

УДК 531.3

В.И. КУВШИНОВ, В.В. МАРМЫШ

СВЯЗЬ КЛАССИЧЕСКОГО И КВАНТОВОГО КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ КВАДРАТИЧНЫМИ ГАМИЛЬТониАНАМИ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Relation between classical and quantum criteria of the stability via constantly active perturbation for systems with quadratic Hamiltonian is investigated in quasiclassics. Classical instability is analyzed by means of operator of evolution and quantum instability is analyzed by means of fidelity. Example of degenerate parametric amplifiers with periodic δ -pulses was considered. Expression for relation between fidelity and classical operator of evolution is obtained. It is shown that for the case of stronger classical instability stronger quantum instability corresponds.

Одной из важных проблем квантовой физики является описание неустойчивости и детерминированного хаоса. Следствия хаоса наблюдаются в квантовой механике (квантовое туннелирование, усиливается хаосом [1]), ядерной физике [2], физике высоких энергий [3, 4], теории поля [5, 6]. Однако определение хаоса в квантовой механике наталкивается на трудности, связанные с отсутствием таких наглядных образов, как траектория в фазовом пространстве, перепутывание траекторий - понятий, присущих исключительно классической физике и лежащих в основе теории классического хаоса. Определение квантовой устойчивости должно оперировать понятиями исключительно квантовой механики, например волновой функцией. Следует ожидать, что при $\hbar \rightarrow 0$ должно быть соответствие между квантовыми и классическими критериями устойчивости. Анализировать данное соответствие удобнее, если для описания классической, устойчивости пользоваться не понятием траектории, а понятием оператора эволюции [7].

В данной работе при помощи формализма, развитого в работах [7-9], установлена связь между классическим критерием устойчивости, записанным на языке оператора эволюции, и квантовым критерием устойчивости, записанным при помощи фиделити.

Состояние классической гамильтоновой системы с s степенями свободы в момент времени t может быть задано следующим вектором в фазовом пространстве:

$$y = \{y^m\} = \{y^1, \dots, y^{2s}\} = \{q^1, q^2, \dots, q^s, p^1, p^2, \dots, p^s\},$$

эволюция которого определяется соответствующими уравнениями движения

$$\frac{dy^m}{dt} = Y^{mn} \frac{\partial H}{\partial y^n}, \quad \{Y^{mn}\} = \begin{pmatrix} 0 & I_s \\ -I_s & 0 \end{pmatrix}, \quad m, n = 1, \dots, 2s,$$

где I_s - единичная матрица размерности $s \times s$, H - гамильтониан системы.

Рассмотрим невозмущенную систему, описываемую гамильтонианом H , и систему с возмущением $H+V$, где V - гамильтониан возмущения. Пусть $\mathbf{y}(t)$ - закон движения невозмущенной системы, а $\mathbf{y}(t)+\delta\mathbf{y}(t)$ - закон движения системы с возмущением. Здесь $\delta\mathbf{y}(t)$ - вариация траектории, которая удовлетворяет начальным условиям $\delta\mathbf{y}(t_0)=0$ и линеаризованным уравнениям в случае малого возмущения системы:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{y}^m = \Gamma_n^m \delta\mathbf{y}^n + A^m, \quad \Gamma_n^m = \gamma^{nm} \frac{\partial^2 H}{\partial y^i \partial y^n}, \quad A^m = \gamma^{nm} \frac{\partial V}{\partial y^n}, \quad (1)$$

где Γ_n^m - элементы классической матрицы устойчивости [14].

Если $V = \lim_{\tau \rightarrow t_0 + 0} \left[(\gamma^{-1})_{nm} y^m \delta y^n(t_0) \right] \delta(t - \tau)$, то наличие такого возмущения приводит к мгновенному сдвигу начальных значений на величину $\delta y^n(t_0)$. При $t > t_0$ эволюция вариации траектории будет описываться уравнением (1), в котором $A^m = 0$. Его решение может быть записано при помощи оператора эволюции, который выражается через мультипликативный интеграл [10]

$$\delta y^m(t) = F_n^m(t, t_0) \delta y^n(t_0),$$

где

$$F = \int_{t_0}^t (1 + \Gamma(\tau) d\tau) = (1 + \Gamma(t) d\tau) (1 + \Gamma(t - d\tau) d\tau) \dots (1 + \Gamma(t_0 + d\tau) d\tau) (1 + \Gamma(t_0) d\tau).$$

Поведение системы с таким возмущением будет устойчивым в том случае, если все элементы оператора эволюции F ограничены некоторым значением для любого промежутка времени t : $|F_n^m(t, t_0)| < M$, где M не зависит от времени. Данное условие можно переформулировать, используя собственные значения оператора эволюции [7].

Решение уравнения (1) в общем виде для любого V может быть выражено через оператор эволюции F :

$$\delta y^m(t) = F_n^m I^n, \quad (2)$$

где $I = \int_{t_0}^t (F^{-1}) A d\tau.$

Для анализа устойчивости системы с конкретным возмущением необходимо проанализировать поведение максимального значения $\delta y(t)$ или положительно определенной квадратичной формы координат и импульсов, например $d^2 = \sum_{i=1}^{2s} (\delta y^i)^2$. В случае устойчивого поведения системы d^2 будет ограниченной функцией времени, а для неустойчивого движения - неограниченно возрастать [15].

Для определения квантовой устойчивости воспользуемся определением фиделити [16]

$$f = |\langle \alpha | \beta \rangle|$$

где $|\alpha\rangle = \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\tau) d\tau \right) |\varphi\rangle$ и $|\beta\rangle = \hat{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t (\hat{H}(\tau) + \hat{V}(\tau)) d\tau \right) |\varphi\rangle.$

Здесь $|\varphi\rangle$ - начальное состояние системы, $\hat{T}$ - оператор хронологического упорядочения, $\hat{H}(t)$ - гамильтониан невозмущенной системы, $\hat{V}(t)$ - гамильтониан возмущения. Эволюция системы устойчива, если $f=1$, и неустойчива, если $f<1$.

Анализируя взаимосвязь двух критериев устойчивости, один из которых является классическим, а другой - квантовым, будем в квазиклассике, где они оба еще могут иметь смысл.

Рассмотрим одномерную систему, эволюция которой задается квадратичным гамильтонианом, параметры которого могут изменяться со временем. В общем виде произвольный квадратичный гамильтониан по координатам и импульсам можно преобразовать к виду $\hat{H} = \frac{1}{2} K_{mn}(t) \hat{y}^m \hat{y}^n + \frac{i\hbar}{4} K_{[mn]}(t) \gamma^{mn}$. Последнее слагаемое не влияет на эволюцию динамических переменных, и его можно опустить. Таким образом, общий вид гамильтониана может быть записан следующим образом:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} K_{mn}(t) \hat{y}^m \hat{y}^n, \quad K_{mn}^* = K_{mn}. \quad (3)$$

В качестве начального состояния $|\varphi\rangle$ выберем описываемое нормированной волновой функцией гауссового вида $\varphi(q^1, q^2, \dots, q^s) = \exp(a_{mn} q^m q^n + b_m q^m + c)$. В частном случае состояния такого типа являются когерентными, которые, как известно, минимизируют соотношение неопределенностей и наиболее близки к классическому состоянию.

Известно, что эволюция системы, описываемой в начальный момент времени волновой функцией гауссового вида, под действием квадратичного гамильтониана сводится к изменению параметров гауссового распределения, а вид зависимости остается тем же [12]. Будем считать, что возмущение $\hat{V}$ также описывается гамильтонианом вида (3), тогда $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ тоже волновые функции гауссового вида.

Рассчитаем фиделити f для $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$. Воспользуемся вигнеровским представлением квантовой механики и соотношением [12]

$$2\pi\hbar \int W_\alpha W_\beta dy^k = |\langle \alpha | \beta \rangle|^2, \quad (4)$$

где W_α и W_β - функции Вигнера для $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

Известно, что вигнеровская функция, соответствующая волновой функции гауссового вида, тоже является функцией гауссового вида

$$W = \frac{1}{2\pi\hbar \sqrt{\det(\sigma^{mn})}} \exp\left(-\frac{\sigma_{mn} \delta y^m \delta y^n}{2\hbar}\right),$$

где σ^{mn} - матрица дисперсии

$$\sigma^{mn} = \frac{1}{2\hbar} \langle \Delta \hat{y}^m \Delta \hat{y}^n + \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^m \rangle, \quad \Delta \hat{y}^m = \hat{y}^m - \langle \hat{y}^m \rangle.$$

Воспользовавшись (4), можно получить

$$f = \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma^{mn})}} \exp\left(-\frac{\Sigma_{mn} \delta \bar{y}^m \delta \bar{y}^n}{2\hbar}\right),$$

где $\Sigma^{mn} = \sigma_\alpha^{mn} + \sigma_\beta^{mn}$, а Σ_{mn} - обратная матрица к Σ^{mn} , $\delta \bar{y}^m = \langle \beta | \hat{y}^m | \beta \rangle - \langle \alpha | \hat{y}^m | \alpha \rangle$

Поскольку для квадратичных гамильтонианов средние значения $\langle \hat{y}^m \rangle$ следуют классическим законам [17], то эволюции $\delta \bar{y}^m$ и классической величины δy^m будут совпадать.

В классической физике широко используется понятие устойчивости по начальным условиям. Для этого достаточно взять гамильтониан возмущения в виде $\hat{V} = \lim_{\tau \rightarrow t_0 + 0} \left[(\gamma^{-1})_{mn} \hat{y}^m \delta y^n(t_0) \right] \delta(t - \tau)$ [11]. Рассмотрим поведение фиделити в данном случае. Поскольку рассматриваемая зависимость возмущения $\hat{V}(t)$ является линейной по $\hat{y}^m$, то, воспользовавшись уравнениями из [7], легко показать,

что в процессе эволюции системы матрицы дисперсии $\sigma_{\alpha}^{mn} = \sigma_{\beta}^{mn}$. Воспользовавшись (2), получим $\delta y^m(t) = F_n^m(t, t_0) \delta y^n(t_0)$. Так как $\Sigma_{mn}(t) = (F^{-1})_m^l (F^{-1})_n^k \Sigma_{lk}(t_0)$ и $\det[F_n^m(t, t_0)] = 1$, то фиделити (4) можно переписать в виде

$$f = \exp \left(- \frac{\Sigma_{mn}(t_0) \delta y^m(t_0) \delta y^n(t_0)}{2\hbar} \right).$$

Отметим, что в данном случае фиделити не зависит от времени и определяется лишь возмущением в его начальный момент t_0 , в то время как дальнейшее развитие классической системы может быть и устойчивым и неустойчивым и определяется поведением оператора эволюции F .

В случае произвольного малого квадратичного возмущения V имеют место приближенные равенства $\sigma_{\alpha}^{mn} \approx \sigma_{\beta}^{mn}$, $\Sigma_{mn}(t) \approx (F^{-1})_m^l (F^{-1})_n^k \Sigma_{lk}(t_0)$, и с экспоненциальной точностью выражение для фиделити примет вид

$$f = \exp \left(- \frac{\Sigma_{mn}(t_0) I^m(t) I^n(t)}{2\hbar} \right). \quad (5)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2 - \hbar \omega) + \frac{\chi}{2} \left(- \frac{\hat{p}^2}{\omega} \sin(2\omega t) + (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) \cos(2\omega t) + \omega \hat{q}^2 \sin(2\omega t) \right).$$

Оператор эволюции $F(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\chi} & 0 \\ 0 & e^{-i\chi} \end{pmatrix}$ таким образом:

Начальное состояние системы выберем когерентным, тогда матрица дисперсии примет диагональный вид $\sigma(t_0) = \text{diag}\{\omega/2, 1/(2\omega)\}$, а матрица $\{\Sigma_{mn}(t_0)\} = \text{diag}\{1/\omega, \omega\}$.

$$\hat{V}_1 = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \left(- \frac{\hat{p}^2}{\omega} \sin(2\omega t) + (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) \cos(2\omega t) + \omega \hat{q}^2 \sin(2\omega t) \right),$$

где T - период внешнего возмущения. Данная возмущенная система исследовалась на устойчивость по начальным условиям [7]. Система будет устойчива при $\chi T + \varepsilon = 0$ и неустойчива при $\chi T + \varepsilon \neq 0$.

По формуле (2) получим /:

$$I^1 = -\varepsilon n p_0, \quad I^2 = \varepsilon n q_0, \quad n = \left[\frac{t}{T} \right] \text{ (целая часть)}.$$

Выражение для d_2 можно получить, воспользовавшись формулами (2) и (5). Простейшая положительно определенная квадратичная форма, удовлетворяющая требованию размерности и не содержащая перекрестных слагаемых координат и импульсов, имеет вид $d^2 = \delta p^2 + \omega^2 \delta q^2$. Выражение для фиделити можно получить, воспользовавшись (5)

$$\frac{d^2}{\varepsilon^2} = n^2 (p_0^2 e^{-2i\chi} + \omega^2 q_0^2 e^{2i\chi}), \quad f(t) = \exp \left(- \frac{n^2}{2\hbar} \left(\frac{p_0^2}{\omega} + \omega q_0^2 \right) \right), \quad n = \left[\frac{t}{T} \right] \text{ (целая часть)}.$$

Видно, что при данном выборе возмущения фиделити будет всегда убывать, а d_2 всегда будет возрастать на больших промежутках времени. Поведение фиделити будет носить резкий скачкообразный характер, а изменение происхо-

дить только в моменты δ -ударов, d_2 тоже будет резко изменяться в момент удара. Приведем графические зависимости, подтверждающие сказанное (рис. 1).

Рассмотрим возмущение V_2 в виде внешних δ -толчков

$$\hat{V}_2 = \epsilon \hat{H} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (6)$$

По формуле (2) получим I :

$$I^1 = -\epsilon n p_0 \chi - \epsilon \omega^2 \frac{e^{2Tn\chi} - 1}{e^{2T\chi} - 1} q_0, \quad I^2 = \epsilon n q_0 \chi + \epsilon \frac{e^{-2Tn\chi} - 1}{e^{2T\chi} - 1} p_0, \quad n = \left[\frac{t}{T} \right] \text{ (целая часть)},$$

где p_0 и q_0 - начальные координата и импульс рассматриваемой системы.

Так как выражение для d в случае возмущения V_2 не информативно, дальнейший анализ проведем графически. На графиках будем откладывать d^2/ϵ^2 , так как это выражение не зависит от ϵ . Поскольку возмущение V_2 представляет суммы δ -ударов, то на всех графиках фиделити изменяется только в момент удара. Кроме того, фиделити всегда убывает, что свидетельствует о квантовой неустойчивости.

На рис. 2, 3 поведение фиделити и d_2 согласованно: уменьшению фиделити соответствует рост d_2 .

Уменьшение начального импульса системы незначительно влияет на плавность поведения d_2 . Устойчивость системы сильно зависит от начальных значений и при небольшом изменении начальных параметров может существенно меняться.

Таким образом, в данной работе был представлен аппарат, позволяющий напрямую выразить эволюцию фиделити через классический оператор эволюции. В квазиклассике данное соответствие было получено для квадратичных по координатам и импульсам гамильтонианов, а полученные соотношения справедливы только для гауссовых пакетов. Они являются точными и не содержат приближений, так как гауссовый пакет под действием эволюции системы с квадратичным гамильтонианом остается гауссовым.

Поведение фиделити как квантового критерия неустойчивости и поведение d_2 имеют некоторые принципиальные отличия. Фиделити может изменяться только в случае, если действует внешнее возмущение, а расстояние между расходящимися траекториями в фазовом пространстве - и без внешнего воздействия. В этом случае достаточным является только начальный «толчок», приводящий к явлению неустойчивости по начальным условиям. Если внешнее возмущение действует только в начальный момент времени, то фиделити изменя-

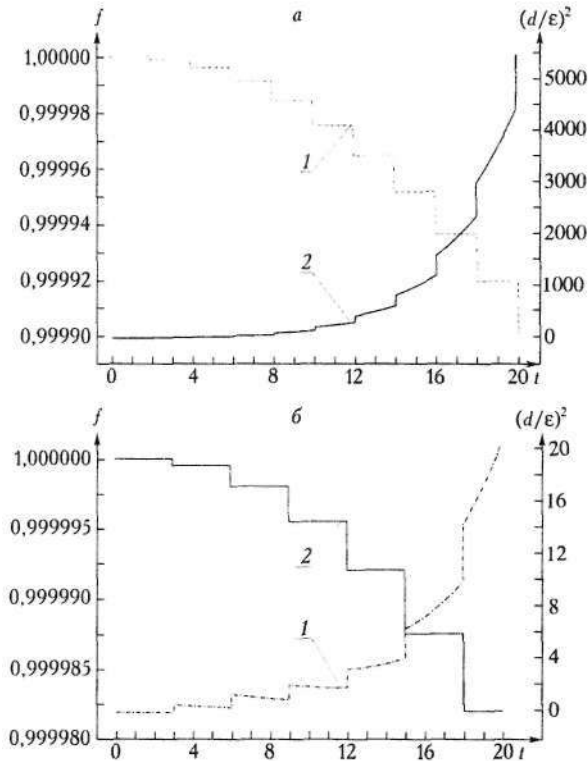


Рис. 1. Зависимость фиделити (кривая 1) и d^2 (кривая 2) от времени:

а - $p_0 = -1, q_0 = 1, T = 2, \omega = 1, \chi = 0.1, \epsilon^2/\hbar = 10^{-6}$;
б - $p_0 = 1, q_0 = -0.1, T = 3, \omega = 1, \chi = 0.1, \epsilon^2/\hbar = 10^{-6}$

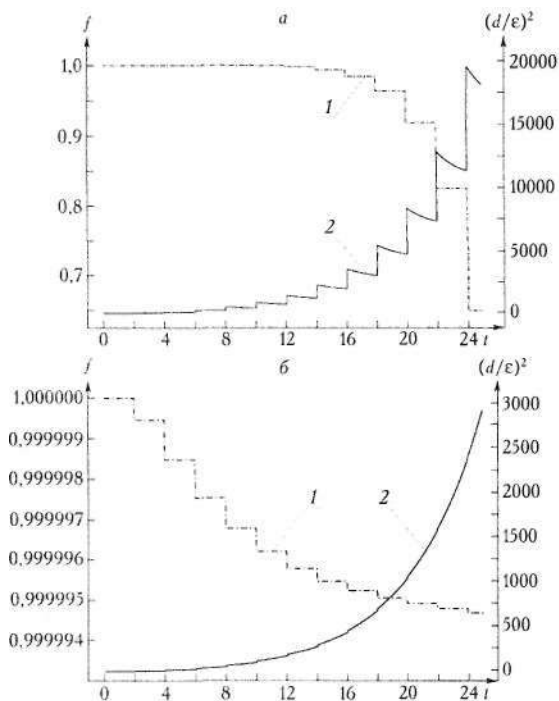


Рис. 2. Зависимость фиделити (кривая 1) и d^2 (кривая 2) от времени:

$$a - p_0=1.1, q_0=0.9, T=2, \omega=2, \chi=0.1, \epsilon^2/\hbar=10^{-6};$$

$$б - p_0=1.1, q_0=0, T=2, \omega=2, \chi=0.1, \epsilon^2/\hbar=10^{-6}$$

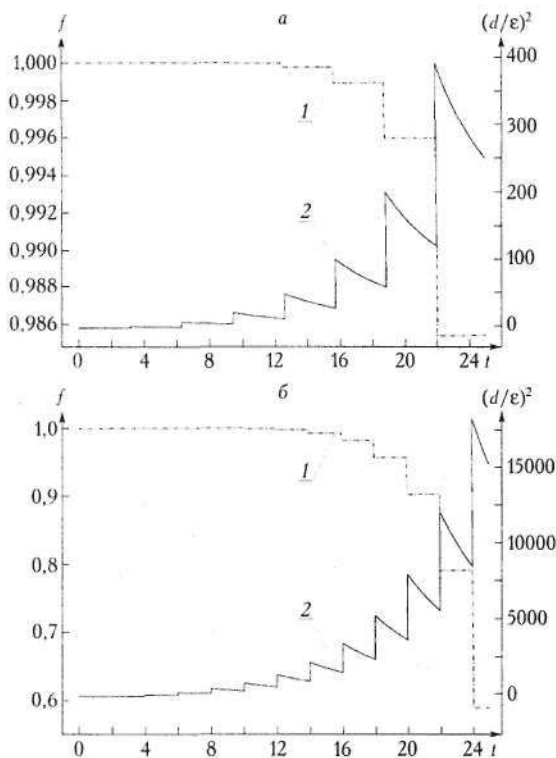


Рис. 3. Зависимость фиделити (кривая 1) и d^2 (кривая 2) от времени:

$$a - p_0=-0.1, q_0=1, T=\pi, \omega=1, \chi=0.1, \epsilon^2/\hbar=10^{-6};$$

$$б - p_0=0, q_0=1, T=2, \omega=2, \chi=0.1, \epsilon^2/\hbar=10^{-6}$$

ется только в начальный момент времени, в то время как расстояние между траекториями - и на протяжении последующей эволюции классической системы. Это указывает на существенное различие между рассматриваемыми критериями вследствие их разной природы. Классический критерий устойчивости оперирует понятием траектории, не существующей в квантовой механике, фиделити оперирует неустойчивостью, обусловленной непрерывным воздействием на систему. Непрерывное воздействие на систему может существовать и в классическом описании динамики системы, однако в квантовом случае это воздействие всегда связано со взаимодействием с окружающей средой. В случае импульсного возмущения различие между критериями существенно, при постоянно действующем возмущении нелинейность рассматриваемых явлений имеет общие черты в обоих случаях.

При рассмотрении вырожденного параметрического усилителя с 8-образным возмущением классический и квантовый критерии устойчивости дают один и тот же результат. Более быстрому росту d_2 во всех случаях соответствует более быстрое убывание фиделити. Во всех случаях поведение фиделити носит скачкообразный, дискретный во времени характер, это связано с наличием возмущения только в строго определенных моменты времени. Поведение d_2 от времени в некоторых случаях тоже носит скачкообразный характер, при других параметрах системы имеет плавную растущую зависимость.

1. Lin W.A., Ballentine L.E. // Phys. Rev. Lett. 1990. 65. P. 2927.
2. Бунаков В.Е. // Материалы XXXII Зимней школы «Физика атомного ядра и элементарных частиц», 5; preprints quant-ph/0101125, quant-ph/0105082.
3. Nielsen N.K., Olesen P. // Nucl. Phys. 1979. B 160. P. 380.
4. Olesen P. // Ibid. 1982. B 200. P. 381.
5. Kawabe T., Ohta S. // Phys. Rev. 1991. D44. P. 1274.
6. Biro T.S., Matinyan S.G., Muller B. // Chaos and Gauge Field Theory. Singapore, 1994.
7. Kuvshinov V.I., Marmysh V.V., Shaparau V.A. // TMF. 2004. № 139 (3). P. 846.
8. Kuvshinov V.I., Marmysh V.V., Shaparau V.A. // Nonlinear Phenomena in Complex System. 2002. Vol. 11. P. 196.
9. Кувшинов В.И., Мармыш В.В., Шапарав В.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2003. № 2. С. 9.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.
11. Математическая физика: Энцикл. М., 1998.
12. Татарский В.И. // УФН. 1983. Т. 134. Вып. 4. С. 587.
13. Walls D.F., Milburn G.J. // Quantum Optics. New York, 1995.
14. Toda M. // Phys. Lett. A. 1974. Vol. 48. P. 335.
15. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
16. Berthiaume A. Wim van Dam, Laplante S. arXiv:quant-ph/0005018 v1. 3 May 2000. Quantum Kolmogorov Complexity.
17. Мессиа А. Квантовая механика: в 2 т. М., 1978. Т. 1.

Поступила в редакцию 05.07.05.

Вячеслав Иванович Кувшинов - доктор физико-математических наук, профессор, директор «ОИЭЯИ - Сосны» НАН Беларуси.

Виктор Владимирович Мармыш - аспирант кафедры теоретической физики. Научный руководитель - В.И. Кувшинов.