ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ GARCH(1,1) С УСТОЙЧИВЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В.С. Терех, Н.Н. Труш

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
vladimir.terekh@gmail.com, TroushNN@bsu.by

Пусть модель GARCH(1,1) для процесса $X_t, t \in Z$ имеет следующий вид:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha X_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \tag{1}$$

где σ_t — волатильность, $\omega > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\{Z_t,\ t \in Z\}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с устойчивым распределением с параметром устойчивости k, $0 < k \leqslant 2$.

Пусть $\theta = (\omega, \alpha, \beta, k)^\top$ и $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0, k_0)^\top$ — истинный вектор параметров модели (1), где $^\top$ означает знак транспонирования, а K — допустимое множество параметров:

$$K = \{\theta : \alpha E\{Z_0^p\} + \beta < 1, \quad p < k/2; \quad 0 < \min\{\omega, \alpha, \beta\} \leqslant \max\{\omega, \alpha, \beta\} < 1; \quad 0 < k \leqslant 2\}.$$

Пусть известна выборка размера n $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ за процессом $X_t, t \in Z$. М-оценка $\hat{\theta}_n$ вектора параметров θ модели (1) на компакте K определяется следующим образом:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in K} \hat{L}_n(\theta),$$

где

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{l}_t(\theta), \quad \hat{l}_t(\theta) = \ln\left[\frac{1}{\hat{h}_t(\theta)} f\left(\frac{x_t}{\hat{h}_t(\theta)}\right)\right],$$

$\theta \in K$, $t = \overline{1, n}$, $f(x)$ — некоторая непрерывная положительная функция, а $\hat{h}_t(\theta)$ можно расценивать как оценку волатильности σ_t. Заметим, что $\hat{h}_t(\theta_0) = \sigma_t$ при всех $t \in \mathbb{N}$. В качестве $\hat{h}_t(\theta)$ будем использовать функцию $\hat{h_t}(\theta) = \hat{y}_t^{1/2}(\theta)$, где $\hat{y}_t(\theta)$ определяется следующим образом:

$$\hat{y}_t(\theta) = \begin{cases} \varepsilon, & t = 0, \\ \omega + \alpha X_{t-1}^2 + \beta \hat{y_{t-1}}(\theta), & t \geqslant 1, \end{cases}$$

$\varepsilon \in [0, \infty]$ — произвольное начальное значение.

В работе [1] приведены условия строгой состоятельности и асимптотической нормальности оценки $\hat{\theta}_n$ в общем случае. Для построения М-оценки вектора θ будем использовать функцию $f(x) = (2\pi)^{-1} e^{-x^p/p}$, $p \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, которая введена в работе [2]. Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки при условии, что параметр p принадлежит интервалу $(0; k/2)$.

Литература

1. Терех В. С. *Построение и исследование свойств M-оценки параметров модели* GARCH(1,1) // Сб. работ 72-й науч. конф. студентов и аспирантов Белорусского гос. ун-та. 2015. Т. 1. С. 112–115.

2. Труш Н. Н., Ле Хонг Шон *Оценка параметров модели* GARCH(1,1) *с остатками, имеющими k-устойчивое распределение* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. №1. С. 13–21.