

ОДНОУРОВНЕВАЯ СХЕМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ В УНИТАРНЫХ КОДАХ

В.П. СУПРУН, доцент, кандидат технических наук

*Механико-математический факультет Белорусского государственного университета
пр-т Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь*

E-mail: suprun@bsu.by

Рассматриваются вопросы схемной реализации основных операций модулярной арифметики – операций сложения и умножения по модулю пять и по модулю семь для случая представления данных в унитарных кодах. Приводятся одноуровневые логические схемы модулярных сумматоров и умножителей, синтезированные на элементах ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом. Приведенные логические схемы являются более эффективными (как по сложности, так и по глубине) по сравнению с существующими аналогами.

Ключевые слова: модулярная арифметика, устройство, унитарные коды, модулярный сумматор, модулярный умножитель, логическая схема

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2], что применение аппарата модулярной арифметики позволяет повысить производительность вычислительных устройств за счет параллельной и независимой обработки цифровых сигналов. Кроме того, модулярное представление информации обеспечивает более надежное обнаружение и исправление ошибок при ее хранении и передаче, а также при выполнении (вычислении) арифметических операций.

К настоящему времени известны методы синтеза сумматоров и умножителей (устройств для умножения чисел) при условии представления входных и выходных операндов в унитарных кодах [3-6]. Интерес к представлению данных в унитарных кодах объясняется тем, что унитарное кодирование широко используется в схемотехнике, теории автоматов, нейронных сетях и других областях науки и техники, занимающихся передачей и преобразованием информации.

В работе рассматриваются вопросы синтеза одноуровневых логических схем сумматоров и умножителей в унитарных кодах по модулю пять и по модулю семь. Синтезированные здесь логические схемы состоят из элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с заданным порогом. Такие логические схемы имеют максимальное быстродействие, что выгодно отличает их от существующих аналогов. Кроме того, синтезированные схемы обладают низкой конструктивной сложностью, определяемой числом входов логических элементов.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Применение унитарных кодов является весьма распространенным в вычислительной технике способом представления данных [2, 3].

Некоторый операнд A в унитарном коде по модулю P представляется посредством p -разрядного двоичного вектора $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$, где $a_k = 1$ тогда и только тогда, когда $A = k \pmod{P}$, где $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Из определения следует, что двоичный вектор $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ содержит ровно одну единицу, поэтому $a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1} = 1$. Так как $1 - a_0 = \overline{a_0}$, то

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = \overline{a_0}. \quad (1)$$

Равенство (1) можно обобщить следующим образом:

$$i + a_{i+1} + \dots + a_{p-1} = \overline{a_0} + \overline{a_1} + \dots + \overline{a_i}, \quad (2)$$

где $0 \leq i \leq p-2$.

Как и в работе [6], вычислительные устройства, реализующие операции сложения $A + B = S$ и умножения $A \cdot B = R$ в унитарных кодах по модулю P , обозначим как $\mathfrak{R}_1$ (модулярный сумматор) и $\mathfrak{R}_2$ (модулярный умножитель), соответственно. Входные A, B и выходные S, R операнды в унитарных кодах задаются посредством p -разрядных двоичных векторов:

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}), \quad B = (b_0, b_1, \dots, b_{p-1}), \quad S = (s_0, s_1, \dots, s_{p-1}) \quad \text{и} \quad R = (r_0, r_1, \dots, r_{p-1}),$$

где $s_k = 1$ и $r_k = 1$ тогда и только тогда, когда $A + B = k \pmod{P}$ и $A \cdot B = k \pmod{P}$, соответственно, где $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Основное свойство логических функций

$$S_k = S_k(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b_0, b_1, \dots, b_{p-1}) \quad \text{и} \quad R_k = R_k(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b_0, b_1, \dots, b_{p-1}),$$

которые реализуются на выходах устройств $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$, соответственно, где $k = 0, 1, \dots, p-1$, в работе [6] сформулированы посредством следующих двух утверждений.

Утверждение 1. Логическая функция $S_k = 1$ тогда и только тогда,

когда $a_i + b_j = 2$, где $i + j = k \pmod{P}$ и $i, j = 0, 1, \dots, p-1$.

Утверждение 2. Логическая функция $R_k = 1$ тогда и только тогда,

когда $a_i \cdot b_j = 2$, где $i \cdot j = k \pmod{P}$ и $i, j = 0, 1, \dots, p-1$.

В дальнейшем в качестве критерия оптимальности одноуровневых логических схем $S(\mathfrak{R}_1)$ и $S(\mathfrak{R}_2)$ будем использовать такие ее характеристики, как сложность $l(\mathfrak{R}_1)$ и $l(\mathfrak{R}_2)$ (число входов логических элементов) и число внешних выводов $m(\mathfrak{R}_1)$ и $m(\mathfrak{R}_2)$.

В настоящей работе исследуются вопросы синтеза одноуровневых логических схем $S(\mathfrak{R}_1)$ и $S(\mathfrak{R}_2)$ при условии, что $P = 5$ и $P = 7$.

3. СЛОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ПЯТЬ

Рассмотрим операцию сложения $A + B = S \pmod{5}$ в унитарных кодах, где

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4), B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4), S = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) \text{ и } s_k = 1 \text{ тогда и только тогда,}$$

$$\text{когда } A + B = k \pmod{5} \text{ и } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Из утверждения 1 следует, что логические функции S_0, S_1, S_2, S_3 и S_4 , реализуемые на выходах модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$, представимы в виде следующих условий:

- $S_0 = 1$ тогда и только тогда,
когда $a_0 + b_0 = 2, a_1 + b_4 = 2, a_2 + b_3 = 2, a_3 + b_2 = 2$ или $a_4 + b_1 = 2$;
- $S_1 = 1$ тогда и только тогда,
когда $a_0 + b_1 = 2, a_1 + b_0 = 2, a_2 + b_4 = 2, a_3 + b_3 = 2$ или $a_4 + b_2 = 2$;
- $S_2 = 1$ тогда и только тогда,
когда $a_0 + b_2 = 2, a_1 + b_1 = 2, a_2 + b_0 = 2, a_3 + b_4 = 2$ или $a_4 + b_3 = 2$;
- $S_3 = 1$ тогда и только тогда,
когда $a_0 + b_3 = 2, a_1 + b_2 = 2, a_2 + b_1 = 2, a_3 + b_0 = 2$ или $a_4 + b_4 = 2$;
- $S_4 = 1$ тогда и только тогда,
когда $a_0 + b_4 = 2, a_1 + b_3 = 2, a_2 + b_2 = 2, a_3 + b_1 = 2$ или $a_4 + b_0 = 2$.

Отсюда с учетом того, что каждый из унитарных кодов $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$ содержит ровно одну единицу, следуют аналитические представления логических функций S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 посредством следующих уравнений:

$$\begin{aligned} S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 5b_0 + b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 6; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 4b_0 + 5b_1 + b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 6; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 3b_0 + 4b_1 + 5b_2 + b_3 + 2b_4 = 6; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ S_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 2b_0 + 3b_1 + 4b_2 + 5b_3 + b_4 = 6; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + b_0 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4 = 6; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Логическая схема $S_1(\mathfrak{R}_1)$ сумматора $\mathfrak{R}_1$, синтезированная на основе применения уравнений (3), содержит пять элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом шесть (Патент на изобретение Республики Беларусь РБ 13821). Схема $S_1(\mathfrak{R}_1)$ имеет конструктивную сложность $l(\mathfrak{R}_1) = 150$, а число ее внешних выводов равно $m(\mathfrak{R}_1) = 15$.

Так как $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ и $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$, то из системы уравнений (3) получаем:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 4b_0 + b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 3b_0 + 4b_1 + b_3 + 2b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 2b_0 + 3b_1 + 4b_2 + b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + b_0 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}$$

Логическая схема $S_2(\mathfrak{R}_1)$, синтезированная на основе применения уравнений (4), содержит пять элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом четыре и имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_1) = 100$ и $m(\mathfrak{R}_1) = 14$.

Дальнейшее упрощение уравнений (4) будем осуществлять на основе применения свойства (1). Поскольку

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \overline{a_0}, \quad b_0 + b_2 + b_3 + b_4 = \overline{b_1}, \quad b_0 + b_1 + b_3 + b_4 = \overline{b_2}, \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_4 = \overline{b_3}, \\
b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = \overline{b_4} \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \overline{b_0},
\end{aligned}$$

то система уравнений (4) равносильна системе уравнений:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3b_0 + \overline{b_1} + b_3 + 2b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2b_0 + 3b_1 + \overline{b_2} + b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + b_0 + 2b_1 + 3b_2 + \overline{b_3} = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \overline{b_4} = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \\
S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \overline{b_0} + b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 4 ; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}$$

Логическая схема $S_3(\mathfrak{R}_1)$, синтезированная на основе применения уравнений (5), приведена на рис.1(а). Схема $S_3(\mathfrak{R}_1)$ содержит пять элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом четыре и имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_1) = 70$ и $m(\mathfrak{R}_1) = 14$.

Для последующего упрощения аналитического представления функций S_0, S_1, S_2, S_3 и S_4 будем использовать свойство (2) унитарного двоичного кода. Из данного свойства следует, что

$$\begin{aligned}
1 + a_2 + a_3 + a_4 = \overline{a_0} + \overline{a_1}, \quad 1 + b_0 + b_3 + b_4 = \overline{b_1} + \overline{b_2}, \quad 1 + b_0 + b_1 + b_4 = \overline{b_2} + \overline{b_3}, \quad 1 + b_0 + b_1 + b_2 = \overline{b_3} + \overline{b_4}, \\
1 + b_1 + b_2 + b_3 = \overline{b_0} + \overline{b_4} \quad \text{и} \quad 1 + b_2 + b_3 + b_4 = \overline{b_0} + \overline{b_1}.
\end{aligned}$$

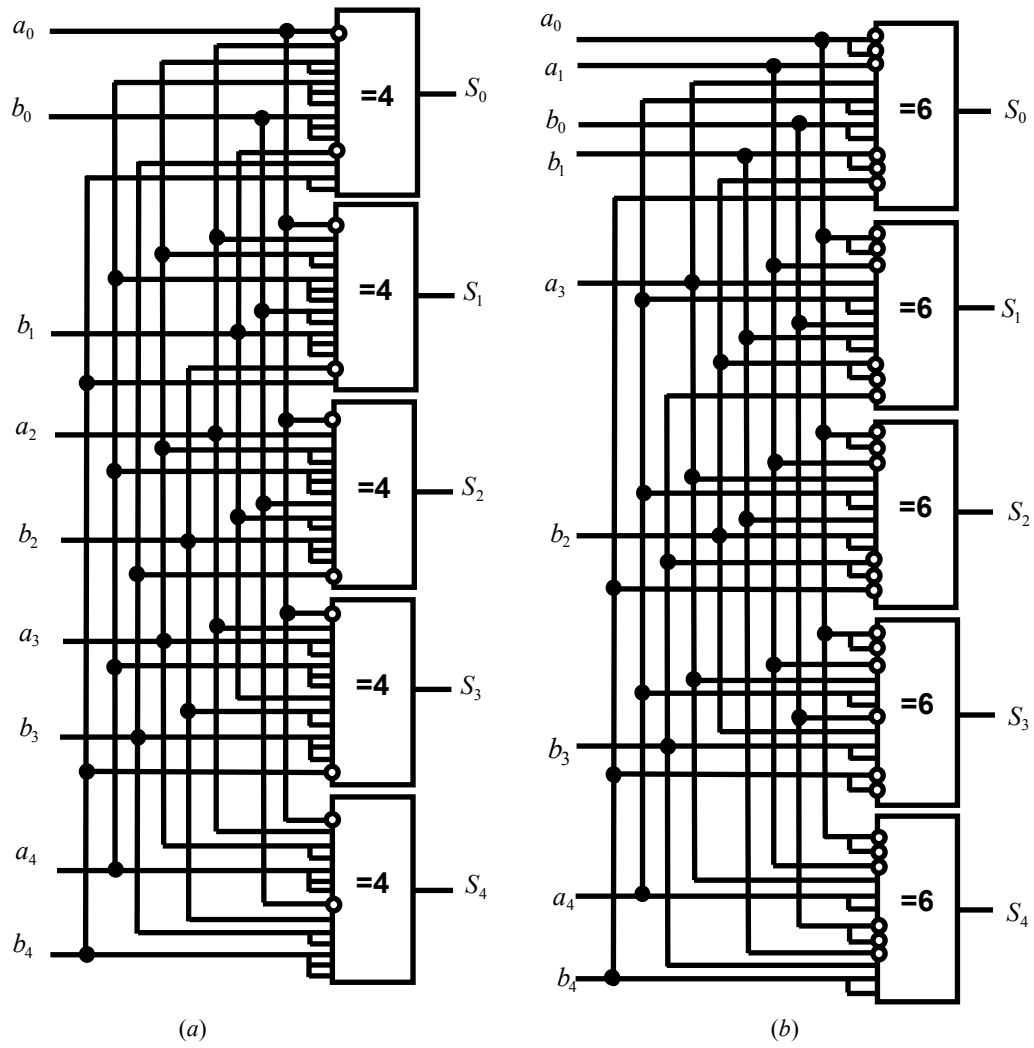


Рис.1. Логические схемы модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$:

(a) схема $S_3(\mathfrak{R}_1)$; (b) схема $S_4(\mathfrak{R}_1)$.

В таком случае из (5) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 2\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + a_3 + 2a_4 + 2b_0 + 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + b_4 = 6 ; \\ 0 & - \text{в противном случае,} \end{cases} \\
 S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 2\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + a_3 + 2a_4 + b_0 + 2b_1 + 2\bar{b}_2 + \bar{b}_3 = 6 ; \\ 0 & - \text{в противном случае,} \end{cases} \\
 S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 2\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + a_3 + 2a_4 + b_1 + 2b_2 + 2\bar{b}_3 + \bar{b}_4 = 6 ; \\ 0 & - \text{в противном случае,} \end{cases} \\
 S_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 2\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + a_3 + 2a_4 + \bar{b}_0 + b_2 + 2b_3 + 2\bar{b}_4 = 6 ; \\ 0 & - \text{в противном случае,} \end{cases} \\
 S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 2\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + a_3 + 2a_4 + 2\bar{b}_0 + \bar{b}_1 + b_3 + 2b_4 = 6 ; \\ 0 & - \text{в противном случае.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Синтезированная на основе применения уравнений (6) логическая схема $S_4(\mathfrak{R}_1)$ приведена на рис.1(б). Логическая схема $S_4(\mathfrak{R}_1)$ содержит пять элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом шесть, а ее характеристики равны $l(\mathfrak{R}_1) = 60$ и $m(\mathfrak{R}_1) = 14$.

Синтезированные логические схемы $S_2(\mathfrak{R}_1)$, $S_3(\mathfrak{R}_1)$ и $S_4(\mathfrak{R}_1)$ модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$, предназначенного для выполнения операции $A + B = S \pmod{5}$ в унитарных кодах, превосходят по сложности и (или) по глубине существующие аналоги (например, Патенты РБ 2991, 10834, 13821).

4. УМНОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ПЯТЬ

Рассмотрим операцию умножения $A \cdot B = R \pmod{5}$ в унитарных кодах, где

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4), B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4), R = (r_0, r_1, r_2, r_3, r_4) \text{ и } r_k = 1 \text{ тогда и только тогда,}$$

$$\text{когда } A \cdot B = k \pmod{5} \text{ и } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Из утверждения 2 следует, что логические функции R_0, R_1, R_2, R_3 и R_4 , реализуемые на выходах модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$, представимы в виде следующих условий:

- $R_0 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_0 = 1$ или $b_0 = 1$;
- $R_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_1 = 2$, $a_2 + b_3 = 2$, $a_3 + b_2 = 2$ или $a_4 + b_4 = 2$;
- $R_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_2 = 2$, $a_2 + b_1 = 2$, $a_3 + b_4 = 2$ или $a_4 + b_3 = 2$;
- $R_3 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_3 = 2$, $a_2 + b_4 = 2$, $a_3 + b_1 = 2$ или $a_4 + b_2 = 2$;
- $R_4 = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + b_4 = 2$, $a_2 + b_2 = 2$, $a_3 + b_3 = 2$ или $a_4 + b_1 = 2$.

Так как каждый из унитарных кодов $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$ содержит ровно одну единицу, то отсюда получаем аналитические представления логических функций R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 в виде системы уравнений:

$$R_0 = a_0 \vee b_0,$$

$$R_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 4b_1 + 2b_2 + 3b_3 + b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 3b_1 + 4b_2 + b_3 + 2b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (7)$$

$$R_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 2b_1 + b_2 + 4b_3 + 3b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + b_1 + 3b_2 + 2b_3 + 4b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Логическая схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$ умножителя $\mathfrak{R}_2$, синтезированная на основе применения уравнений (7), содержит элемент ИЛИ и четыре элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом пять (Патент РБ 13493). Схема $S_1(\mathfrak{R}_2)$ имеет конструктивную сложность $l(\mathfrak{R}_2) = 82$ и внешних выводов $m(\mathfrak{R}_2) = 15$.

Упрощение системы уравнений (7) будем осуществлять по аналогии с упрощением системы уравнений (4). Так как $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0$ и $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_0$, то из системы уравнений (7) получаем:

$$\begin{aligned}
R_0 &= a_0 \vee b_0, \\
R_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \overline{b_0} + 3b_1 + b_2 + 2b_3 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \overline{b_0} + 2b_1 + 3b_2 + b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \overline{b_0} + b_1 + 3b_3 + 2b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{a_0} + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \overline{b_0} + 2b_2 + b_3 + 3b_4 = 5; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}$$

Логическая схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$, синтезированная на основе применения уравнений (8), приведена на рис.2(a). Схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$ содержит элемент ИЛИ, четыре элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом пять и имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_2) = 58$ и $m(\mathfrak{R}_2) = 14$.

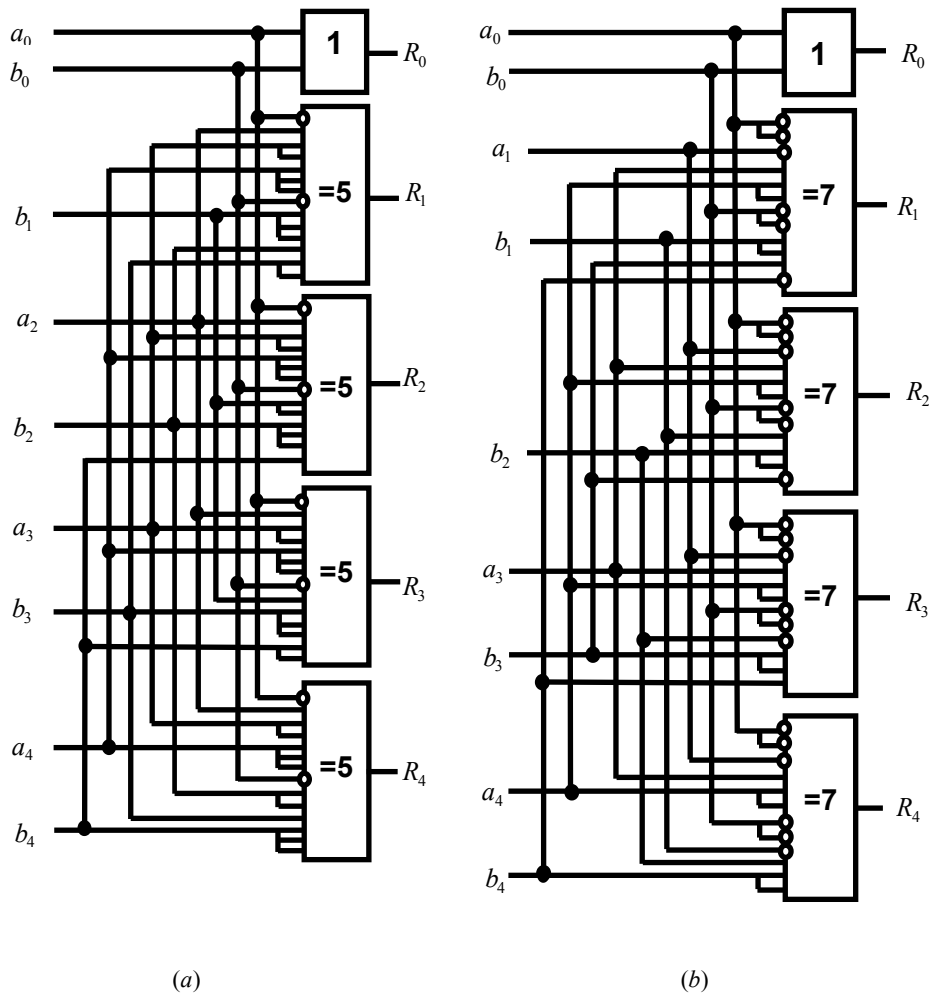


Рис.2. Логические схемы модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$:

(a) схема $S_2(\mathfrak{R}_2)$; (b) схема $S_3(\mathfrak{R}_2)$.

Для упрощения системы уравнений (8) будем использовать свойство (2) унитарного двоичного кода, из которого следует, что

$$1 + a_2 + a_3 + a_4 = \overline{a_0} + \overline{a_1}, \quad 1 + b_1 + b_2 + b_3 = \overline{b_0} + \overline{b_4}, \quad 1 + b_1 + b_2 + b_4 = \overline{b_0} + \overline{b_3},$$

$$1 + b_1 + b_3 + b_4 = \overline{b_0} + \overline{b_2} \quad \text{и} \quad 1 + b_2 + b_3 + b_4 = \overline{b_0} + \overline{b_1}.$$

Используя приведенные выше равенства, получаем систему уравнений

$$R_0 = a_0 \vee b_0,$$

$$R_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2\overline{a_0} + \overline{a_1} + a_3 + 2a_4 + 2\overline{b_0} + 2b_1 + b_3 + \overline{b_4} = 7; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2\overline{a_0} + \overline{a_1} + a_3 + 2a_4 + 2\overline{b_0} + b_1 + 2b_2 + \overline{b_3} = 7; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases} \quad (9)$$

$$R_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2\overline{a_0} + \overline{a_1} + a_3 + 2a_4 + 2\overline{b_0} + \overline{b_2} + 2b_3 + b_4 = 7; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$R_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2\overline{a_0} + \overline{a_1} + a_3 + 2a_4 + 2\overline{b_0} + \overline{b_1} + b_2 + 2b_4 = 7; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Логическая схема $S_3(\mathfrak{R}_2)$ модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$, синтезированная на основе применения уравнений (9), изображена на рис.2(б). Логическая схема $S_3(\mathfrak{R}_2)$ содержит элемент ИЛИ, четыре элемента ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом семь, и имеет следующие характеристики: $l(\mathfrak{R}_2) = 50$ и $m(\mathfrak{R}_2) = 14$.

Логические схемы $S_2(\mathfrak{R}_2)$ и $S_3(\mathfrak{R}_2)$ модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$, предназначенного для выполнения операции $A \cdot B = R \pmod{5}$ в унитарных кодах, превосходят по сложности и (или) по глубине существующие аналоги (например, Патенты РБ 10531, 10652, 13493).

5. СЛОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ СЕМЬ

Рассмотрим операцию сложения $A + B = S \pmod{7}$ в унитарных кодах, где

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6), \quad B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6), \quad S = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) \quad \text{и} \quad s_k = 1$$

тогда и только тогда, когда $A + B = k \pmod{7}$ и $k = 0, 1, \dots, 6$.

Из утверждения 1 следует, что логические функции $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ и S_6 , реализуемые на выходах модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$, можно представить посредством следующей системы уравнений:

$$S_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + 7b_0 + b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 = 8; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + 6b_0 + 7b_1 + b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 + 5b_6 = 8; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + 5b_0 + 6b_1 + 7b_2 + b_3 + 2b_4 + 3b_5 + 4b_6 = 8; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + 4b_0 + 5b_1 + 6b_2 + 7b_3 + b_4 + 2b_5 + 3b_6 = 8; \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + 3b_0 + 4b_1 + 5b_2 + 6b_3 + 7b_4 + b_5 + 2b_6 = 8; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_5 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + 2b_0 + 3b_1 + 4b_2 + 5b_3 + 6b_4 + 7b_5 + b_6 = 8; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_6 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 6a_5 + 7a_6 + b_0 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4 + 6b_5 + 7b_6 = 8; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (10)
\end{aligned}$$

Если данную систему уравнений преобразовать по аналогии с преобразованием уравнений (3)-(5), то получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3b_0 + 3\overline{b_1} + 2\overline{b_2} + \overline{b_3} + b_5 + 2b_6 = 12; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 2b_0 + 3b_1 + 3\overline{b_2} + 2\overline{b_3} + \overline{b_4} + b_6 = 12; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + b_0 + 2b_1 + 3b_2 + 3\overline{b_3} + 2\overline{b_4} + \overline{b_5} = 12; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 3\overline{b_4} + 2\overline{b_5} + \overline{b_6} = 12; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (11) \\
S_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \overline{b_0} + b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 3\overline{b_5} + 2\overline{b_6} = 12; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_5 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 2\overline{b_0} + \overline{b_1} + b_3 + 2b_4 + 3b_5 + 3\overline{b_6} = 12; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
S_6 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + 2\overline{b_1} + \overline{b_2} + b_4 + 2b_5 + 3b_6 = 12; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Если модулярный сумматор $\mathfrak{R}_1$ синтезировать по формулам (11), то одноуровневая схема $S(\mathfrak{R}_1)$ будет содержать семь элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом двенадцать. При этом $l(\mathfrak{R}_1) = 168$ и $m(\mathfrak{R}_1) = 20$.

6. УМНОЖЕНИЕ УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ СЕМЬ

Рассмотрим операцию умножения $A \cdot B = R \pmod{7}$ в унитарных кодах, где

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6), \quad B = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6), \quad R = (r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) \text{ и } r_k = 1$$

тогда и только тогда, когда $A \cdot B = k \pmod{7}$ и $k = 0, 1, \dots, 6$.

Из утверждения 2 следует, что логические функции $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ и R_6 , реализуемые на выходах модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$, можно представить посредством следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
R_0 &= a_0 \vee b_0 \\
R_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 6b_1 + 3b_2 + 2b_3 + 5b_4 + 4b_5 + b_6 = 7; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 5b_1 + 6b_2 + 4b_3 + 3b_4 + b_5 + 2b_6 = 7; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 4b_1 + 2b_2 + 6b_3 + b_4 + 5b_5 + 3b_6 = 7; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 3b_1 + 5b_2 + b_3 + 6b_4 + 2b_5 + 4b_6 = 7; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_5 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 2b_1 + b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 6b_5 + 5b_6 = 7; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_6 &= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + b_1 + 4b_2 + 5b_3 + 2b_4 + 3b_5 + 6b_6 = 7; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

Преобразуем приведенную выше систему уравнений по аналогии с упрощением систем (7), (8), и получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
R_0 &= a_0 \vee b_0 \\
R_1 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + 3b_1 + \overline{b_3} + 2b_4 + b_5 + 2\overline{b_6} = 13; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_2 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + 2b_1 + 3b_2 + b_3 + 2\overline{b_5} + \overline{b_6} = 13; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_3 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + b_1 + \overline{b_2} + 3b_3 + 2\overline{b_4} + 2b_5 = 13; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_4 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + 2b_2 + 2\overline{b_3} + 3b_4 + \overline{b_5} + b_6 = 13; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_5 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + \overline{b_1} + 2\overline{b_2} + b_4 + 3b_5 + 2b_6 = 13; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
R_6 &= \begin{cases} 1, & \text{если } 3\overline{a_0} + 2\overline{a_1} + \overline{a_2} + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 3\overline{b_0} + 2\overline{b_1} + b_2 + 2b_3 + \overline{b_4} + 3b_6 = 13; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{13}$$

Логическая схема $S(\mathfrak{R}_2)$ модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$, синтезированная на основе применения уравнений (13), содержит элемент ИЛИ и шесть элементов ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ с порогом тринадцать. Сложность и число внешних выводов схемы $S(\mathfrak{R}_2)$ равны $l(\mathfrak{R}_2) = 146$ и $m(\mathfrak{R}_2) = 20$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предлагаются аналитические представления логических функций, которые реализуются на выходах модулярного сумматора и модулярного умножителя в унитарных кодах при условии, что $P = 5$ и $P = 7$. Отметим, что одноуровневые логические схемы модулярного сумматора $\mathfrak{R}_1$ и модулярного умножителя $\mathfrak{R}_2$ при условии, что $P = 3$, приведены в работе [6].

Оптимальные по сложности и глубине логические схемы $S_4(\mathfrak{R}_1)$ и $S_3(\mathfrak{R}_2)$ можно эффективно использовать при синтезе логических схем $S(\mathfrak{R})$ вычислительных устройств модулярной арифметики $\mathfrak{R}$, предназначенных для реализации в унитарных кодах более сложных, чем сложение и умножение, арифметических операций. К таким «сложным» операциям относятся,

например, $(A+B)+C=S$, $(A\cdot B)\cdot C=R$, $(A+B)\cdot C=R$, $A\cdot B+C=S$, $(A+B)+(C+D)=S$, $(A\cdot B)\cdot (C\cdot D)=R$, $A\cdot B+C\cdot D=S$, $(A+B)\cdot (C+D)=R$. Следует заметить, что при синтезе логических схем $S(\mathfrak{R})$ вычислительных устройств $\mathfrak{R}$ можно воспользоваться методом блочно-структурного синтеза [7].

Аналитические представления (6), (9), (11) и (13) логических функций, реализуемых на выходах модулярных сумматоров $\mathfrak{R}_1$ и умножителей $\mathfrak{R}_2$, обобщаются на случай $P=2k+1$, где $k\geq 1$. При этом сложность оптимальных одноуровневых логических схем $S(\mathfrak{R}_1)$ и $S(\mathfrak{R}_2)$ вычисляется по формулам $l(\mathfrak{R}_1)=2k(k+1)(2k+1)$ и $l(\mathfrak{R}_2)=4k^2(k+1)+2$, а число внешних выводов равно $m(\mathfrak{R}_1)=m(\mathfrak{R}_2)=3P-1$.

На все логические схемы модулярных сумматоров $\mathfrak{R}_1$ и модулярных умножителей $\mathfrak{R}_2$, приведенных в настоящей статье, оформлены заявки на Патент Республики Беларусь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долгов А.И. Диагностика устройств, функционирующих в системе остаточных классов. М.: Радио и связь, 1982.
- [2] Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Ряднов С.А. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем / Под ред. Н.И. Червякова. М.: Физматлит, 2003.
- [3] Корнилов А.И., Семенов М.Ю., Калашиников В.С. Методы аппаратной оптимизации сумматоров для двух операндов в системе остаточных классов // Известия ВУЗов. Электроника. – 2004. № 1, с 75 – 82.
- [4] Супрун В.П., Городецкий Д.А. Синтез n -операндных сумматоров по модулю три // Автоматика и вычислительная техника. – 2010. № 3, с. 72–80.
- [5] Стемпковский А.Л., Корнилов А.И., Семенов М.Ю. Особенности реализации устройств цифровой обработки сигналов в интегральном исполнении с применением модулярной арифметики // Информационные технологии. – 2004. № 2, с. 2–9.
- [6] Супрун В.П., Городецкий Д.А. Реализация операций сложения и умножения в унитарных кодах // Автоматика и вычислительная техника. – 2010. № 5, с. 59–71.
- [7] Супрун В.П., Городецкий Д.А. Метод блочно-структурного синтеза вычислительных устройств модулярной арифметики // Информатика. – 2009. № 4 (24), с. 74–79.

Рукопись получена 06.10.2010