

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПОСТРАНСТВАХ

М.М. Васьковский, И.В. Качан

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
vaskovskii_m@mail.ru, ilyakachan@gmail.com

На заданном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$, рассмотрим стохастическую эволюционную функциональную задачу Коши

$$dX(t, \omega) = AX(t, \omega)dt + f(t, \omega, X(t, \omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dW(t, \omega), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad X \in H, \quad (1)$$

$$X(0, \omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (2)$$

где $X(t, \omega) \in H$ — неизвестный случайный процесс; $\xi(\omega) \in H$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина такая, что $E\|\xi\|^p < \infty$, $p > 2$; $W(t, \omega) \in U$ — $\mathcal{F}_t$ -согласованное броуновское движение с ковариационным оператором Q_w ; H , U — сепарабельные гильбертовы пространства; A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $D(A)$ и порождающий C_0 -полугруппу $S(t)$, $C_0 = H$; $f: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \rightarrow H$, $g: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \rightarrow L_2(U, H)$ — функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для любого $a > 0$ существует константа q_a такая, что для всех $x, y \in H$, $\|x\| \leq a$, $\|y\| \leq a$ и п. н. всех $t \in [0; a]$: $\|f(t, \omega, x) - f(t, \omega, y)\| \leq q_a\|x - y\|$, $\|g(t, \omega, x) - g(t, \omega, y)\| \leq q_a\|x - y\|$;

2) существует непрерывная функция $k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что п. н. для всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполняются неравенства $\|f(t, \omega, x)\| \leq k(t)(1 + \|x\|)$, $\|g(t, \omega, x)\| \leq k(t)(1 + \|x\|)$.

Определение 1. Решением задачи (1), (2) будем называть непрерывный $\mathcal{F}_t$ -согласованный процесс $X_\xi(t)$, $t \geq 0$, такой, что $X_\xi(0) = \xi$ и п. н. для всех $t > 0$ выполняется равенство

$$X_\xi(t) = S(t)\xi(0) + \int_0^t S(t-s)f(s, \omega, X_\xi(s))ds + \int_0^t S(t-s)g(s, \omega, X_\xi(s))dW(s).$$

При сделанных предположениях задача (1), (2) имеет п. н. единственное решение.

Пусть задана убывающая положительная равномерно непрерывная функция $\lambda(t)$, определенная при достаточно больших $t \geq T > 0$, для которой $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$ и

существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Определение 2. Будем говорить, что решение задачи (1), (2) п. н. устойчиво с порядком $\gamma > 0$, если $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|X_\xi(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma$ п. н.

Теорема. Пусть заданы функционал $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H; \mathbb{R}^+)$ и $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — две неотрицательные непрерывные функции. Предположим, что существуют положительные постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что:

1) $\|x\|^r (\lambda(t))^m \leq V(t, x)$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H$;

2) $LV(t, x) + \zeta(t)QV(t, x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t, x)$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и $t \in \mathbb{R}^+$, где операторы

$$LV(t, x) = V'_t(t, x) + \langle V'_x(t, x), Ax + f(t, x) \rangle + \frac{1}{2} \text{tr} [V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q_w^{1/2})(g(t, x)Q_w^{1/2})^*],$$

$$QV(t, x) = \operatorname{tr} [V''_{xx}(t, x) \otimes V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q_w^{1/2})(g(t, x)Q_w^{1/2})^*];$$

$$3) \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu.$$

Тогда решение задачи (1), (2) п. н. устойчиво с порядком $(m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta))/r$.