если $k = n$, то функция $F$ не обладает свойством частичной симметрии переменных. Если $3 \le k \le n-1$, то функция $F(X) = F(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ называется *частично симметрической* (или полисиммерической).

Булеву функцию $F = F(X_1, X_2)$, где $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $X_2 = \{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\}$, при $n \ge 4$ и $2 \le r \le n-2$, будем называть бисимметрической булевой функцией типа „$r,\, n-r$“.

Обозначим через $\Re(n)$ и $\Re(r,\, n-r)$ устройства, реализующие на своем единственном выходе (при соответствующей настройке) симметрическую булеву функцию $n$ переменных $F = F(X)$ и бисимметрическую булеву функцию $F = F(X_1, X_2)$ типа „$r,\, n-r$“ соответственно.

Конструктивная сложность $l(\Re(n))$ и $l(\Re(r,\, n-r))$ устройств $\Re(n)$ и $\Re(r,\, n-r)$ определяется как суммарное число входов логических элементов, содержащихся в соответствующих логических схемах. Под глубиной логических схем $g(\Re(n))$ и $g(\Re(r,\, n-r))$, как обычно, понимается максимальное число элементов схемы, через которые сигнал распространяется от ее входных полюсов к выходному.

При разработке эффективных методов синтеза логических схем устройств $\Re(n)$ и $\Re(r,\, n-r)$ необходимо стремиться к построению схем, оптимальных как по сложности, так и по глубине. Такая задача является весьма сложной и поэтому любые результаты, полученные в этом направлении, представляют определенный интерес для теории и практики проектирования устройств вычислительной техники.

**Аналитические представления функций $F = F(X_1, X_2)$.** В работе [8] приведено аналитическое представление бисимметрической булевой функции типа „$r,\, n-r$“ следующего вида:

$$F(X_1, X_2) = \bigvee_{j=0}^{r^*-1} \omega_j F_r^{j_1}(X_1) F_{n-r}^{j_2}(X_2), \qquad (1)$$

где $\omega_j \in \{0,1\}$; $F_r^{j_1}(X_1)$ — фундаментальная симметрическая булева функция, зависящая от $r$ переменных множества $X_1$, рабочее число которой равно $j_1$ (функция $F_{n-r}^{j_2}(X_2)$ определяется аналогичным образом); $r^* = (r+1)(n-r+1)$; $j = j_1(n-r+1) + j_2$ и $0 \le j_1 \le r$, $0 \le j_2 \le n-r$.

Из формулы (1) следует, что бисимметрическая булева функция $F = F(X_1, X_2)$ взаимно однозначно задается посредством $r^*$-разрядного двоичного вектора $\omega(F) = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{r^*-1})$. Отсюда следует, что число различных бисимметрических булевых функций типа „$r, n-r$“ равно $2^{(r+1)(n-r+1)}$.

Если к функции $F = F(X_1, X_2)$ применить формулу дизъюнктивного разложения по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_r$, то с учетом того, что функция $F = F(X_1, X_2)$ является симметрической относительно каждого из множеств переменных $X_1$ и $X_2$ в отдельности, получим

$$F(X_1, X_2) = F_r^0(X_1)G_0(X_2) \vee F_r^1(X_1)G_1(X_2) \vee \ldots \vee F_r^r(X_1)G_r(X_2), \tag{2}$$

где $F_r^0(X_1), F_r^1(X_1), \ldots, F_r^r(X_1)$ — фундаментальные симметрические булевы функции $r$ переменных множества $X_1$; $G_0(X_2), G_1(X_2), \ldots, G_r(X_2)$ — некоторые симметрические булевы функции, зависящие от $n-r$ переменных множества $X_2$. Непосредственно из формулы (2) следует, что $\omega(F) = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{r^*-1}) = (\pi(G_0), \pi(G_1), \ldots, \pi(G_r))$, где $\pi(G_i)$ — локальный двоичный код симметрической булевой функции $n-r$ переменных $G_i = G_i(X_2)$ и $i = 0,1,\ldots,r$.

Принимая во внимание формулу (2), можно сделать вывод о том, что существует логическая схема устройства $\Re(r, n-r)$, состоящая из фундаментального симметрического многополюсника на $r$ входов (устройства, предназначенного для одновременной реализации всех $r+1$ фундаментальных симметрических булевых функций $F_r^0(X_1)$, $F_r^1(X_1), \ldots, F_r^r(X_1)$, зависящих от $r$ переменных), $r+1$ устройств для вычисления симметрических булевых функций $n-r$ переменных $G_0(X_2), G_1(X_2), \ldots, G_r(X_2)$, $r+1$ двухвходовых элементов И и одного ($r$+1)-входового элемента ИЛИ.

Для построения более эффективной (с точки зрения оптимизации конструктивной сложности) логической схемы $\Re(r, n-r)$ необходимо преобразовать формулу (2), используя для этого следующие логические равносильности: если $ab = 0$, то $a \vee b = a \oplus b$; $\overline{a} = a \oplus 1$ и $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$, где $a, b, c \in \{0,1\}$.

Тогда после несложных преобразований из формулы (2) получаем

$$F(X_1, X_2) = E_r^0(X_1)H_0(X_2) \oplus E_r^1(X_1)H_1(X_2) \oplus \ldots \oplus E_r^r(X_1)H_r(X_2), \tag{3}$$

где $E_r^0(X_1), E_r^1(X_1), \ldots, E_r^r(X_1)$ — полиномиально-однородные симметрические булевы функции $r$ переменных множества $X_1$; $H_0(X_2), H_1(X_2), \ldots, H_r(X_2)$ — симметрические булевы функции $n-r$ переменных множества $X_2$, которые зависят от функций $G_0(X_2), G_1(X_2), \ldots, G_r(X_2)$.

Для установления зависимости функций $H_0(X_2), H_1(X_2), \dots, H_r(X_2)$ от $G_0(X_2)$, $G_1(X_2), \dots, G_r(X_2)$ введем в рассмотрение два $2^m$-разрядных вектора-столбца $g_m$, $h_m$ и $(2^m \times 2^m)$-матрицу трансформации $S_m$, где значение $m$ вычисляется из двойного неравенства $2^{m-1} < r+1 \le 2^m$.

Будем считать, что $g_m = (G_0, G_1, \dots, G_r, 0, \dots, 0)$ и $h_m = (H_0, H_1, \dots, H_r, 0, \dots, 0)$, а матрицу трансформации $S_m$ определим рекурсивным образом: $S_0 = [1]$ и $S_j = \begin{bmatrix} S_{j-1} & 0 \\ S_{j-1} & S_{j-1} \end{bmatrix}$, где $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда зависимость векторов $g_m$ и $h_m$ друг от друга выражается векторно-матричным уравнением $S_m \otimes g_m = h_m$, где через символ $\otimes$ обозначена операция сложения по модулю два элементарных конъюнкций.

**Пример 1.** Пусть $r = 7$, тогда $m = 3$ и уравнение $S_3 \otimes g_3 = h_3$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \\ G_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует система логических уравнений, которая представляет собой зависимость функций $H_0(X_2), H_1(X_2), \dots, H_r(X_2)$ от $G_0(X_2), G_1(X_2), \dots, G_r(X_2)$:

$$\left.\begin{array}{l} G_0(X_2) = H_0(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) = H_1(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_2(X_2) = H_2(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) \oplus G_2(X_2) \oplus G_3(X_2) = H_3(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_4(X_2) = H_4(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) \oplus G_4(X_2) \oplus G_5(X_2) = H_5(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_2(X_2) \oplus G_4(X_2) \oplus G_6(X_2) = H_6(X_2), \\ G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) \oplus \dots \oplus G_7(X_2) = H_7(X_2). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Следует отметить, что локальные коды симметрических булевых функций $H_0(X_2)$, $H_1(X_2), \dots, H_r(X_2)$ и $G_0(X_2), G_1(X_2), \dots, G_r(X_2)$ при условии, что $2^{m-1} < r+1 \le 2^m$, связаны между собой таким же образом, как и сами функции.

**Логическая схема устройства** $\Re(2)$. Из представления функции $F = F(X_1, X_2)$ посредством формулы (3) следует, что для построения эффективных логических схем устройств $\Re(2, 2)$ и $\Re(3, 2)$ необходимо иметь оптимальную (в определенном смысле) логическую схему устройства $\Re(2)$, которое предназначено для вычисления (реализации) произвольных симметрических функций $F$, зависящих от двух переменных $z_1$ и $z_2$.

На рис. 1 приведена логическая схема устройства $\Re(2)$, синтезированная эвристическим способом. Устройство $\Re(2)$ имеет три входа, на которые подается двоичный вектор настройки $u(F)=(u_0,u_1,u_2)$, значения разрядов которого определяются с помощью таблицы настройки.

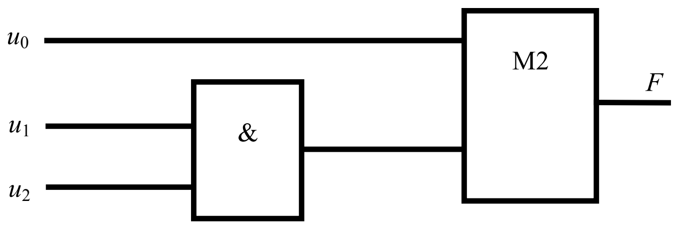


*Рис. 1*

| Сигналы настройки | | | Выход |
|---|---|---|---|
| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $\pi(F)$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 0 0 |
| 0 | $z_1$ | $z_2$ | 0 0 1 |
| $z_1$ | $z_2$ | 1 | 0 1 0 |
| 1 | $\overline{z}_1$ | $\overline{z}_2$ | 0 1 1 |
| 0 | $\overline{z}_1$ | $\overline{z}_2$ | 1 0 0 |
| $\overline{z}_1$ | $z_2$ | 1 | 1 0 1 |
| 1 | $z_1$ | $z_2$ | 1 1 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 1 1 |

Сложность и глубина устройства $\Re(2)$ равны $l(\Re(2))=3$ и $g(\Re(2))=2$. Логическая схема устройства $\Re(2)$, приведенная на рис. 1, является наиболее простой из всех существующих аналогов.

**Логическая схема устройства $\Re(2,2)$.** Для бисимметрической булевой функции $F=F(X_1,X_2)$, где $X_1=\{x_1,x_2\}$ и $X_2=\{x_3,x_4\}$, формула (3) принимает вид

$$F(X_1,X_2)=E_2^0(x_1,x_2)H_0(x_3,x_4)\oplus E_2^1(x_1,x_2)H_1(x_3,x_4)\oplus E_2^2(x_1,x_2)H_2(x_3,x_4)$$

или

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=H_0(x_3,x_4)\oplus(x_1\oplus x_2)H_1(x_3,x_4)\oplus x_1x_2H_2(x_3,x_4). \quad (5)$$

Из системы уравнений (4) следует, что для формулы (5) справедливы следующие соотношения: $\pi(H_0)=\pi(G_0)$, $\pi(H_1)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)$ и $\pi(H_2)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_2)$.

На рис. 2 приведена логическая схема устройства $\Re(2,2)$, которая синтезирована на основе применения формулы (5) с использованием схемы $\Re(2)$ (см. рис. 1). При этом логическая схема $\Re(2)$ была использована трижды.

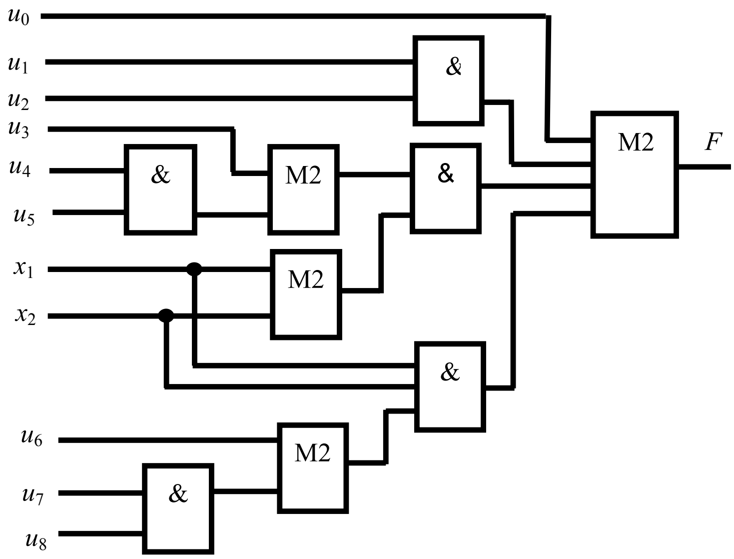


*Рис. 2*

Поясним метод построения вектора $u(F)=(u_0, u_1, \dots, u_8)$ — вектора настройки устройства $\Re(2, 2)$ на вычисление заданной функции $F = F(X_1, X_2)$.

С помощью локального кода $\pi(H_0)$ из таблицы получаем значения первых трех разрядов $u_0, u_1, u_2$ вектора $u(F)$. Естественно, что при этом необходимо заменить переменные $z_1$ и $z_2$ на переменные $x_3$ и $x_4$ соответственно.

Далее с помощью локальных кодов $\pi(H_1)$ и $\pi(H_2)$ из таблицы получаем значения остальных разрядов $u_3, u_4, u_5$ и $u_6, u_7, u_8$ вектора настройки $u(F)$.

**Пример 2.** Предположим, что на выходе устройства $\Re(2, 2)$ (см. рис. 2) требуется реализовать бисимметрическую булеву функцию

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3 \oplus x_4) \vee (x_1 \vee x_2) x_3 x_4 .$$

Так как

$$F = \overline{x_1}\,\overline{x_2}(\overline{x_3}\, x_4 \vee x_3\, \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1}\, x_2 \vee x_1\, \overline{x_2}) x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 ,$$

то

$$F = \overline{x_1}\,\overline{x_2} G_0(x_3, x_4) \vee (\overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}) G_1(x_3, x_4) \vee x_1 x_2 G_2(x_3, x_4),$$

где $\pi(G_0)=(0,1,0)$ и $\pi(G_1)=\pi(G_2)=(0,0,1)$.

Отсюда следует, что двоичный код бисимметрической булевой функции $F = F(X_1, X_2)$ равен $\omega(F)=(\pi(G_0), \pi(G_1), \pi(G_2))=(0,1,0,0,0,1,0,0,1)$.

Из системы уравнений (4) получаем $\pi(H_0)=\pi(G_0)$, $\pi(H_1)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)$ и $\pi(H_2)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_2)$. Так как $\pi(G_0)=(0,1,0)$ и $\pi(G_1)=\pi(G_2)=(0,0,1)$, то $\pi(H_0)=(0,1,0)$, $\pi(H_1)=(0,1,1)$ и $\pi(H_2)=(0,1,1)$.

Принимая во внимание описанную выше процедуру построения вектора настройки $u(F)$, получаем $u_0 = x_3$, $u_1 = x_4$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = \overline{x_3}$, $u_5 = \overline{x_4}$, $u_6 = 1$, $u_7 = \overline{x_3}$ и $u_8 = \overline{x_4}$.

Первообразная функция устройства $\Re(2, 2)$ имеет вид

$$F(x_1, x_2, u_0, u_1, \dots, u_8) = u_0 \oplus u_1 u_2 \oplus (x_1 \oplus x_2)(u_3 \oplus u_4 u_5) \oplus x_1 x_2 (u_6 \oplus u_7 u_8).$$

Сложность и глубина логической схемы устройства $\Re(2, 2)$ составляют $l(\Re(2, 2)) = 21$ и $g(\Re(2, 2)) = 4$. Кроме того, число внешних выводов схемы равно 12. Отметим, что приведенная выше логическая схема $\Re(2, 2)$ предназначена для реализации любой из 512 бисимметрических булевых функций типа „2,2“.

**Логическая схема устройства** $\Re(3, 2)$. Формула (3) применительно к бисимметрической булевой функции $F = F(X_1, X_2)$, у которой $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $X_2 = \{x_4, x_5\}$, принимает вид

$$F(X_1, X_2) = E_3^0(X_1) H_0(X_2) \oplus E_3^1(X_1) H_1(X_2) \oplus E_3^2(X_1) H_2(X_2) \oplus E_3^3(X_1) H_3(X_2)$$

или

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = H_0(x_4, x_5) \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) H_1(x_4, x_5) \oplus \\ \oplus (x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3) H_2(x_4, x_5) \oplus x_1 x_2 x_3 H_3(x_4, x_5). \end{aligned} \qquad (6)$$

Из системы (4) получаем $\pi(H_0)=\pi(G_0)$, $\pi(H_1)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)$, $\pi(H_2)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_2)$ и $\pi(H_3)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)\oplus\pi(G_2)\oplus\pi(G_3)$.

Логическая схема устройства $\Re(3,\,2)$, синтезированная на основе применения формулы (6), приведена на рис. 3. Причем при ее построении была использована (четыре раза) логическая схема устройства $\Re(2)$.

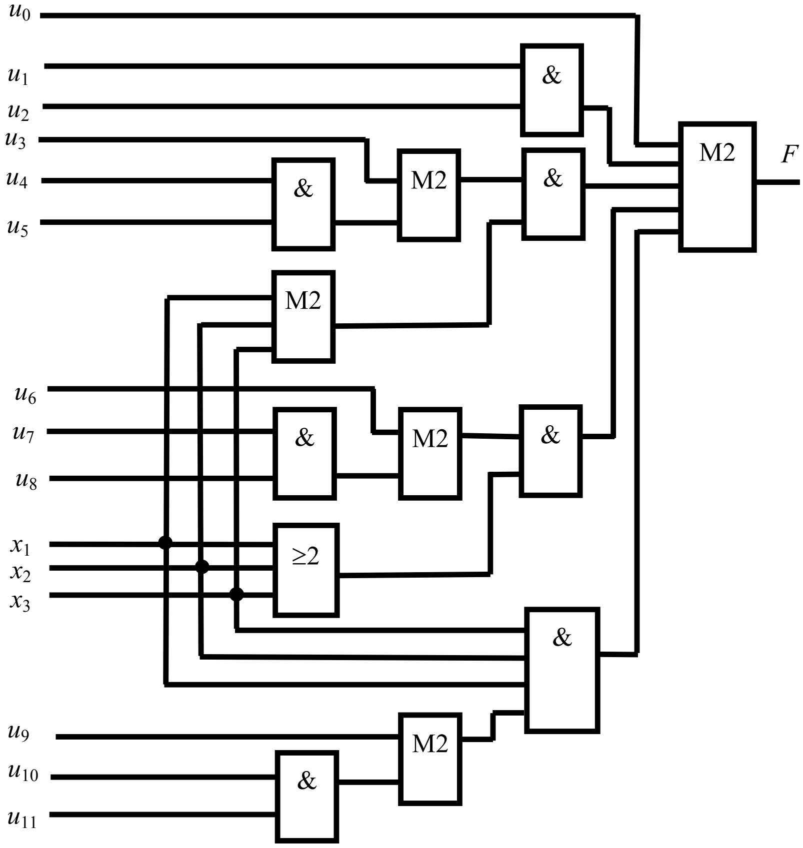


*Рис. 3*

Настройка устройства $\Re(3,\,2)$ осуществляется по аналогии с настройкой устройства $\Re(2,\,2)$, рассмотренной в предыдущем разделе. Однако при построении вектора настройки $u(F)=(u_0, u_1,\,\ldots\,, u_{11})$ необходимо четыре раза обратиться к таблице.

Первообразная функция логической схемы устройства $\Re(3,\,2)$, приведенной на рис. 3, имеет вид

$$F\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,u_0,u_1,\,\ldots\,,u_{11}\right)=u_0\oplus u_1u_2\oplus\left(x_1\oplus x_2\oplus x_3\right)\left(u_3\oplus u_4u_5\right)\oplus$$
$$\oplus\left(x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\right)\left(u_6\oplus u_7u_8\right)\oplus x_1x_2x_3\left(u_9\oplus u_{10}u_{11}\right).$$

**Пример 3.** Предположим, что на выходе устройства $\Re(3,\,2)$ требуется реализовать бисимметрическую булеву функцию

$$F\left(X_1,X_2\right)=\overline{x_1}\;\overline{x_2}\;\overline{x_3}\left(x_4\vee x_5\right)\vee\left(x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3\right)x_4x_5,$$

где $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $X_2=\{x_4,x_5\}$.

Так как

$$F\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)=\overline{x_1}\;\overline{x_2}\;\overline{x_3}\left(x_4\vee x_5\right)\vee\left(\overline{x_1}\;\overline{x_2}\;x_3\vee\overline{x_1}\;x_2\;\overline{x_3}\vee x_1\;\overline{x_2}\;\overline{x_3}\right)0\vee$$
$$\vee\left(\overline{x_1}x_2x_3\vee x_1\overline{x_2}x_3\vee x_1x_2\overline{x_3}\right)x_4x_5\vee x_1x_2x_3x_4x_5,$$

то

$$F\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)=F_3^0\left(x_1,x_2,x_3\right)G_0\left(x_4,x_5\right)\vee F_3^1\left(x_1,x_2,x_3\right)G_1\left(x_4,x_5\right)\vee$$
$$\vee F_3^2\left(x_1,x_2,x_3\right)G_2\left(x_4,x_5\right)\vee F_3^3\left(x_1,x_2,x_3\right)G_3\left(x_4,x_5\right),$$

где $\pi(G_0)=(0,1,1)$, $\pi(G_1)=(0,0,0)$ и $\pi(G_2)=\pi(G_3)=(0,0,1)$.

Двоичный код $\omega(F)$ бисимметрической булевой функции $F=F(X_1,X_2)$ равен $\omega(F)=(\pi(G_0),\pi(G_1),\pi(G_2),\pi(G_3))=(0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,1)$.

Принимая во внимание систему уравнений (4), вычисляем локальные коды симметрических булевых функций $H_0(x_4,x_5)$, $H_1(x_4,x_5)$, $H_2(x_4,x_5)$, $H_3(x_4,x_5)$, входящих в разложение (6), согласно следующим формулам:

$$H_0(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5),\ H_1(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5)\oplus G_1(x_4,x_5),$$
$$H_2(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5)\oplus G_2(x_4,x_5),$$
$$H_3(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5)\oplus G_1(x_4,x_5)\oplus G_2(x_4,x_5)\oplus G_3(x_4,x_5).$$

Так как здесь $\pi(G_0)=(0,1,1)$, $\pi(G_1)=(0,0,0)$, $\pi(G_2)=\pi(G_3)=(0,0,1)$, то $\pi(H_0)=(0,1,1)$, $\pi(H_1)=(0,1,1)$ $\pi(H_2)=(0,1,0)$ и $\pi(H_3)=(0,1,1)$.

Из таблицы настроек устройства $\Re(2)$ применительно к симметрическим булевым функциям $H_0=H_0(x_4,x_5)$, $H_1=H_1(x_4,x_5)$, $H_2=H_2(x_4,x_5)$, $H_3=H_3(x_4,x_5)$, получаем $u_0=1$, $u_1=\overline{x_4}$, $u_2=\overline{x_5}$, $u_3=1$, $u_4=\overline{x_4}$, $u_5=\overline{x_5}$, $u_6=x_4$, $u_7=x_5$, $u_8=1$, $u_9=1$, $u_{10}=\overline{x_4}$ и $u_{11}=\overline{x_5}$.

Логическая схема устройства $\Re(3,2)$, приведенная на рис. 3, имеет сложность $l(\Re(3,2))=33$, глубину $g(\Re(3,2))=4$ и 16 внешних выводов (3 информационных и 12 настроечных входов, а также выход).

С помощью логической схемы устройства $\Re(3,2)$ при соответствующей настройке можно реализовать любую из 4096 бисимметрических булевых функций $F=F(X_1,X_2)$, где $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $X_2=\{x_4,x_5\}$.

**Заключение.** В настоящей работе приводятся логические схемы устройств $\Re(2)$, $\Re(2,2)$ и $\Re(3,2)$, которые выгодно отличаются от всех существующих аналогов по конструктивной сложности, глубине и числу внешних выводов. В частности, они превосходят по всем параметрам логическую схему устройства $\Re(r,n-r)$, описанную в работе [8].

Для построения логических схем устройств $\Re(r,n-r)$, где $n-r\geq 3$, требуется разработать (а затем использовать) эффективные логические схемы устройства $\Re(n-r)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карцев М. А.* Арифметика цифровых машин. М.: Наука, 1969. 576 с.

2. *Авгуль Л. Б., Супрун В. П.* Синтез быстродействующих логических схем методом каскадов // Изв. вузов. Приборостроение. 1993. Т. 36, № 3. С. 31—36.

3. *Авгуль Л. Б., Супрун В. П.* Синтез схем симметрических булевых функций в базисе линейной и монотонных функций // Там же. 1995. Т. 38, № 11—12. С. 33—36.

4. *Супрун В. П., Седун А. М.* Реализация симметрических булевых функций логическими схемами // Там же. 1998. Т. 41, № 9. С. 32—38.

5. *Супрун В. П., Седун А. М.* Схемная реализация фундаментальных симметрических булевых функций посредством логических устройств со сложной настройкой // Мат. IV Междунар. конф. „Автоматизация проектирования дискретных систем". Минск, 2001. Т. 2. С. 86—91.

6. *Супрун В.П.* Синтез логических устройств для вычисления полиномиально-однородных симметрических булевых функций // Мат. VI Междунар. конф. „Автоматизация проектирования дискретных систем". Минск, 2001. Т. 2. С. 146—153.

7. *Супрун В. П., Седун А. М.* Схемная реализация частично симметрических булевых функций // „Логическое проектирование“. ИТК НАН Беларуси. 2000. Вып. 5. С. 29—37.

8. *Супрун В. П., Седун А. М.* Синтез устройства для вычисления бисимметрических булевых функций // Там же. 1998. Вып. 3. С. 69—77.

**_Сведения об авторах_**

***Валерий Павлович Супрун*** — канд. техн. наук, доцент; Белорусский государственный университет, кафедра уравнений математической физики, Минск; E-mail: suprun@bsu.by

***Данила Андреевич Городецкий*** — аспирант; Белорусский государственный университет, кафедра уравнений математической физики, Минск; E-mail: danila.gorodecky@gmail.com

Рекомендована кафедрой уравнений математической физики

Поступила в редакцию 09.11.09 г.

УДК 621.391

Ю. А. Никитин

# АНАЛИЗ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА ДЛЯ СИНТЕЗА ЧАСТОТ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО АРГУМЕНТА

Предложена математическая модель для анализа двух- и многоуровневых импульсных последовательностей на выходе конечного автомата (КА), выполненного в виде накапливающего сумматора или счетчика импульсов. С помощью функций целочисленного аргумента получены в свернутом виде аналитические выражения для временного и спектрального описания импульсных потоков на выходе КА указанного вида.

***Ключевые слова:*** *конечный автомат, пассивный цифровой синтез, квазиравномерная последовательность.*

Синтез частот называют цифровым, если при формировании сетки частот используют элементы цифровой схемотехники [1], и когерентным — если синтезатор содержит единственный источник опорного (высокостабильного) колебания и при преобразованиях частот выполнено условие $\Delta f_{\text{вых}}/\Delta f_{\text{оп}} = f_{\text{вых}}/f_{\text{оп}} = N = \text{const}$ ($f_{\text{вых}}$ — частота синтезируемого колебания, $f_{\text{оп}}$ — частота опорного колебания); $N = P/Q$; $(P,Q)=1$. Числа $P$ и $Q$ — натуральные и взаимно простые, а коэффициент преобразования частоты $N = P/Q$ может быть представлен целым числом или неправильной несократимой дробью. Одним из необходимых элементов цифрового синтеза частот является конечный автомат (КА).

Заметим, что описание формируемых КА колебаний как во временной области, так и в спектральной, представляет значительный теоретический и практический интерес, позволяет понимать закономерности работы КА и строить его математические модели, ориентированные на решение задач цифрового синтеза частот.

Целью настоящей работы является анализ функционирования КА в пассивных и активных цифровых синтезаторах частот, а также временно́е описание импульсных потоков, формируемых на выходе конечного автомата вида накапливающего сумматора (НС) или счетчика импульсов (СИ) с помощью функций целочисленного аргумента.

Применительно к теории и технике синтеза частот задачу КА можно определить двумя способами.