МНОЖЕСТВА НЕПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Изобов[1], **С.А. Мазаник**[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by
[2] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
smazanik@bsu.by

Рассматриваем исходные линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|A(t)\| \leqslant a < +\infty, \quad t \geqslant 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. Наряду с системами (1_A) рассмотрим и возмущенные системы (1_{A+Q}) также с кусочно-непрерывными на полуоси $[0, +\infty)$ возмущениями Q, удовлетворяющими либо условию У2: $\|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}$, $\sigma > 0$, $t \geqslant 0$, либо более общему условию У3: $\lambda[Q] \equiv \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1} \ln \|Q(t)\| \leqslant -\sigma < 0$.

В нашей работе [1] введены непустые так называемые множества неприводимости $N_2(a,\sigma)$ и $N_3(a,\sigma)$, $\sigma \in (0, 2a]$, всех тех систем (1_A) с матрицами коэффициентов A, для каждой из которых существует неприводимая к ней система (1_{A+Q}) с матрицей Q, удовлетворяющей соответственно либо условию У2, либо более общему условию У3. Эти множества связаны очевидным включением $N_2(a,\sigma) \subset N_3(a,\sigma)$ при $\sigma \in (0, 2a]$ и из результатов работы [2] следует, что эти множества являются непустыми при $\sigma \in (0, 2a]$ и пустыми при $\sigma > 2a$. В работе [3] определены предельные множества неприводимости $N_i(\sigma) \equiv \operatorname*{Lim}\limits_{a\to+\infty} N_i(a,\sigma)$, $i = 2, 3$.

В работах [3–4] исследованы множества и предельные множества неприводимости как функции параметров a и σ. В частности доказаны следующие утверждения

Теорема 1. *Для множеств неприводимости $N_i(a,\sigma)$ и предельных множеств неприводимости $N_i(\sigma)$, $i = 2, 3$, выполнены строгие включения*

$$N_i(a,\sigma_2) \subset N_i(a,\sigma_1) \quad \forall 0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leqslant 2a, \quad N_i(a_1,\sigma) \subset N_i(a_2,\sigma) \quad \forall 0 \leqslant a_1 < a_2,\ \forall \sigma \in [0, 2a_2],$$

$$sN_i(\sigma_2) \subset N_i(\sigma_1) \quad \forall 0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2.$$

Теорема 2. *Для множеств $N_i(a,\sigma)$, $i = 2, 3$, для любых $a > 0$ и $\sigma_0 \in [0, 2a]$ выполнены соотношения*

$$\operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0+0} N_i(a,\sigma) \subset N_i(a,\sigma_0), \quad \operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0-0} N_2(a,\sigma) \supset N_2(a,\sigma_0), \quad \operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0-0} N_3(a,\sigma) = N_3(a,\sigma_0).$$

Теорема 3. *Для множеств $N_i(a,\sigma)$, $i = 2, 3$, для любых $a_0 > 0$ выполнены соотношения*

$$\operatorname*{Lim}_{a\to a_0+0} N_i(a,\sigma) = N_i(a_0,\sigma) \quad \sigma \geqslant 0,$$

$$\operatorname*{Lim}_{a\to a_0-0} N_i(a,\sigma) = N_i(a_0,\sigma), \quad \sigma > 2a_0, \quad \operatorname*{Lim}_{a\to a_0-0} N_i(a,\sigma) \subset N_i(a_0,\sigma), \quad \sigma \leqslant 2a_0.$$

Теорема 4. *Для предельных множеств неприводимости выполнены соотношения*

$$\operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0+0} N_i(\sigma) \subset N_i(\sigma_0), \quad i = 2, 3, \quad \operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0-0} N_2(\sigma) \supset N_2(\sigma_0), \quad \operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0-0} N_3(a,\sigma) = N_3(a,\sigma_0) \quad \forall \sigma_0 > 0.$$

Литература

1. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Общий признак приводимости линейных дифференциальных систем и свойства коэффициентов приводимости* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 191–202.

2. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–174.

3. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *О множествах линейных дифференциальных систем, к которым неприводимы возмущенные линейные системы* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1545–1550.

4. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Параметрические свойства множеств неприводимости линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 979–989.