

Рис. 3. Положение материальной точки (а) и значения обратной связи (б), полученные: 1 – методами оптимального управления и 2 – в работе [5]

УДК 517.925

В.И. ГРОМАК, М.С. НЕЛЕПКО

О СТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

In the article all power expansions of solutions of the second Painleve equation of the fourth order are received. For this purpose power geometry method has been used.

В настоящей работе получены все степенные разложения второго уравнения Пенлеве четвертого порядка (${}_4P_2$) [1-4]

Для этого нами был использован метод, развитый А.Д. Брюно [5] и примененный им для решения аналогичной задачи для второго уравнения Пенлеве [6]

Этот метод основан на степенной геометрии и позволяет для обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(Z) := \sum c z^p w^q \frac{\partial^{k_1} w}{\partial z^{k_1}} \dots \frac{\partial^{k_m} w}{\partial z^{k_m}} = 0, \quad Z=(z, w) \in \mathbb{C}^2,$$

найти все степенные разложения решений вида

$$w = c_r z^r + \sum_s c_s z^s, \quad (2)$$

где $c \in \mathbb{C}$ - константа, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k_j \in \mathbb{N}$, причем $r\omega > s\omega$, где $\omega = -1$, если $z \rightarrow 0$, и $\omega = 1$, если $z \rightarrow \infty$.

Кратко изложим основы метода, которые нам необходимы для получения основного результата, при этом сохраним обозначения, введенные в [5].

Дифференциальной сумме $f(Z)$ ставится в соответствие *носитель суммы* $S(f) = \{Q(a) : a(z) \in f(Z)\}$, где $Q(a) \in \mathbb{R}^2$ - векторный показатель монома $a(Z)$, определяемый правилами: $Q(cz^p w^q) = (p; q)$, $Q(a^k w/dz^k) = (-k; 1)$, $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$, где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Многоугольником Ньютона $\Gamma(f)$ суммы $f(Z)$ называется выпуклая оболочка носителя $S(f)$. Его граница $\partial\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$, которые называются (обобщенными) *гранями*, верхний индекс указывает размерность грани, а нижний - ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует граничное подмножество $S_j^{(d)} = S(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$, *укороченная сумма* $f_j^{(d)} = \sum a_i(Z)$, $Q(a_i) \in S_j^{(d)}$, и *нормальный конус* $U_j^{(d)}$, состоящий из векторов $P \in \mathbb{R}^2$, которые удовлетворяют двум условиям: $\langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle$ и $\langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle$, где $Q, Q' \in S_j^{(d)}$, $Q'' \in S(f) \setminus S_j^{(d)}$, $\langle \circ, \circ \rangle$ - скалярное произведение.

Тогда $w = c_r z^r$ является решением укороченного уравнения $f_j^{(d)} = 0$ и первым приближением разложения (2), если для грани $\Gamma_j^{(d)}$ один из векторов $\omega(1; r)$ лежит в нормальном конусе $U_j^{(d)}$.

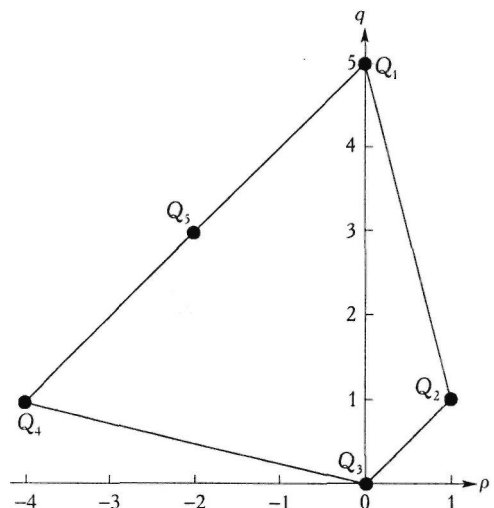
Чтобы найти второе слагаемое $c_s z^s$ разложения (2), достаточно сделать подстановку $w = c_r z^r + \tilde{w}$ в $f(Z)$ и для полученного уравнения $\tilde{f}(z, w) = f(z, c_r z^r + \tilde{w}) = 0$ применить описанный алгоритм, учитывая, что $r\omega > s\omega$.

Степенные разложения решений уравнения (4P₂)

Носитель суммы $S(f)$ уравнения (1) состоит из точек $Q_1=(0; 5)$, $Q_2=(1; 1)$, $Q_3=(0; 0)$, $Q_4=(4; 1)$ и $Q_5=(-2; 3)$. Многоугольник Ньютона суммы $\Gamma(f)$ представлен на рисунке.

Итак, имеем четыре грани нулевой размерности $\Gamma_j^{(0)}$, $j = \overline{1, 4}$, и четыре грани первой размерности $\Gamma_j^{(1)} = \{Q_j, Q_{j+1}\}$, $j = \overline{1, 3}$, $\Gamma_4^{(1)} = \{Q_4, Q_5\}$. Носитель $S(f)$ лежит в решетке $\mathbb{Z}$ с базисом $B_1=(1; 1)$, $B_2=(-4; 1)$.

Граням $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_2^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(0)}$ соответствуют укороченные уравнения $f_1^{(0)} := 6w^5 = 0$, $f_2^{(0)} := -wz = 0$ и



$f_3^{(0)} := -\alpha = 0$ соответственно, следовательно, они не имеют решений вида $c_r z^r$, $c_r \neq 0$ (см. [6]).

Грани $\Gamma_4^{(0)}$ соответствует у р а в $f_4^{(0)} := w^{(4)} = 0$ с характеристическим многочленом $\chi(r) = r(r-1)(r-2)(r-3)$. Для его корней $r_1=0$, $r_2=1$, $r_3=2$ и $r_4=3$ верно включение $-(1, r) \in U_4^{(0)}$, следовательно, $\omega = -1$ и $z \rightarrow 0$. Так как первая вариация принимает вид $\partial f_4^{(0)} / \partial w = d^4 / dz^4 \neq 0$, то оператор $\mathcal{L}(z) = d^4 / dz^4 \neq 0$, а его характеристический многочлен $\nu(k) = (k-1)(k-2)(k-3)$ имеет четыре корня $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=2$ и $k_4=3$.

Для $r=0$ вычислим множество показателей степеней K разложения (2). Обозначим $\tilde{f}(z, u) = f(z, c_0 + w)$ и параллельно сдвинем носитель $S(\tilde{f})$ на вектор $-S(L(z)) = (-4; 1)$. Так как $K = K(k_2; k_3; k_4) = K(1; 2; 3) = S'_+(1; 2; 3) \cap \{q_2 = -1\}$, где S'_+ - множество конечных сумм векторов $Q \in S(\tilde{f}) - (-4; 1)$, $S'_+(1; 2; 3)$ - множество конечных сумм векторов S'_+ и векторов $(1; -1)$, $(2; -1)$ и $(3; -1)$, то $K = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом, c_0 , c_1 , c_2 и c_3 - произвольные числа из $\mathbb{C}$, остальные коэффициенты разложения (2) определяются однозначно. Применив аналогичные рассуждения к уравнению $\tilde{f}(z, u)$, получим, что $c_4 = \alpha/24$. Итак, четырехпараметрическое семейство формальных решений уравнения (1) имеет вид

$$G_4^{(0)} := w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \frac{\alpha}{24} z^4 + \sum_{s=5}^{\infty} c_s z^s. \quad (3)$$

Для собственных значений $r_2=1$, $r_3=2$ и $r_4=3$ аналогично получаем частные случаи разложения (3), если положить $c_0=0$ или $c_0=0$ и $c_1=0$ либо $c_0=0$, $c_1=0$ и $c_2=0$ соответственно. В силу теоремы Коши ряд (3) сходится в некоторой окрестности $z=0$.

Рассмотрим грани первой размерности. Грани $\Gamma_{1(1)}$ соответствуют укороченное уравнение $f_1^{(1)} := 6w^5 - zw = 0$ и нормальный вектор $R = (1; 1/4)$. Значит, $r=1/4$, $\omega=1$, $z \rightarrow \infty$, $s < 1/4$ и первое приближение решения $w = c_{1/4} z^{1/4}$, $c_{1/4} \neq 0$. Чтобы найти коэффициент $c_{1/4}$, подставим первое приближение в $f_1^{(1)}$, откуда получим $c_{1/4}^4 = 1/6$. Следовательно, имеем четыре укороченных решения в зависимости от выбора ветви $c_{1/4}$. Так как укороченное уравнение - алгебраическое и $d=1$, то решения не имеют критических значений и $\nu(k) = 4 \neq 0$. Найдем множество показателей степеней K разложения. Сдвинутый носитель укороченного решения есть вектор $B_3 = (1/4; -1)$, который вместе с векторами B_1 и B_2 порождает решетку с базисом B_1 , B_3 , которая пересекается с прямой $q_2 = -1$ по точкам $q_1 = 1/4 - 5m/4, m \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $s < 1/4$, получим $K = \{1/4 - 5m/4, m \in \mathbb{N}\}$. Итак, все показатели s лежат во множестве K и все коэффициенты разложения определяются однозначно. Найдем коэффициент при втором приближении решения. Имеем, $\mu' = 0$, $\hat{f} = -\alpha$, тогда $c_{-1} = \alpha/4$. Таким образом, ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют четыре разложения

$$G_1^{(1)} i := w = c_{1/4} z^{1/4} + \frac{\alpha}{4} z^{-1} + z^{1/4} \sum_{s=2}^{\infty} c_s z^{-5s/4}, \quad (4)$$

где все c_s определяются однозначно, $c_{1/4}^4 = 1/6$, $i = \overline{1, 4}$, в соответствии с выбором ветви $c_{1/4}$.

Разложение (4) является асимптотическим в смысле следующей теоремы.

Теорема 1. Для любого конуса $\Omega \subset \mathbb{C}$ с центральным углом меньше $4\pi/5$ и вершиной в начале координат существует решение уравнения (1), асимптотическое поведение которое $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Omega$, описывается рядом (4).

Доказательство может быть сведено к теореме 12.1 Вазова [8]. С этой целью, полагая $y(\zeta)=w(z)/z^{1/4}-1/6^{1/4}$, $\zeta=4z^{5/4}/5$, запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -\frac{2y_4}{\zeta} + R_1 y_3 + R y_2^2 + R_2 y_2 - R_3, \end{cases}$$

где $y_i=y_i(\zeta)$, $i=1, 2, 3, 4$, $y_1=y$, $R=10(y_1+1/\sqrt[4]{6})$, $R_1=(R^2+6/\zeta^2)/10$, $R_2=(R^2-6/\zeta^3)/(10\zeta)$, $R_3=-\frac{3RR_1^2}{500}-\frac{RR_1}{1250\zeta^2}+\frac{99R}{250\alpha^4}+\frac{R}{10}-\frac{4\alpha}{5\zeta}$. Тогда собственные значения матрицы линейной части равны $\pm\sqrt[4]{2/3}$, $\sqrt[4]{-24}$, что по теореме Вазова гарантирует справедливость доказываемого утверждения.

Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $f_2^{(1)}:=-zw-\alpha=0$ и нормальный конус $U_2^{(1)}=\{P=\lambda(1;-1), \lambda>0\}$, значит, $r=-1$, $\omega=1$, $z\rightarrow\infty$, $s<-1$. Укороченное решение ищем в виде $w=c_{-1}z^{-1}$. Подставим его в уравнение $f_2^{(1)}$ и получим $c_{-1}=-\alpha$.

Укороченное уравнение является алгебраическим, следовательно, не имеет критических чисел и $v(k)=-1$. Сдвинутый носитель укороченного решения есть вектор $(-1; -1)=-B$, т. е. базис остается прежним, значит, все степени s разложения (2) лежат во множестве $K=\{-1-5m, m\in\mathbb{N}\}$.

Найдем коэффициент второго приближения. Имеем $\mu=0$, $\mu'=-5$, $s_0=-6$ и $c_{-6}=2(\alpha+1)(3-5\alpha)$. Таким образом, получаем формальный ряд

$$G_2^{(1)}:=w=-\alpha z^{-1}+2(\alpha+1)(3-5\alpha)z^{-6}+z^{-1}\sum_{s=2}^{\infty}c_s z^{-5s}, \quad (5)$$

который сходится, если представляет собой разложение рациональных решений уравнения (1) в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ [1,2].

Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $f_3^{(1)}:=w^{(4)}-\alpha=0$ и укороченный конус $U_3^{(1)}=\{P=-\lambda(1;4), \lambda>0\}$, значит, $r=4$, $\omega=-1$, $s\geq 4$. Подставим укороченное решение $w=c_4 z^4$ в уравнение $f_3^{(1)}$ и получим $c_4=\alpha/24$. Все корни характеристического уравнения $v(k)=k(k-1)(k-2)(k-3)$ меньше r , следовательно, критических значений нет. Сдвинутый носитель $(4; -1)$ укороченного решения лежит в решетке $\mathbb{Z}$, значит, в соответствии с [6] $K\subset\{4+5m, m\in\mathbb{N}\}$.

Найдем второе приближение. Так как $\mu=0$, $\mu'=-5$, $s_0=9$, то $b_9=\alpha/24$ и $c_9=-5\alpha/9!$. Итак, получили разложение, соответствующее грани $\Gamma_{3(1)}$:

$$G_3^{(1)}:=w=\frac{\alpha}{4!}z^4+\frac{5\alpha}{9!}z^9+z^4\sum_{s=2}^{\infty}c_s z^{5s}. \quad (6)$$

Ряд сходится для достаточно малых $|z|$ и является частным случаем (3) при $c_0=c_1=c_2=c_3=0$.

Найдем разложения, определяемые последней гранью $\Gamma_4^{(1)}$ с укороченным уравнением $f_4^{(1)}:=w^{(4)}-10w(w')^2-10w^2w''+6w^5=0$ и нормальным конусом $U_4^{(1)}=\{-\lambda(1;-1), \lambda>0\}$. Следовательно, $r=-1$, $\omega=-1$, $z\rightarrow 0$, $s>-1$. Первое приближение решения имеет вид $w=c_{-1}z^{-1}$, $c_{-1}\neq 0$, после его подстановки в укороченное уравнение получим четыре ненулевых значения $c_{-1}=\pm 1$ и $c_{-1}=\pm 2$. Характеристический полином имеет вид

$$v(k) = k^4 - 6k_3 + (11 - 10c_{-1}^2)k^2 + (30c_{-1}^2 - 6)k + 10c_{-1}^2(3c_{-1}^2 - 5).$$

Для $c_{-1} = \pm 1$ получим критические значения $k_1=1$, $k_2=2$ и $k_3=5$. Так как сдвинутый носитель $(-1; -1) = -B_1$ укороченного решения лежит в решетке $\mathbb{Z}$, то $K \subset \{5m-1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Следовательно, $K(1; 2; 5) = \{-1+5m+2n+3j+6i, m, n, j, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ есть множество показателей степеней разложения, где $m+n+j+i > 0$. Таким образом, $K(1; 2; 5) = \mathbb{N}$

Чтобы определить коэффициент c_4 , найдем $\mu=5$, $\mu'=0$. Следовательно, $s_0=4$, $c_4 = -(c_{-1} + \alpha)/36$. Таким образом, получаем два семейства двухпараметрических разложений

$$G_4^{(1)} 1 := w = c_{-1}z^{-1} + c_1z + c_2z^2 + c_4z^4 + c_5z^5 + \sum_{s=6}^{\infty} c_s z^s, \quad (7)$$

где $c_{-1} = \pm 1$, $c_4 = -(c_{-1} + \alpha)/36$, c_1, c_2, c_5 - произвольные коэффициенты, а остальные коэффициенты однозначно через них выражаются.

При $c_{-1} = \pm 2$ получим два критических значения $k_1=5$ и $k_2=7$. Следовательно, $K(5; 7) = \{-1+5m+6n+8j, n, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $m+n+j+i > 0$, т. е. $K(5; 7) = \{4, 5, 7\} \cup \mathbb{N}_{\geq 9}$. В этом случае $c_4 = (c_{-1} + \alpha)/144$. Итак, получаем еще два двухпараметрических разложения, соответствующих грани $\Gamma_4^{(1)}$:

$$G_4^{(1)} 2 := w = c_{-1}z^{-1} + \frac{c_{-1} + \alpha}{144} z^4 + c_5z^5 + c_7z^7 + \sum_{s=9}^{\infty} c_s z^s, \quad (8)$$

где $c_{-1} = \pm 2$, c_5 и c_7 - произвольные, $c_s, s \in \mathbb{N}_{\geq 9}$, определяются однозначно.

Ряды (7), (8) являются сходящимися в некоторой области $0 < |z| < \rho$, $\rho > 0$, и представляют собой полярные разложения решений уравнения (1) [2].

Заметим также, что в уравнении можно положить $z \rightarrow z - z_0$, и тогда полученные разложения (3), (6) будут являться разложениями решений в окрестности точки голоморфности z_0 , а разложения (7), (8) - в окрестности подвижного полюса. Других степенных разложений уравнение (1) не имеет.

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Для уравнения (1) существуют следующие степенные разложения решений вида (2): голоморфное разложение (3), разложение в окрестности $z = \infty$ (5), два полярных разложения (7), (8) и асимптотическое разложение (4).

1. Airault H. // Stud. Appl. Math. 1979. 61. P. 31.

2. Громak В. И. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2042.

3. Мартынов И. П. // Там же. 1973. Т. 9. № 10. С. 1780.

4. Kudryashov N. A. // Phys. Lett. 1997. 224A. P. 353.

5. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М., 1998.

6. Брюно А. Д., Завгородняя Ю. В. Степенные ряды и нестепенные асимптотики решений второго уравнения Пенлеве. Препринт Ин-та прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН. М., 2003. № 48.

7. Gromak V. I., Laine I., Shimomura Sh. Painleve differential equations in the complex plane. De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin; New York, 2002. P. 28.

8. Wasow V. R. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. John Wiley & Sons. New York; London; Sydney, 1965. P. 75.

Поступила в редакцию 24.03.05.

Валерий Иванович Громak - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений.

Марина Сергеевна Нелепко - аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель - В. И. Громak.