$$\kappa\mathbf{E}=0, \quad \mathbf{H}=\tau\mathbf{E}, \tag{15}$$

где

$$\kappa = \varepsilon + \left(\mathbf{m}^{\times} + i\alpha\right)\mu^{-1}\left(\mathbf{m}^{\times} - i\beta\right), \quad \tau = \mu^{-1}\left(\mathbf{m}^{\times} - i\beta\right).$$

Уравнение нормалей (12) является необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений этих систем. Действительно, вычисляя детерминант блочной матрицы A (8) для этих двух случаев, получаем

$$|A| = |\varepsilon||\chi|, \quad |A| = |\mu||\kappa|.$$

Поэтому уравнение $|A| = 0$ (13) эквивалентно уравнениям $|\chi| = 0$ и $|\kappa| = 0$ при выполнении условий $|\varepsilon| \neq 0$ и $|\mu| \neq 0$ соответственно. В оптике гиротропных кристаллов оба этих условия выполняются одновременно, т. е. системы (14) и (15) эквивалентны.

В теории гиротропии Федорова существует также альтернативный способ описания собственных волн, основанный на использовании уравнений связи вида [2]

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu}\mathbf{H}, \tag{16}$$

где

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1\left(1 - i\alpha_1\mathbf{m}^{\times}\right), \quad \hat{\mu} = \mu_1\left(1 + i\beta_1\mathbf{m}^{\times}\right).$$

С учетом обозначений (5) из уравнений (1) и (16) немедленно вытекает система

$$\hat{A}\mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{Y} = -K\mathbf{X}, \tag{17}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & \mathbf{m}^{\times} \\ -\mathbf{m}^{\times} & \hat{\mu} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Условие существования нетривиального решения этой системы (уравнение нормалей) имеет вид

$$\begin{gathered} \left|\hat{A}\right| \equiv |\varepsilon_1||\mu_1|\left[1 - \mathbf{m}\overline{\alpha_1}\mathbf{m} - i\left(\alpha_1\mathbf{m}^{\times}\right)_t\right]\left[1 - \mathbf{m}\overline{\beta_1}\mathbf{m} + i\left(\beta_1\mathbf{m}^{\times}\right)_t\right] + \\ + \left[\overline{\varepsilon_1}\left(\mathbf{m}^{\times} - i\mathbf{m}^{\times}\tilde{\beta}_1\mathbf{m}^{\times}\right)\overline{\mu_1}\left(\mathbf{m}^{\times} + i\mathbf{m}^{\times}\tilde{\alpha}_1\mathbf{m}^{\times}\right)\right]_t + \left(\mathbf{m}\varepsilon_1\mathbf{m}\right)\left(\mathbf{m}\mu_1\mathbf{m}\right) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

После подстановки $\mathbf{m} = n\mathbf{s}$ получаем уравнение четвертого порядка относительно показателя преломления n. При выводе этой формулы использовалось тождество [2]

$$\mathbf{m}^{\times}\overline{\alpha} = \tilde{\alpha}\left(\alpha\mathbf{m}\right)^{\times}.$$

В отличие от матрицы A (8) матрица $\hat{A}$ (18) содержит оператор $\mathbf{m}^{\times}$ в каждом из своих четырех блоков, поэтому система (17) менее удобна для решения, чем система (7).

Если существует обратный тензор $\hat{\varepsilon}^{-1}$, т. е.

$$|\hat{\varepsilon}| \equiv |\varepsilon_1| M_1 \neq 0, \tag{20}$$

где

$$M_1 = \left|1 - i\alpha_1\mathbf{m}^{\times}\right| = 1 - \mathbf{m}\overline{\alpha}_1\mathbf{m} - i\left(\alpha_1\mathbf{m}^{\times}\right)_t,$$

то уравнение $\hat{A}\mathbf{X}=0$ (17) сводится к эквивалентной системе

$$\hat{\chi}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{E} = -\hat{\alpha}\mathbf{H}, \tag{21}$$

где

$$\hat{\chi} = \hat{\mu} + \mathbf{m}^{\times}\hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{m}^{\times}, \quad \hat{\sigma} = \hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{m}^{\times}.$$

Аналогично, если существует обратный тензор $\hat{\mu}^{-1}$, т. е.

$$|\hat{\mu}| \equiv |\mu_1| N_1 \neq 0, \qquad (22)$$

где

$$N_1 = \left|1 + i\beta_1\mathbf{m}^{\times}\right| = 1 - \mathbf{m}\overline{\beta}_1\mathbf{m} + i\left(\beta_1\mathbf{m}^{\times}\right)_t,$$

то эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\hat{\kappa}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = \hat{\tau}\mathbf{E}, \qquad (23)$$

где

$$\hat{\kappa} = \hat{\varepsilon} + \mathbf{m}^{\times}\hat{\mu}^{-1}\mathbf{m}^{\times}, \quad \hat{\tau} = \hat{\mu}^{-1}\mathbf{m}^{\times}.$$

Если $|\hat{\varepsilon}||\hat{\mu}| \neq 0$, то также можно сначала найти **D** или **B** из уравнений

$$\hat{\delta}\mathbf{D} = 0, \quad \hat{\delta} = \hat{\tau}\hat{\varepsilon}^{-1} = 1 + \mathbf{m}^{\times}\hat{\mu}^{-1}\mathbf{m}^{\times}\hat{\varepsilon}^{-1}, \qquad (24)$$

$$\hat{\rho}\mathbf{B} = 0, \quad \hat{\rho} = \hat{\chi}\hat{\mu}^{-1} = 1 + \mathbf{m}^{\times}\hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{m}^{\times}\hat{\mu}^{-1}, \qquad (25)$$

а затем вычислить остальные векторы:

$$\mathbf{E} = \hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{m}^{\times}\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{m}^{\times}\mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \hat{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}.$$

Уравнение нормалей (19) является необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений уравнений (21), (23) - (25), поскольку

$$\left|\hat{A}\right| = |\hat{\varepsilon}||\hat{\chi}|, \quad \left|\hat{A}\right| = |\hat{\mu}||\hat{\kappa}|, \quad \left|\hat{A}\right| = |\hat{\varepsilon}||\hat{\mu}|\left|\hat{\delta}\right| = |\hat{\varepsilon}||\hat{\mu}||\hat{\rho}|,$$

т. е. уравнение $|\hat{A}|=0$ эквивалентно уравнениям $|\hat{\chi}|=0$, $|\hat{\kappa}|=0$ и $\left|\hat{\delta}\right| \equiv |\hat{\rho}|=0$ при выполнении условий (20) и (22). Подчеркнем, что эти условия ограничивают лишь область применимости систем (21) и (23), но не уравнений связи (16). Все параметры собственной волны, т. е. векторы **m** = n**s**, **X** и **Y** (5), можно найти непосредственно из (17) и (19) без перехода к (21) или (23).

В оптике гиротропных кристаллов нормы псевдотензоров гиротропии много меньше норм тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости, причем последние не являются особенными, т. е. $|\varepsilon||\mu|\neq 0$ и $|\varepsilon_1||\mu_1|\neq 0$. Матрица материальных параметров L (6) также является неособенной:

$$L \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon & i\alpha \\ i\beta & \mu \end{vmatrix} = |\varepsilon||\mu| + \left(\overline{\varepsilon}\alpha\overline{\mu}\beta\right)_t + \left(\varepsilon\overline{\beta}\mu\overline{\alpha}\right)_t - |\alpha||\beta| \neq 0,$$

поэтому уравнения связи (2) и (16) являются эквивалентными, а тензоры ε_1, μ_1, α_1 и β_1 (16) связаны с тензорами ε, μ, α и β (2) соотношением

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\alpha \\ i\beta & \mu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & i\alpha \\ i\beta & \mu \end{pmatrix}.$$

Из формулы Фробениуса [14] следует, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \alpha\mu^{-1}\beta, \quad \alpha_1 = -\varepsilon^{-1}\alpha\left(\mu + \beta\varepsilon^{-1}\alpha\right)^{-1},$$

$$\beta_1 = -\mu^{-1}\beta\left(\varepsilon + \alpha\mu^{-1}\beta\right)^{-1}, \quad \mu_1 = \mu + \beta\varepsilon^{-1}\alpha.$$

Нетрудно убедиться, что в тех случаях, когда тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\alpha}$ **и** $\boldsymbol{\beta}$ удовлетворяют соотношениям (3) и (4), тензоры ε_1, μ_1, α_1 и β_1 также удовлетворяют аналогичным соотношениям.

Системы (8) и (17), а также уравнения нормалей (10) и (19) эквивалентны, поскольку матрицы A и $\hat{\boldsymbol{A}}$ связаны соотношениями

$$\hat{A} = FL^{-1}A, \quad F = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad |\hat{A}| = \frac{|F|}{|L|}|A|,$$

где F и L не зависят от т. Таким образом, в оптике гиротропных кристаллов оба способа описания равноправны, а системы уравнений (7), (14), (15), (17), (21), (23) эквивалентны для любых направлений распространения волн в кристаллах любых классов симметрии.

1. Barkovsky L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A.V. // J. Phys. A. 1987. Vol. 20. P. 1095.
2. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. Мн., 1976.
3. Федоров Ф.И.// УФН. 1972. Т. 108. Вып. 4. С. 762.
4. Гинзбург В .Л.// Там же. С. 749.
5. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., 1987.
6. Semchenko I., Tretyakov S., Serdyukov A. // Prog. Electromagn. Res. 1996. Vol. 12. P. 335.
7. Виноградов А.П. // УФН. 2002. Т. 172. № 3. С. 363.
8. Богуш А.А., Мороз Л .Г. Введение в теорию классических полей. Мн., 1968.
9. Максименко Н.В., Мороз Л.Г. // XI Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике, Гомель, 12-23 сент. 1977 г. Дубна, 1979. С. 533; Вопросы атомной науки и техники // Общая и ядерная физика. 1979. В. 4 (10). С. 26.
10. Богуш А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий. Мн., 1987.
11. Богуш А.А. //Ф.И. Федоров. К 95-летию со дня рождения. Мн., 2005. С. 83.
12. Барковский Л.М., Борздов Г.Н./ /Оптика и спектроскопия. 2003. Т. 95. № 1. С. 114.
13. Сердюков А. Н.// Кристаллография. 1976. Т. 21. № 2. С. 275.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.

Поступила в редакцию 12.12.05.

Татьяна Александровна Алексеева - ассистент.
Леонид Матвеевич Барковский - доктор физико-математических наук, профессор.
Георгий Николаевич Борздов - доктор физико-математических наук, профессор.