УДК 551.508

ММ. КУГЕЙКО, С.А. ЛЫСЕНКО

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ ТОЧЕК НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ЛАЗЕРНОГО СИГНАЛА, ОСНОВАННЫХ НА ЧИСЛЕННОМ ИЛИ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАЗЕРНОЙ ЛОКАЦИИ

The influence of an error in reference values assignment on the accuracy characteristics of laser location method of determination of scattering medium attenuation coefficients is investigated. Discrepancy in restoring results of attenuation coefficient profile when assigning reference calibration point at the beginning and at the end of a route is explained. The expressions for the error of restored attenuation coefficient profile at inexact assignment of the reference value is obtained. An analysis of noise stability of successive layers method and modified asymptotic signal method is performed; an identity of both methods is marked. It is shown that in conditions when scattering indicatrix is distributed in accordance with uniform law one should use modified asymptotic signal method.

Регистрируемый в лазерно-локационных измерениях сигнал обратного рассеяния *P(r),* обусловленный рассеянием посланного импульса на дальность *r*, количественно описывается с помощью уравнения лазерной локации, которое в дифференциальной форме (при $g_\pi(r)=\text{const}$) имеет вид [1]

$$\varepsilon'(r) - \varepsilon(r)[\ln \psi(r)]' = 2\varepsilon^2(r)\,, \qquad (1)$$

где $\psi(r) = P(r)r^2A^{-1}g_\pi^{-1}T^{-2}(0, r_0)$ - экспериментально определяемая функция, $\varepsilon(r)$ - коэффициент ослабления, $g_\pi(r)=\beta_\pi(r)/\varepsilon(r)$ - индикатриса рассеяния в направлении назад, $T^2(0, r) = \exp\left\{-2\int_0^r \varepsilon(z)dz\right\}$ - интегральное пропускание участка среды [0, *r*].

Решение уравнения локации возможно при использовании априорной информации или предположений об исследуемой среде. Методы решения можно разделить на численные и аналитические [1-5]. К численным относятся итерационный метод, метод последовательных слоев и его модификации, использующие предположение, что в двух соседних слоях среды (Δr_i и Δr_{i+1}) индикатриса рассеяния изменяется слабо. Особенностью названных методов является необходимость априорного задания индикатрисы рассеяния в направлении назад $g_\pi(r)$ и заранее устанавливаемых опорных значений определяемых оптических характеристик. Аналитические методы используют предположение о неизменности $g_\pi(r)$ по всей трассе или же функциональную связь между оптическими характеристиками, входящими в уравнение.

Если граничное условие в (1) задается как значение коэффициента ослабления $\varepsilon(r_k)$ в некоторой опорной точке r_k, то решение примет вид [2]

$$\varepsilon(r) = \psi(r)\left[\frac{\psi(r_k)}{\varepsilon(r_k)} - 2\int_{r_k}^{r}\psi(z)dz\right]^{-1}. \qquad (2)$$

Если в (2) опорную точку устремить в бесконечность, полагая при этом $\varepsilon(r) \neq 0$ и учитывая, что $\psi(r)\to 0$ при $r_k \to\infty$, то, поменяв местами пределы интегрирования, можно прийти к математическому выражению алгоритма асимптотического сигнала:

$$\varepsilon(r) = \psi(r)\left[2\int_{r}^{\infty}\psi(z)dz\right]^{-1}.$$

При использовании этого алгоритма вследствие ограниченной точности измерения и наличия шумов приходится заменять бесконечный верхний предел некоторым конечным значением r_n, где сигнал сравнивается с положением фон+шум. На практике это приводит к так называемому краевому эффекту, выражающемуся в стремлении восстанавливаемого значения $\varepsilon(r)$ к бесконечности при $r \to r_n$. Одним из возможных способов устранения краевого эффекта является доопределение задачи, основывающееся на стягивании решения в точке r_n к некоторому более или менее вероятному значению [3].

Далее нами исследуется эффективность модифицированных методов асимптотического сигнала и последовательных слоев, наиболее часто используемых на практике и в общем отражающих возможности и недостатки как всех численных, так и аналитических методов. Модифицированный метод асимптотического сигнала [6, 7] основан на том, что если в среде для какой-либо точки известно значение коэффициента ослабления $\varepsilon(r_i)$, то значение асимптотического сигнала для этой точки можно получить из выражения

$$I_m(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} S(z)dz = \frac{S(r_i)}{2\varepsilon(r_i)}, \qquad (3)$$

где $S(r) = P(r)r^2$ - сигнал обратного рассеяния, скорректированный на квадрат расстояния.

Коэффициенты ослабления вправо и влево от *i*-й точки рассчитываются по следующим формулам:

$$\varepsilon(r_{i+k}) = S(r_{i+k})\left[2(I_m(r_i) - \int_{r_i}^{r_{i+k}} S(z)dz)\right]^{-1},$$
$$\varepsilon(r_{i-k}) = S(r_{i-k})\left[2(I_m(r_i) + \int_{r_{i-k}}^{r_i} S(z)dz)\right]^{-1}. \quad (4)$$

Модифицированный метод последовательных слоев основан на предположении постоянства оптических характеристик в каждом оптически тонком слое $i\Delta r_i$, $i = 1, 2, \ldots$, из последовательности которых состоит трасса зондирования (на $g_\pi(r)$ к тому же накладывается требование постоянства по всей трассе зондирования или медленное изменение от слоя к слою) [5]. При этом для любых двух соседних слоев с учетом ранее введенных обозначений справедливо соотношение

$$\frac{S(r_{i+1})}{S(r_i)} = T^2(\Delta r_i)\frac{\varepsilon(r_{i+1})}{\varepsilon(r_i)}. \quad (5)$$

Обратимость алгоритма (5) позволяет использовать в качестве опорного значения $\varepsilon(r_k)$ его величину в любой точке трассы.

Как видно из (3) и (5), для каждого из рассматриваемых алгоритмов требуется знание опорных значений определяемых оптических характеристик. Влияние задания опорных значений на точность восстановления определяемого из измеряемых сигналов профиля коэффициентов ослабления $\varepsilon(r_i)$ оценим как аналитически, так и путем численного математического моделирования, которое проводится следующим образом:

а) по заданным профилям коэффициента ослабления $\varepsilon(r_i)$ и индикатрисе рассеяния в направлении назад $g_\pi(r)$ в приближении однократного рассеяния рассчитывается мощность отраженного назад по трассе зондирования сигнала;

б) из рассчитанных сигналов с использованием алгоритмов (4) и (5) восстанавливаются профили $\tilde{\varepsilon}(r_i)$. Результаты моделирования приведены на рис. 1-3.

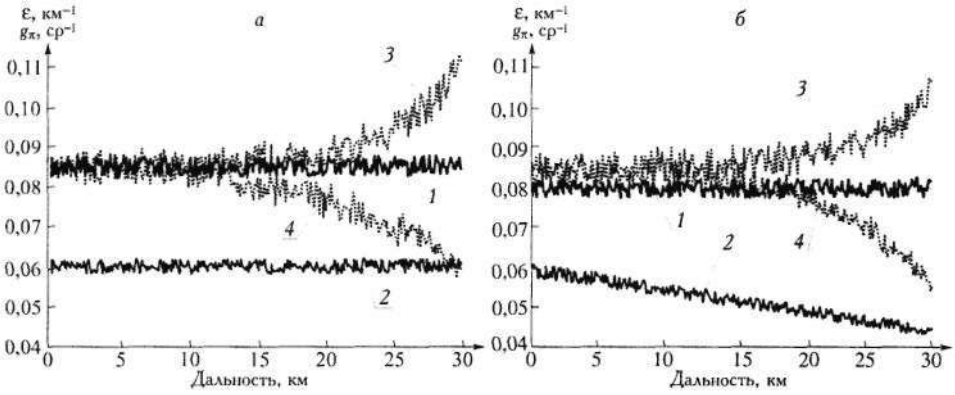

Рис. 1. Результаты численного моделирования метода последовательных слоев при 3 % случайном разбросе заданных значений коэффициента ослабления $\varepsilon(r)$ - кривые *1* и индикатрисы рассеяния $g_\pi(r)$ - кривые 2. Кривые *3* и *4* - восстановленные значения $\tilde{\varepsilon}(r)$ при расположении опорной калибровочной точки $\varepsilon(r_k)$ в конце трассы зондирования и относительной ошибке ее определения δ_ε, равной 0,3 и -0,3 соответственно. Рис. *а* и *б* соответствуют оптическим ситуациям с постоянной и убывающей вдоль трассы зондирования $g_\pi(r)$ соответственно

Из рис. 1 *а* видно, что если опорная калибровочная точка в модифицированном методе последовательных слоев расположена в конце трассы зондирования и значение коэффициента ослабления задается в ней с относительной ошибкой $\delta_\varepsilon = (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)/\varepsilon$, где $\tilde{\varepsilon}$ - оценочное или измеряемое значение истинной величины ε, то для случая, когда g_π является медленно изменяющейся или быстроосцил-

лирующей функцией с малым радиусом корреляции, имеет место сходимость решения к точному при приближении к началу трассы. Эта сходимость обусловливается наличием в (5) сомножителя $S(r_i)/S(r_{i+1})$, который пропорционален $T^2(\Delta r_i)$. Для однородной среды $(\varepsilon(r) = \text{const})$ алгоритм (5) принимает следующий вид:

$$\tilde{\varepsilon}(r_i) = \tilde{\varepsilon}(r_{i+1}) \exp\left\{-2(\tilde{\varepsilon}(r_{i+1}) - \varepsilon)\right\}, \tag{6}$$

где ε - задаваемое значение. Как видно из (6), при удалении *r* от опорной точки восстанавливаемое значение $\tilde{\varepsilon}(r)$ асимптотически стремится к заданному ε.

Рис. 1 *б* отражает результаты восстановления профиля $\varepsilon(r)$ для убывающей вдоль трассы зондирования индикатрисы рассеяния. Легко показать, что при данном профиле индикатрисы рассеяния решение будет сходиться не к точному значению коэффициента ослабления, а к такому, при котором скорость сходимости к заданному значению $\varepsilon(r)$ компенсируется возрастанием или убыванием индикатрисы. Действительно, для однородной (по $\varepsilon(r_i)$) среды можно записать следующее соотношение

$$\frac{\tilde{\varepsilon}(r_i)}{\tilde{\varepsilon}(r_{i+1})} = \exp\left\{-2(\tilde{\varepsilon}(r_{i+1}) - \varepsilon)\right\} \frac{g_\pi(r_i)}{g_\pi(r_{i+1})}.$$

При установившемся на удалении от опорной точки (за счет схождения при пошаговом пересчете $\tilde{\varepsilon}(r_i)$ к заданному $\varepsilon(r)$) значении $\tilde{\varepsilon}(r_i)/\tilde{\varepsilon}(r_{i+1})=1$ и из только что приведенного выражения следует

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{2\Delta r} \ln\left(\frac{g_{\pi i+1}}{g_{\pi i}}\right).$$

Для случая, когда опорная точка $\varepsilon(r_k)$ задается в начале трассы, погрешность восстановления $\tilde{\varepsilon}(r_i)$ будет экспоненциально возрастать при увеличении оптической толщины $\tau(r_k, r) = \int_{r_k}^{r_i} \varepsilon(z)dz$, причем, как видно из (5), скорость расходимости решения будет равна скорости его сходимости при восстановлении профиля с задаваемым опорным значением в конце трассы, что следует из соответствующего соотношения для однородной среды:

$$\tilde{\varepsilon}(r_i) = \tilde{\varepsilon}(r_{i+1}) \exp\left\{-2(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}(r_i))\right\}.$$

Аналогичным будет решение для модифицированного метода асимптотического сигнала. На рис. 2 *а* показаны результаты восстановления профиля коэффициента ослабления в модельной атмосфере для случаев точного задания опорного значения в начале (кривая 7) и в конце трассы (кривая *4)*. Очевидно, что при восстановлении с начала трассы, как и при использовании метода последовательных слоев, наблюдается сильное расхождение между задаваемым и восстанавливаемым профилем $\varepsilon(r_i)$ или даже абсурдный с точки зрения физики результат - $\varepsilon \to \infty$ или $\varepsilon < 0$ (рис. 2 *б)*. Это соответствует случаю, когда в некоторой точке знаменатель в (4) приближается к нулю или становится отрицательным. При расположении $\varepsilon(r_k)$ в конце трассы (кривая *4)* точность расчета профиля $\tilde{\varepsilon}(r)$ увеличивается.

При задании опорного значения $\varepsilon(r_k)$ в начале и в конце трассы зондирования асимптотический сигнал, получаемый в точке r_i, будет выражаться следующими соотношениями:

$$\tilde{I}_m(r_i) = I_m(r_i) \frac{\overline{g}_\pi(r_0, r_i)}{g_\pi(r_i)} \left\{1 + \left(\frac{g_\pi(r_0)(1+\delta_f(r_0))}{g_\pi(r_0, r_i)} - 1\right) T^{-2}(r_0, r_i)\right\}, \tag{7}$$

$$\tilde{I}_m(r_i) = I_m(r_i) \frac{\overline{g}_\pi(r_i, r_n)}{g_\pi(r_i)} \left\{1 + \left(\frac{g_\pi(r_n)(1+\delta_f(r_n))}{\overline{g}_\pi(r_i, r_n)} - 1\right) T^{2}(r_i, r_n)\right\}, \tag{8}$$

где $I_m(r_i)$ - точное значение асимптотического сигнала в точке r_i ($i = 0, \ldots, n$). Как видно из (7) и (8), при увеличении оптической толщины $\tau(r_i, r_n)$ и $\tau(r_0, r_i)$ (уменьшении $T_2(r_i, r_n)$ и $T_2(r_0, r_i)$) неточность задания опорного значения коэффициента ослабления в конце трассы и непостоянство лидарного отношения вдоль трассы все меньше сказываются на точности восстановления профиля коэффициента ослабления (разница между $\tilde{I}_m(r_i)$ и $I_m(r_i)$ уменьшается). Выражение для $\delta_\varepsilon(r_i)$ при неточном задании значения коэффициента ослабления в опорной точке легко получить для случая $g_\pi(r_i) = \text{const}$. Как следует из (7) и (8), относительная ошибка определения значения асимптотического сигнала в точке r_i

$$\delta_I(r_i) = \frac{\tilde{I}_m(r_i) - I_m(r_i)}{I_m(r_i)} = T^2(r_i, r_k)\delta_I(r_k), \qquad (9)$$

где r_k - опорная точка ($k = 0,\ldots, n$), $T^2(r_i, r_k) = \exp\left\{-2\int_{r_i}^{r_k} \varepsilon(r)dr\right\}$, асимптотически стремится к нулю при уменьшении $T_2(r_i, r_k)$. При этом соответствующая (9) погрешность

$$\delta_\varepsilon(r_i) = \frac{-\delta_I(r_i)}{1+\delta_I(r_i)} = \left[T^{-2}(r_i, r_k) + \frac{T^{-2}(r_i, r_k)}{\delta_\varepsilon(r_k)} - 1\right]^{-1}$$

также стремится к нулю при уменьшении $T_2(r_i, r_k)$.

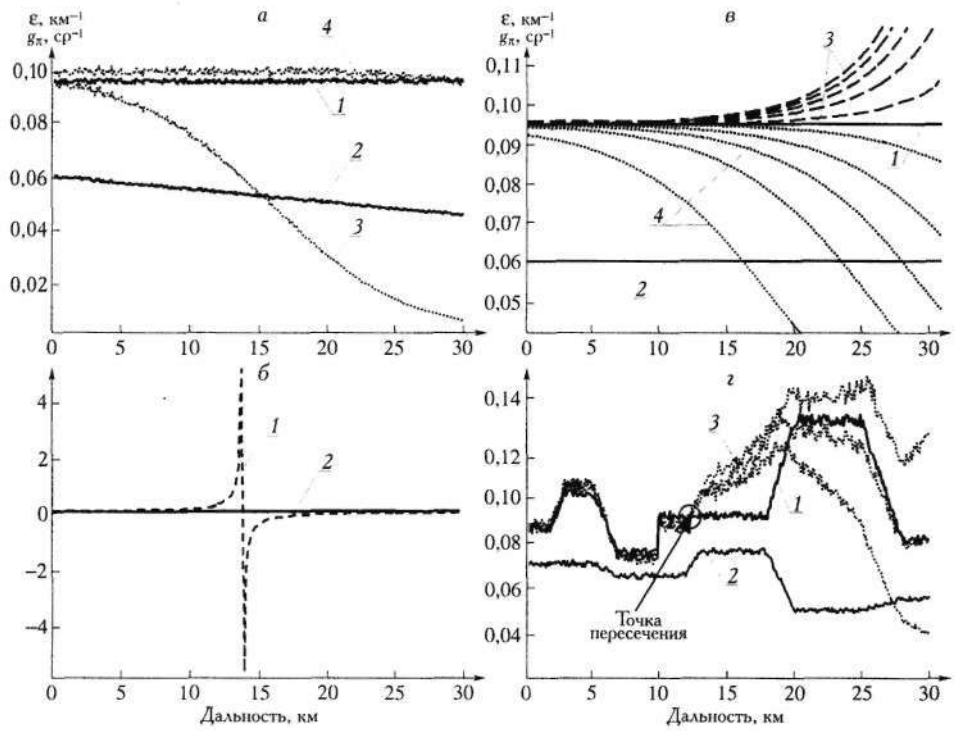

Рис. 2. Результаты восстановления профилей $\varepsilon(r)$ с использованием модифицированного асимптотического метода: *а* – кривые *1*, *2* – модельные профили $\varepsilon(r)$ и $g_\pi(r)$; кривые *3*, *4* – восстановленные профили $\tilde{\varepsilon}(r)$; *б* – кривая *1* – модельный профиль $\varepsilon(r)$ (тот же, что и на рис. *а*), кривая *2* – профиль, восстановленный при задании опорного значения $\varepsilon(r_k)$ в начале трассы с относительной ошибкой 0,1; *в* – кривые *1*, *2* – модельные профили $\varepsilon(r)$ и $g_\pi(r)$; кривые *3*, *4* – восстановленные профили $\tilde{\varepsilon}(r)$ при положительных и отрицательных относительных ошибках задания опорных значений на конце трассы соответственно; *г* – кривые *1*, *2* – профили $\varepsilon(r)$ и $g_\pi(r)$ соответственно; *3* – восстановленные профили $\tilde{\varepsilon}(r)$ при трех ошибках задания опорного значения на конце трассы

На рис. 2 *в* приведены результаты восстановления профиля $\varepsilon(r)$ при завышенных (кривые *3)* и заниженных (кривые *4)* значениях опорных коэффициентов ослабления. Как видно, при положительных отклонениях в опорных значениях ($\delta_\varepsilon = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$) наблюдается более быстрая сходимость получаемого решения к точному, чем при таких же по модулю отрицательных, поскольку для относительных ошибок в определении асимптотического сигнала $\delta_I = -\delta_\varepsilon/(1+\delta_\varepsilon)$, получаемых из (3), выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\left|\delta^-_I\right|}{\left|\delta^+_I\right|} = \frac{1+\left|\delta_\varepsilon\right|}{1-\left|\delta_\varepsilon\right|} > 1,$$

где δ_I^- и δ_I^+ - относительные ошибки в определении I_m при завышенном и заниженном значении $\varepsilon(r_k)$ соответственно. Таким образом, чем меньше отличие в значении вычисляемой величины асимптотического сигнала от истинного, тем быстрее будет сходиться решение с использованием данного значения.

Важно отметить, что для метода асимптотического сигнала, как и для метода последовательных слоев, в зависимости от профиля индикатрисы рассеяния восстановленный профиль коэффициента ослабления может пересекаться с искомым профилем в одной или нескольких точках. Получаемое в такой точке значение асимптотического сигнала в точности соответствует значению в ней коэффициента ослабления, и при дальнейшем пересчете влево от этой точки получаемые значения $\varepsilon(r)$ не зависят от первоначальной точности задания опорного значения. Этот факт иллюстрирует рис. 2 *г,* на котором показаны восстановленные профили $\varepsilon(r)$ при трех относительных ошибках задания опорного значения ($\delta_\varepsilon = 0; 0,1; -0,1$). Согласно результатам моделирования при малом уровне шума в измеряемом локационном сигнале названные методы будут приводить практически к одинаковым результатам, при этом положение точки пересечения определяется формой профиля индикатрисы рассеяния и слабо зависит от значения δ_ε

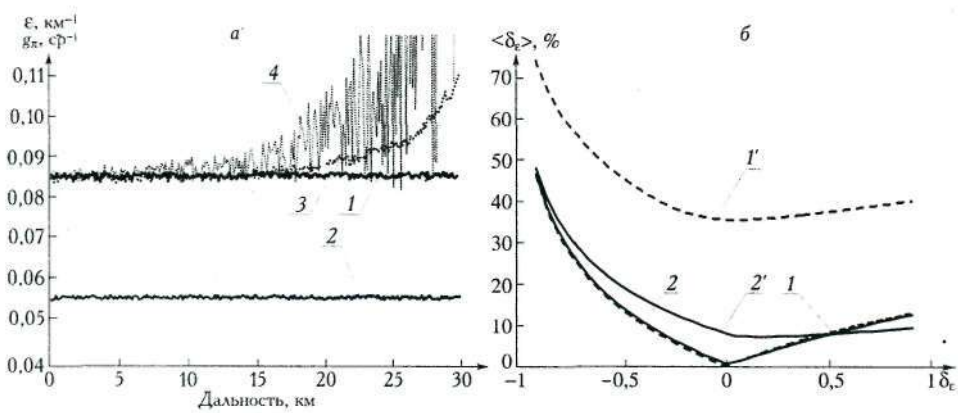

Рис. 3. Результаты сравнительного анализа эффективности модифицированного асимптотического метода и метода последовательных слоев:

а – кривые *1*, *2* – заданные профили $\varepsilon(r)$ и $g_\pi(r)$; кривые *3*, *4* – профили, восстановленные модифицированными методами асимптотического сигнала и последовательных слоев соответственно; *б* – зависимость погрешности восстановления коэффициента ослабления методом последовательных слоев и асимптотического сигнала (кривые *1* и *2* соответственно) от ошибки задания опорного значения $\varepsilon(r_k)$ в конце трассы при отсутствии в сигнале обратного рассеяния высокочастотной шумовой составляющей (кривые *1*, *2*) и при наложении на сигнал случайной ошибки в пределах 5 % (кривые *1′*, *2′*)

На рис. 3 *а* показаны восстановленные профили коэффициента ослабления модифицированным асимптотическим методом и методом последовательных слоев при наложении на сигнал случайной ошибки в пределах 5 %. При этом, как видно из рисунка, метод последовательных слоев становится практически неинформативным. Рис. 3 *б* иллюстрирует зависимость погрешности восстановления профиля $\varepsilon(r)$, вычисляемой по формуле

$$\langle \delta_\varepsilon \rangle = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{\varepsilon}(r_i)-\varepsilon(r_i)\right]^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(r_i)},$$

где n - число каналов регистрации сигнала на трассе зондирования, от ошибки задания опорного значения коэффициента ослабления в конце трассы при отсутствии в сигнале шумовой составляющей (δ_S=0) и при наложении на сигнал случайной ошибки δ_S в пределах 5 %. В отсутствие шума оба метода дают приблизительно одинаковые результаты, однако наличие в сигнале высокочастотной составляющей сильно ухудшает качество работы метода последовательных слоев. Характер поведения кривой отражает отмеченные особенности рассматриваемых методов, касающиеся сходимости решения к заданному профилю $\varepsilon(r)$, и независимость восстанавливаемого значения $\varepsilon(r)$ от опорных значений при пересечении восстанавливаемого профиля с задаваемым.

Идентичность методов при малом уровне шума можно объяснить, проанализировав соотношение (5). Представим алгоритм метода последовательных слоев при задании опорной калибровочной точки в конце зондируемой трассы в следующем виде:

$$\varepsilon(r_{i-1}) = S(r_{i-1})\left\{2\left(\frac{S(r_i)}{2\varepsilon(r_i)}T^{-2}(\Delta r_i)\right)\right\}^{-1}. \qquad (10)$$

С учетом (3) выражение (10) легко преобразовать к виду:

$$\varepsilon(r_{i-1}) = \frac{S(r_{i-1})}{2\left[I_m(r_i)T^{-1}(\Delta r_i)\right]} = \frac{S(r_{i-1})}{2I_m(r_{i-1})},$$

что соответствует алгоритму метода асимптотического сигнала (3).

Таким образом, результаты как аналитических оценок, так и проведенного численного моделирования показывают, что асимптотический метод гораздо менее чувствителен к наличию в сигнале обратного рассеяния высокочастотной шумовой составляющей, чем метод последовательных слоев. Кроме того, поскольку задаваемые при моделировании распределения $g_\pi(r)$ соответствовали равномерному распределению, можно однозначно утверждать, что метод асимптотического сигнала целесообразно использовать для неоднородных рассеивающих сред, таких как атмосфера и водная среда, удовлетворяющих во многом данному распределению.

1. Креков Г.М., Кавкянов С И., Крекова М.М. Интерпретация сигналов оптического зондирования атмосферы. Новосибирск, 1987.

2. Креков Г.М., Крекова М.М., Макиенко Э.В., Наац И.Э. Лазерное зондирование облаков (теоретические аспекты). Томск, 1975.

3. Зуев В.Е., Креков Г.М., Крекова М.М., Наац И. Э.//Вопросы лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск, 1976.

4. Зуев В.Е., Креков Г.М., Крекова М. М.//Дистанционное зондирование атмосферы. Новосибирск, 1978.

5. Кауль Б.В. Лазерное зондирование аэрозольных загрязнений атмосферы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1978.

6. Кугейко М.М., Белобровик В.И., Ашкинадзе Д.А., Сергеев Н.М.// Изв. АН СССР. ФАО. 1980. Т. 16. № 9. С. 968.

7. Кугейко М.М., Оношко Д.М. Теория и методы оптико-физической диагностики неоднородных рассеивающих сред. М., 2003.

Поступила в редакцию 02.02.05.

Михаил Михайлович Кугейко - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой квантовой радиофизики и оптоэлектроники.

Сергей Александрович Лысенко - аспирант кафедры квантовой радиофизики и оптоэлектроники. Научный руководитель - М.М. Кугейко.

3^M

$\exp(-i\Delta t)/\sqrt{t}$, где Δ