ЭФФЕКТ ПЕРРОНА СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МИНИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Изобов [1], **А.В. Ильин** [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by
[2] Московский государственный университет, Москва, Россия

Рассматриваем линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и отрицательными характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) < 0$, а также нелинейную

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемым по переменным t, y_1 и y_2 m-возмущением функции f:

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{3}$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат и допустимого роста вне её.

Эффект Перрона [1; 2, с. 50–51] смены значений характеристических показателей устанавливает существование таких линейной системы (1) с конкретными характеристическими показателями $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ и 2-возмущения $(m = 2)$ функций $f(t, y)$, что все нетривиальные решения $y(t, c)$, $c = (c_1, c_2)$, системы (2) бесконечно продолжимы вправо (как правило, это не так) и почти все из них приобретают один и тот же положительный характеристический показатель $\lambda_0 > 0$ в случае $c_1 \neq 0$, а остальные начинающиеся на прямой $c_1 = 0$ решения совпадают с соответствующими решениями исходной системы (1) и тем самым сохраняют прежнее равное λ_2 отрицательное значение характеристического показателя.

Различным обобщениям такого эффекта посвящена серия из 16 наших работ, опубликованных в журналах «Дифференциальные уравнения» и «Доклады РАН» в 2010–2015 гг. При этом во всех уже полученных ранее обобщениях множество (уровня) всех решений (точнее, их начальных значений) системы (2), обладающих любым фиксированным показателем b из всего множества β характеристических показателей всех нетривиальных решений такой системы, имело положительную меру Лебега на прямой в случае $b \in [\lambda_1, \lambda_2)$ и на плоскости в случае $b \geqslant \lambda_2$. Поэтому возникает, в частности, задача о существовании такого варианта полного эффекта, в котором некоторые показатели $b \in \beta$ реализовались бы на единственных решениях системы (2) в первом случае и на множествах решений, начинающихся на соответствующих прямых плоскости $\mathbb{R}^2$ в случае $b > \lambda_2$. Одновременно также необходимо обеспечить пустое пересечение множеств характеристических показателей всех нетривиальных решений соответственно исходной (1) и возмущённой (2) систем, допускающее, в частности, включение $\beta \subset (0, +\infty)$.

Положительное решение этой задачи содержит

Теорема. *Для любых параметров*

$$m > 1, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \leqslant b_{10} < b_{11} < \ldots < b_{1k} < b_{20},$$

$$\lambda_2 \leqslant b_{20} < b_{21} < \ldots < b_{2l}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

и произвольных различных соответственно k *точек* $H_i = (h_{1i}, 0) \neq 0$, $i = \overline{1, k}$, *и* l *прямых* $L_i = \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : \ c_2 = h_{2i} \neq 0\}$, $i = \overline{1, l}$, *плоскости* $\mathbb{R}^2$ *существуют*:

1) *линейная система* (1) *с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_1(A) = \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_2(A)$;

2) *бесконечно дифференцируемое по своим аргументам возмущение* (3) *порядка* $m > 1$,

такие, что все нетривиальные решения $y(t, c)$ *возмущённой нелинейной системы* (2) *бесконечно продолжимы вправо и имеют характеристические показатели*

$$\lambda[y(\cdot, H_i)] = b_{1i}, \quad \lambda[y(\cdot, (c_1, 0))] = b_{10}, \quad c_1 \neq h_{1i}, \quad i = \overline{1, k},$$

$$\lambda[y(\cdot, c)] = b_{2i}, \quad c \in L_i, \quad \lambda[y(\cdot, c)] = b_{20}, \quad c_2 \neq 0, h_{2i}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Замечание. Утверждение теоремы можно распространить и на счётные множества точек оси $c_2 = 0$ и прямых плоскости $\mathbb{R}^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского (проект 16–51–00155) и Белорусского республиканского (проект Ф16Р–059) фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen* // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М. — Ижевск, 2006.