АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
vaskovskii_m@mail.ru, yaraslau.zadvorny@yandex.ru

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$dx(t) = f(t, x(t), x_t)dt + g(t, x(t), x_t)dW(t), \tag{1}$$

где функции $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times C_h\to\mathbb{R}^d$, $g:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times C_h\to\mathbb{R}^{d\times d}$ измеримы по Борелю, $x_t=\{x(t+\tau)|-h\leqslant\tau\leqslant 0\}\in C_h$, $C_h=C([-h,0],\mathbb{R}^d)$, $h>0$, $W(t)$ — d-мерное броуновское движение.

Для каждого $(t,x,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times C_h$ построим множества

$$F(t,x,\varphi)=\bigcap_{\delta>0}\overline{\mathrm{co}}\,[f(t,[x]_\delta,[\varphi]_\delta)]_\delta,\quad G(t,x,\varphi)=\bigcap_{\delta>0}\overline{\mathrm{co}}\,[g(t,[x]_\delta,[\varphi]_\delta)]_\delta.$$

Определение. Пусть ν — вероятностная мера на $(C_h,\beta(C_h))$. Если существуют: 1) вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}$, $t\geqslant -h$; 2) $(\mathcal{F})$-согласованный процесс $x(t)$, определенный при $t\geqslant -h$, траектории которого п. н. непрерывны; 3) $(\mathcal{F})$-броуновское движение $W(t)$, $t\geqslant 0$, $W(0)=0$ п. н.; 4) непрерывный $(\mathcal{F})$-согласованный процесс $\psi(t)$, $t\in[-h,0]$, имеющий распределение ν; 5) измеримые $(\mathcal{F})$-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t\in\mathbb{R}^+$; такие, что выполняются условия: *а*) $v(t)\in F(t,x(t),x_t)$, $u(t)\in G(t,x(t),x_t)$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in\mathbb{R}^+\times\Omega$, где μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^+$, и $\int_0^T(|v(s)|+|u(s)|^2)ds<\infty$ для всех $T\in\mathbb{R}^+$; *б*) с вероятностью 1 для всех $t\in[-h,\infty)$ выполняется соотношение

$$x(t)=\begin{cases}\psi(t), & t\in[-h,0],\\ \psi(0)+\int_0^t v(s)\,ds+\int_0^t u(s)\,dW(s), & t\geqslant 0,\end{cases}$$

то набор $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t,W(t),x(t),v(t),u(t))$ (или, кратко, $x(t)$) называется *слабым решением* уравнения (1) с начальным распределением ν.

Предположим, что $f(t,0,0)=0$ и $g(t,0,0)=0$ при всех $t\geqslant 0$. В этом случае уравнение (1) имеет нулевое решение. В дальнейшем предполагаем, что функции f и g имеют линейный порядок роста по (x,φ), т. е. существует постоянная C такая, что для любых $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi\in C_h$ выполняется неравенство $|f(t,x,\varphi)|+|g(t,x,\varphi)|\leqslant C(1+|x|+\|\varphi\|)$.

Нулевое решение уравнения (1) *устойчиво по вероятности*, если $\forall\varepsilon_1,\ \varepsilon_2>0\ \exists\delta>0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $\|x_0\|\leqslant\delta$ п. н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\{\sup_{t\geqslant 0}|x(t)|>\varepsilon_1\}<\varepsilon_2$. Нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности и $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $\|x_0\|\leqslant\delta$ п. н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty}x(t)=0\}\geqslant 1-\varepsilon$.

Теорема. *Пусть существуют число* $\delta>0$ *и функция* $V(t,x):\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^+$, *непрерывная по* $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$, *непрерывно дифференцируемая по* $t\in\mathbb{R}^+$ *и дважды непрерывно дифференцируемая по* $x\in\mathbb{R}^d$, *такие, что выполнены условия*:

1) $BV(t,\varphi)<\beta(\varepsilon)<0$ *при всех* φ *таких, что* $\varepsilon\leqslant|\varphi(0)|\leqslant\delta$, *и при всех* $t\in\mathbb{R}^+$, *где* $\beta:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^-$ — *некоторая функция,*

$$BV(t,\varphi)=\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t}+\sup_{v\in F(t,\varphi(0),\varphi)}\left(\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x}v\right)+\frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,\varphi(0),\varphi)}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2V(t,\varphi(0))}{\partial x^2}uu^{\mathrm{T}}\right);$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sup\limits_{t>0}V(t,x)=0$;

3) $V(t,0)=0$ *при всех* $t\in\mathbb{R}^+$;

4) $V(t,x)\geqslant\alpha(|x|)>0$ *при всех* x *таких, что* $|x|\leqslant\delta$, *и всех* $t\in\mathbb{R}^+$, *где* $\alpha:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ — *некоторая функция.*

Тогда нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности.*