

УДК 29.36.17:47.33.33

В.А. ФИРАГО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАДИУСА ГАУССОВОЙ ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ ОБЪЕКТИВА ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ СИСТЕМАМИ С ДИСКРЕТНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ИЗОБРАЖЕНИЯ

For the continuous representation of images and noises there are obtained the analytical expressions describing signal and noise functions at the output of optimal spatial filter, and also the dispersion of optimal estimation of a position of Gaussian radiation beam. It is shown, that at the use of the CCD the minimum error of estimation of the Gaussian beam position is observed at the beam effective diameter approximately equal to 0,8 of lateral length of a light-sensitive cell of the array.

В процессе пеленгации точечных объектов часто возникает необходимость в оценке положения центра их изображения. При существенной фоновой засветке отношение сигнал/шум вследствие радиационных шумов понижается, что не позволяет по зарегистрированному матрицей на приборах с зарядовой связью (ПЗС) зарядовому рельефу точно определить координаты центра. Даже при однородном фоне пуассоновские и собственные шумы ПЗС-матрицы обуславливают случайный характер наблюдения, поэтому приходится использовать методы оценки положения центра изображения, основанные на выводах статистической теории оптимального приема сигналов. В данной работе анализируется зависимость погрешности такой оценки от отношения эффективного диаметра пятна рассеяния объектива к размерам фоточувствительного элемента ПЗС.

1. Исходные условия формирования кадра

Освещенность изображения точечного излучателя в плоскости многоэлементного приемника излучения OXY можно записать с помощью свертки освещенности его изображения $E_{\eta}(x, y)$, создаваемой идеальным объективом, с функцией рассеяния применяемого объектива $h(x, y)$

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\eta}(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta = h_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L\left(\frac{x - \xi}{k}, \frac{y - \eta}{k}\right) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $h_0 = \pi \tau_c \tau_0 \cos^2 \beta / (4f^2/D^2)$ - коэффициент, связывающий яркость источника излучения $L(x_1, y_1)$ в пространстве предметов и освещенность его изображения; τ_c, τ_0 - коэффициенты пропускания среды и оптической системы соответственно; $k = f/l$ - масштабный коэффициент; f - фокусное расстояние оптической системы; l - расстояние от источника до объектива; β - угол между нормалью к входному зрачку объектива и направлением на источник. Введя координаты центра изображения точечного объекта $\mathbf{r}_0$, опишем его освещенность $E_n(x, y)$ следующей зависимостью

$$E_n(x, y) = E_n(\mathbf{r}) = \Phi_0 h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где Φ_0 - поток от объекта, проходящий через объектив.

Тогда распределение освещенности изображения точечного объекта для объектива с гауссовой функцией рассеяния и эффективным радиусом $\rho_{\text{эф}}$ имеет вид

$$E_n(x, y) = \frac{\Phi_0}{\pi \rho_{\text{эф}}^2} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\rho_{\text{эф}}^2} \right].$$

Интегральную освещенность матрицы потоком излучения от однородного фона можно вычислить с помощью выражения

$$E_{\Phi \Delta \lambda} = \tau_0 \tau_c \frac{\pi D_{\text{вх}}^2}{4 f^2} L_{\Phi \Delta \lambda},$$

где $L_{\Phi \Delta \lambda} = L_{\Phi}(\lambda_0) \Delta \lambda$ - яркость фона в спектральном диапазоне, определяемом шириной пропускания оптического фильтра, который используется для уменьшения интегрального фоновых потока.

Для вычисления зарядов, которые накапливаются элементами фотоприемника на ПЗС (ФПЗС), необходимо определить величины падающих на них потоков. Так, поток, попадающий на фоточувствительный элемент ФПЗС с номером (j, i) , можно найти, проинтегрировав освещенность матрицы по площади элемента $\Delta x_3 \cdot \Delta y_3$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i} &= \Phi_{\text{тн}} + \Phi_{\Phi} = \int_{\Delta y_3(j-1/2) \Delta x_3(i-1/2)}^{\Delta y_3(j+1/2) \Delta x_3(i+1/2)} \int [E_{\text{тн}}(x, y) + E_{\Phi \Delta \lambda}] dx dy = \\ &= \int_{\Delta y_3(j-1/2) \Delta x_3(i-1/2)}^{\Delta y_3(j+1/2) \Delta x_3(i+1/2)} \left\{ \tau_0 \tau_c \frac{\pi D_{\text{вх}}^2}{4 f^2} L_{\Phi \Delta \lambda} + \frac{\pi \tau_0 D_{\text{вх}}^2 E_{\text{тн}}}{4} \frac{1}{\pi \rho_{\text{эф}}^2} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\rho_{\text{эф}}^2} \right] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Тогда средние значения накапливаемых элементами ФПЗС зарядов при известных рабочей длине волны λ_0 и квантовом выходе $\eta(\lambda_0)$ легко рассчитываются по формуле

$$Q_{\Sigma ji} = Q_{Sji} + Q_{\Phi ji} + Q_{\text{тн}ji} = \eta(\lambda_0) \frac{\lambda_0 e}{hc} \Phi_{ji} t_n + Q_{\text{тн}ji}(t_n, T),$$

где $Q_{\text{тн}ji}(t_n, T)$ - темновой заряд, генерированный в ячейке (j, i) ПЗС за счет тепловых флуктуаций, величина которого экспоненциально зависит от температуры и линейно от времени накопления.

Величины этих зарядов флуктуируют во времени и пространстве (по площади изображения) как за счет собственных шумов ПЗС-матрицы, так и за счет флуктуации освещенности изображения. Таким образом, за время накопления в элементах ФПЗС образуются заряды со средней величиной $Q_{\Sigma ji} = Q_{Sji} = Q_{\Phi ji} = Q_{\text{тн}ji}$, а дисперсия их флуктуации описывается суммой дисперсий трех независимых пуассоновских процессов, которые создаются приходящими потоками пучка и фона, а также термогенерацией темновых зарядов. Далее при формировании цифровых видеопотоков к этим флуктуациям добавляются шумы считывания с

нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\text{сч}}^2$, распределение которых подчиняется нормальному закону. Можно показать, что значения «хвостов» плотностей вероятности распределения Пуассона при среднем количестве падающих фотонов (или генерированных зарядов) $\bar{N}$, превышающем несколько сотен, хотя и немного больше аналогичных значений для гауссового закона, но достаточно близки к ним. Поэтому для упрощения выкладок в процессе нахождения оптимальной последовательности операций оценки Φ_0 и $\mathbf{r}_0$ при значительной фоновой засветке целесообразно пользоваться нормальным распределением с математическим ожиданием $\bar{N}$ и среднеквадратическим отклонением $\sqrt{\bar{N}}$.

После окончания процесса формирования видеокadra мы имеем фиксированную во времени картину, и вся апостериорная информация содержится в пространственном распределении (по пикселям) накопленных сигналов $u_{ji}=k_{QU}Q_{\Sigma ji}$, где k_{QU} - коэффициент преобразования зарядов элементов ПЗС в напряжение видеосигнала. По этому распределению нам необходимо оценить величину Φ_0 и положение центра $\mathbf{r}_0$ изображения пучка, которое формирует полезный сигнал $s_{ji}=k_{QU}Q_{\Sigma ji}$. При аналого-цифровом преобразовании видеосигнала для уменьшения шумов считывания применяют интегратор, на выходе которого формируется максимально возможное для данной частоты считывания зарядов отношение амплитуды сигнала к среднеквадратичному отклонению шумов считывания $\sigma_{\text{сч}}$. Если фон неоднородный, необходимо, используя ранговую фильтрацию, выделить низкочастотную компоненту и вычесть ее из исходного изображения. После этих операций можно считать, что определение параметров изображения точечного объекта осуществляется на фоне однородного случайного дискретного поля, спектральная плотность мощности пространственных флуктуации которого является «квазибелой» и описывается выражением

$$G(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} g_{\Sigma} & \text{при } |\omega_x| \leq \omega_{\text{хгр}} \text{ и } |\omega_y| \leq \omega_{\text{угр}} \\ 0 & \text{при } |\omega_x| > \omega_{\text{хгр}} \text{ и } |\omega_y| > \omega_{\text{угр}} \end{cases},$$

где $g_{\Sigma}=g_{\Phi}+g_{\tau}+g_{\text{сч}}$ - суммарная спектральная плотность мощности, учитывающая пуассоновские шумы, создаваемые потоками излучения от объекта и фона, термогенерацией темновых зарядов, а также гауссовыми шумами считывания. Плотность вероятности амплитудного распределения суммарных шумов близка к гауссовой, что позволяет в аналитическом виде найти функцию правдоподобия и выражения для оценок требуемых параметров.

2. Оценка положения центра изображения при непрерывном представлении

При наблюдаемых на практике потоках излучения близость плотности вероятности радиационных шумов, описываемых распределением Пуассона, к нормальному распределению позволяет использовать согласованную фильтрацию [1, 2]. С ее помощью можно получить оптимальную оценку положения центра изображения. Обычно импульсную характеристику оптимального фильтра во временной области нормируют, чтобы сигнал на его выходе был равен отношению энергии сигнала к спектральной плотности шумов $E/(N_0/2)$. Поступим аналогично, представляя импульсную характеристику пространственного фильтра в виде

$$h(x, y) = \frac{s_0(x, y)}{g_{\Sigma}} = \frac{u_0}{g_{\Sigma}} e^{-\frac{x^2 + y^2}{\rho_{\Phi}^2}},$$

где u_0 - амплитуда единичного сигнала от точечного объекта, например, напряжения. Тогда сигнальная функция [2] на выходе фильтра будет равна

$$\hat{S}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) = \frac{u \cdot u_0 \pi \rho_{\text{эф}}^2}{2g_{\Sigma}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2\rho_{\text{эф}}^2}}, \quad (1)$$

где u — амплитуда сигнала на входе фильтра. За оценку положения центра изображения $\mathbf{r}_0^*$ принимаются координаты максимума сигнальной функции $\mathbf{r}_m$. Очевидно, что сигнальная функция пропорциональна функции автокорреляции распределения освещенности по сечению пучка, осесимметричная и шире исходного сигнала в два раза. Можно показать, что при заданных условиях дисперсия шума на выходе фильтра будет равна $\sigma_{\text{вых}}^2 = u_0^2 \pi \rho_{\text{эф}}^2 / g_{\Sigma}$, а отношение S/N .

$$\hat{Q}(\mathbf{r}_0) = \frac{[\hat{S}(\mathbf{r}=\mathbf{r}_0)]^2}{\sigma_{\text{вых}}^2} = \frac{[u \cdot u_0 \pi \rho_{\text{эф}}^2 / (2g_{\Sigma})]^2}{u_0^2 \pi \rho_{\text{эф}}^2 / (2g_{\Sigma})} = \frac{u^2 \pi \rho_{\text{эф}}^2}{2g_{\Sigma}}. \quad (2)$$

Рассчитывая дисперсию оценки положения центра пучка σ_r^2 , при условии, что координаты глобального максимума сигнальной функции $\mathbf{r}_m$ лежат возле центра пучка $\mathbf{r}_0$, получим

$$\sigma_r^2(\mathbf{r}_m|\mathbf{r}_0) = \frac{\rho_{\text{эф}}^2}{\hat{Q}^2(\mathbf{r}_0)} \left(1 + \frac{3}{\hat{Q}^2(\mathbf{r}_0)} \right).$$

3. Оценка положения центра изображения при дискретном представлении

При размерах эффективного диаметра функции рассеяния объектива, соизмеримых с размерами фоточувствительных элементов ПЗС-матрицы, форма согласованного фильтра будет зависеть от местоположения центра пятна относительно середины ближайшего пиксела. Например, при дискретном сдвиге с шагом, равным 1/8 размера элемента ПЗС по каждой из осей, возможно 81 положение центра пятна рассеяния относительно середины центрального пиксела. При сдвиге от центра больше, чем на 1/4 размера элемента ФПЗС, картина будет периодически повторяться. Поскольку накапливаемые фоточувствительными элементами ПЗС фотоприемника заряды пропорциональны количеству падающих на каждый из них фотонов, то проявляется заметная дискретизация получаемого изображения, и в принципе для оптимальной оценки его положения надо применять набор согласованных фильтров.

Для уменьшения числа выполняемых операций можно использовать два согласованных фильтра, маски которых формируются для двух положений центра пятна относительно середины ближайшего пиксела: 1) центр пятна совпадает с серединой пиксела, 2) центр пятна лежит на стыке четырех пикселей. После обработки изображения этими фильтрами получим грубую оценку местоположения пучка. Причем за более достоверную принимается оценка с большим отношением величины максимального отклика фильтра к среднеквадратическому отклонению шумов на его выходе. Для уточнения положения центра пучка в пределах найденного пиксела необходимо использовать набор масок, каждая из которых соответствует определенному положению центра пучка $\mathbf{r}_0$ относительно середины пиксела. Например, при нахождении квадранта пиксела, в котором располагается центр объекта, необходимо иметь четыре маски ОПФ, соответствующие положению $\mathbf{r}_0$ в центрах этих квадрантов. Последующее выполнение при исходном положении каждой из этих масок операции свертки дает возможность найти значения четырех сигнальных функций, наибольшее из которых будет указывать, что центр изображения объекта расположен в этом квадранте. Если необходима более высокая точность, разбиение квадрантов повторяют и используют 16 масок. Поскольку эти операции

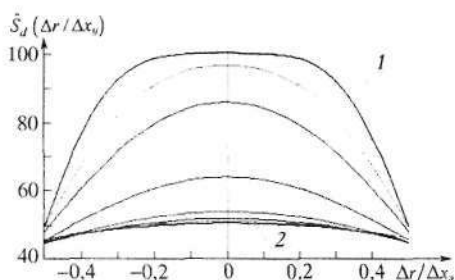


Рис. 1. Семейство зависимостей величины ненормированной сигнальной функции от сдвига $\Delta r/\Delta x_0$ при дискретном представлении поля для различных значений отношения $d_{\phi}/\Delta x_0$ в диапазоне от 0,4 – 1 до 2,2 – 2 (шаг 0,2)

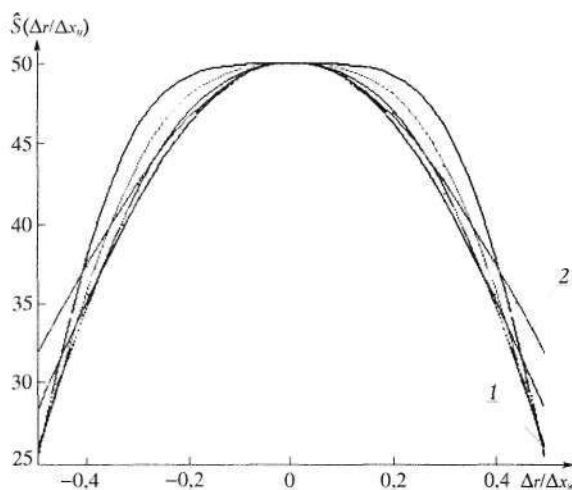


Рис. 2. Зависимости величины нормированной сигнальной функции от сдвига $\Delta r/\Delta x_0$ при различных значениях $d_{\phi}/\Delta x_0$ в диапазоне от 0,4 – 1 до 1,0 – 2 (шаг 0,1)

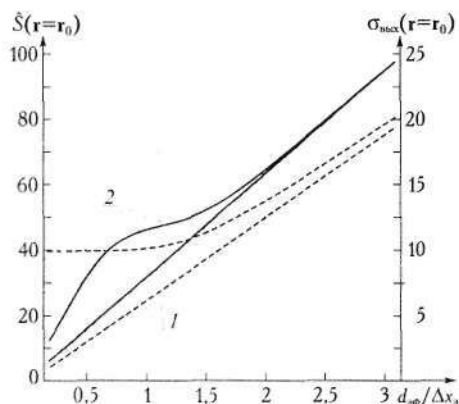


Рис. 3. Зависимости амплитуды сигнальной функции $\hat{S}(r=r_0)$ (сплошные линии) и среднеквадратического отклонения помеховой функции $\sigma_{\text{внх}}(r=r_0)$ (штриховые линии) при непрерывном (1) и дискретном (2) представлении от отношения $d_{\phi}/\Delta x_0$

очевидны и не требуют затрат вычислительных ресурсов, с их помощью при достаточном отношении сигнал/шум легко уточняется положение объекта.

Наибольшая погрешность оценки положения центра изображения с эффективным диаметром сечения d_{ϕ} , сравнимым с размерами светочувствительных элементов ПЗС $\Delta x_3 \approx \Delta y_3$, наблюдается, когда r_0 лежит в середине пиксела. Поэтому рассмотрим поведение сигнальной функции дискретного пространственного фильтра для этого случая. Взвешивающие коэффициенты для его маски находятся интегрированием

$$h_{ji} = \frac{u_0}{h_u g_{\Sigma}} \times \int_{\Delta y_3(j-1/2)\Delta x_3(i-1/2)}^{\Delta y_3(j+1/2)\Delta x_3(i+1/2)} e^{-\frac{x^2+y^2}{\rho^2\phi}} dx dy$$

и нормируются путем деления на величину центрального элемента маски $h_u = h(j_u, i_u)$. Тогда зависимость сигнальной функции от величины смещения между серединой пиксела, в котором расположен центр маски, и центром изображения точечного объекта имеет вид

$$\hat{S}_d(|r_{h_{\text{ли}}} - r_0|) = \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{i=1}^{m_x} s_{ji}(x_0, y_0) h_{j-j_{\text{ли}}, i-i_{\text{ли}}} \Delta x_3 \Delta y_3, \quad (3)$$

где суммирование ведется по площади маски размером $m_y \times m_x$, $j_{\text{ли}} = (j_m - 1)/2$ и $i_{\text{ли}} = (i_m - 1)/2$ - индексы пиксела, в котором размещается левый верхний угол маски фильтра. На рис. 1 представлены соответствующие зависимости. При $d_{\phi} > 2\Delta x_3$ сигнальные функции для дискретного случая прак-

тически совпадают с сигнальной функцией (1), полученной для непрерывного случая. При $d_{\text{эф}} < \Delta x_3 \approx \Delta y_3$ сигнал на выходе фильтра при уменьшении $d_{\text{эф}}$ увеличивается, поскольку весь поток пучка попадает в один пиксел и стремится к величине $\hat{S}_d(\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{\text{ну}}) \rightarrow u \cdot u_0 \pi \rho_{\text{эф}}^2 / g_{\Sigma}$. Это соответствует детектированию потока одним прямоугольным фотоприемником, поэтому сигнал на его выходе в два раза больше, чем $\hat{S}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) = u \cdot u_0 \pi \rho_{\text{эф}}^2 / (2g_{\Sigma})$. Погрешность определения положения центра пятна σ_{dr}^2 зависит от крутизны сигнальной функции (3) в середине пиксела (при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$) и оказывается минимальной, как видно из рис. 2, при $d_{\text{эф}} / \Delta x_3 \approx 0,8$, что уточняет значение, полученное в [3].

Несмотря на увеличение сигнала в переходной области, дисперсия шумов на выходе дискретного фильтра растет быстрее, стремясь к величине $\sigma_n^2 = u_0^2 x_3 y_3 / g_{\Sigma}$, и отношение S/N становится хуже по сравнению с (2). Рис. 3 иллюстрирует зависимость сигнальной и помеховой функций для непрерывного и дискретного фильтров от эффективного диаметра функции рассеяния объектива при условии, что $u \sim 1/\sqrt{\pi \rho_{\text{эф}}^2}$, т. е. при фиксированном отношении S/N на выходе непрерывного фильтра.

Таким образом, при оценке положения изображения точечного объекта преимушества имеют ПЗС с меньшими размерами фоточувствительных ячеек, поскольку при $d_{\text{эф}} < 0,8 \Delta x_3$ отношение S/N понижается и погрешность, определяемая дисперсией оценки σ_{dr}^2 , быстро растет.

1. Левшин В.Л. Обработка информации в оптических системах пеленгации. М., 1978.
2. Куликов В.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М., 1978.
3. Лебедев Н.В. // Техника средств связи. Сер. Техника телевидения. 1978. Вып. 6. С. 25.

Поступила в редакцию 30.06.05.

Владимир Александрович Фираго - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и оптоэлектроники.