О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ НОРМАЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНОВА ПОЛЯ В НИЛЬПОТЕНТНОЙ СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧЕ С ВЕКТОРОМ РОСТА $(2, 3, 5, 8)$.

Д.И. Пирштук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
PirshtukDI@bsu.by

В докладе рассматривается проблема интегрирования нормальных экстремалей для следующего обобщения задачи Дидоны [1]. Пусть на плоскости даны две точки, соединенные гладкой кривой γ_0. Требуется соединить эти точки другой гладкой кривой γ минимальной длины, такой, чтобы область, ограниченная γ_0 и γ, имела фиксированные площадь, центр тяжести и центр момента инерции. Это задача оптимального управления в 8-мерном пространстве с 2-мерным управлением и квадратичным функционалом: для точек $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^8$ требуется найти такую кривую $q(t) \in \mathbb{R}^8$, что $q(0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$ и

$$\dot{q}(t) = u_1(t)X_1(q(t)) + u_2(t)X_2(q(t)), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min,$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{2}x_1^2\frac{\partial}{\partial x_4} + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{1}{6}x_1^3\frac{\partial}{\partial x_6} - \frac{1}{2}x_1^2x_2\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{1}{2}x_1x_2^2\frac{\partial}{\partial x_8}.$$

Алгебраически это нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5,8)$: $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$, $X_5 = [X_2, X_3]$; $X_6 = [X_1, X_4]$, $X_7 = [X_1, X_5] = [X_2, X_4]$, $X_8 = [X_2, X_5]$.

Рассмотрим линейные на слоях кокасательного расслоения T^*G гамильтонианы, соответствующие полям X_i : $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*G$, $i = \overline{1,8}$. Из принципа максимума Понтрягина для нормальный экстремалей из условия $\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t),\nu}(\lambda_t)$ на слоях T^*G имеем систему

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3, \quad \dot{h}_2 = h_1 h_3, \quad \dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5, \quad \dot{h}_4 = h_1 h_6 + h_2 h_7,$$
$$\dot{h}_5 = h_1 h_7 + h_2 h_8, \quad \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0$$

с нормальным гамильтонианом $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$.

Отметим, что задача построения полной системы полиномиальных интегралов на группах Ли рассматривалась Мищенко, Фоменко и Миловановым [3, 4], но в отличие от данных работ нам требуется, чтобы гамильтониан H входил в эту систему 8 независимых интегралов.

Положим $\omega = h_5^2 h_6 - 2h_4 h_5 h_6 + h_4^2$, $\Delta = h_6 h_8 - h_7^2$ и $C = \omega - 2h_3\Delta$.

Пусть $f = f(h_1, h_2, C, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)$ — первый интеграл (заметим, что $h_3 = (\omega - C)/(2\Delta)$).

Известно [1], что C, h_6, h_7, h_8 являются функциями Казимира (в инволюции со всеми h_i, $i = \overline{1,8}$), независимыми при $\Delta \neq 0$, а любая другая инволюция есть функция от C, h_6, h_7, h_8.

Утверждение 1. *Если интеграл f — полином по C степени не выше 4, то* $f = f(H, C, h_6, h_7, h_8)$.

Заметим, что наряду с $H = h_1^2 + h_2^2$ можно, а при доказательстве следующего утверждения и удобнее, рассматривать систему координат, в котором гамильтониан H равен $h_1 h_2$.

Утверждение 2. *Если интеграл f полиномиален по переменным h_4, h_5 с суммарной степенью относительно них не выше 4, то* $f = f(H, C, h_6, h_7, h_8)$.

Есть предположение, что в классе функций, полиномиальных относительно C или переменным h_4, h_5, вообще, не существует первых интегралов, независимых от H, C, h_6, h_7, h_8.

Литература

1. Gauthier J.-P., Sachkov. Yu. L. *On the free Carnot* $(2,3,5,8)$ *group* // Program systems: theory and applications. 2015. Vol. 6, no. 2. P. 45–61.

2. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Обобщенный метод Лиувилля интергирования гамильтоновых систем* // Функц. анализ и его приложения. 1978. Т. 12, №2. С. 46–56.

3. Милованов М. В. *Интегрируемость разрешимых алгебр Ли* // Матем. сб. 1999. Т. 190. №5. С. 45–92.