В терминах исходных коэффициентов случай 1 соответствует коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_0^1 + a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

случай 2

$$a_1(\varepsilon) = a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

а случай 3 – коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_0^2 + a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Холден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. М., 1991.
2. *Антоневич А. Б., Романчук Т. А.* Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. / Гродн. гос. ун-т ; редкол.: Е. Н. Ровба [и др.]. Гродно, 2008. С. 11–28.
3. *Антоневич А. Б., Романчук Т. А.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. Саарбрюккен, 2012.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.

Поступила в редакцию 05.04.2015.

Марина Геннадьевна Кот – аспирантка кафедры функционального анализа механико-математического факультета БГУ. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета БГУ А. Б. Антоневич.

УДК 517.925.51

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ, Я. Б. ЗАДВОРНЫЙ, И. В. КАЧАН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности решений неавтономных стохастических дифференциальных систем с запаздыванием с разрывными коэффициентами. Использован метод функционалов Ляпунова для исследования устойчивости, асимптотической устойчивости, устойчивости по линейному приближению. Определено решение стохастической системы с запаздыванием с разрывными коэффициентами как решение стохастического включения с запаздыванием, построенного по исходной системе. Приведено доказательство общих теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономных стохастических систем с запаздыванием в предположении о существовании соответствующих функционалов Ляпунова. Кроме того, доказана теорема об асимптотической устойчивости по линейному приближению для неавтономных систем с запаздыванием с разрывными коэффициентами с помощью функционала Ляпунова, построенного по системе линейного приближения, в предположении, что нулевое решение системы линейного приближения является равномерно экспоненциально устойчивым.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение; слабое решение; устойчивость по вероятности; функции Ляпунова.

The purpose of the present paper consists is to prove theorems on stability and asymptotic stability in probability of solutions of stochastic non-autonomous delay systems with discontinuous right-hand sides. We have used Lyapunov functionals method for investigating of stability, asymptotic stability and stability in the first approximation. We define a solution of stochastic delay systems with discontinuous right-hand sides as a solution of a stochastic delay inclusion constructed through the original system. There are proved general theorems of stability and asymptotic stability of zero solution to non-autonomous stochastic delay systems providing the existence of appropriate Lyapunov functionals. Moreover we have proved a version of the theorem on asymptotic stability in probability in the first approximation for stochastic non-autonomous delay systems with discontinuous right-hand sides with help of the Lyapunov functional constructed through the first approximation system providing that linear approximation has uniformly exponential stable zero solution.

Key words: stochastic differential equation; weak solution; stability in probability; Lyapunov functions.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$dx(t) = f\left(t, x(t), x_t\right)dt + g\left(t, x(t), x_t\right)dW(t), \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – измеримые по Борелю функции; $x_t = \left\{x(t+\tau) \,|\, -h \le \le \tau \le 0\right\} \in C_h$, $C_h = C\left([-h, 0], \mathbb{R}^d\right)$, $h > 0$, – время запаздывания; $W(t)$ – d-мерное броуновское движение.

Цель настоящей работы – доказательство аналогов теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (1), охватывающих класс неавтономных стохастических систем с разрывными коэффициентами. В работе [1] доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (1) без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими по фазовой переменной условию Липшица, и с постоянными начальными условиями. В статье [2] методом знакопостоянных функций Ляпунова доказаны теоремы об устойчивости решений автономного уравнения (1) без запаздывания с разрывными коэффициентами. Близкие к [2] результаты об устойчивости автономного уравнения (1) без запаздывания приводятся в работе [3]. Метод исследования устойчивости решений автономного уравнения (1) с запаздыванием с помощью квадратичных функционалов Ляпунова излагается в [4]. Устойчивость решений уравнения (1) с непрерывными коэффициентами исследовалась в [5–10]. Однако результаты работ [1–10] не применимы к исследованию устойчивости неавтономных уравнений (1) с разрывными коэффициентами. В настоящей статье с помощью метода функций Ляпунова [1, 2] доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости решений уравнения (1) с разрывными коэффициентами. Кроме того, в работе доказана теорема об устойчивости решений уравнения (1) в предположении, что линеаризованная система является равномерно экспоненциально устойчивой. Под решением уравнения (1) понимаем решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению [11]. Поскольку наличие запаздывания не вызывает принципиальных затруднений в данной работе, мы учитываем запаздывание в уравнении (1), но класс дифференциально-функциональных уравнений, к которым может быть применен метод функций Ляпунова, очень узок и близок к классу дифференциальных уравнений без запаздывания.

Для каждого $(t, x, \varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times C_h$ построим множества

$$F(t, x, \varphi)=\cap_{\delta>0}\overline{\mathrm{co}}\Big[f\big(t, [x]_\delta, [\varphi]_\delta\big)\Big]_\delta,\quad G(t, x, \varphi)=\cap_{\delta>0}\overline{\mathrm{co}}\Big[g\big(t, [x]_\delta, [\varphi]_\delta\big)\Big]_\delta.$$

Определение 1. Пусть ν – некоторая вероятностная мера на $\big(C_h, \beta(C_h)\big)$. Если существуют: 1) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t, t\geq -h$; 2) $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $x(t)$, определенный при $t\geq -h$, траектории которого почти наверное (п. н.) непрерывны; 3) $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $t\geq 0$, $W(0)=0$ п. н.; 4) непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $\psi(t)$, $t\in[-h, 0]$, имеющий распределение ν; 5) измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t\in\mathbb{R}^+$, такие, что выполняются условия: 1) $v(t)\in F\big(t, x(t), x_t\big)$, $u(t)\in G\big(t, x(t), x_t\big)$ для $(\mu\times P)$ – почти всех $(t, \omega)\in\mathbb{R}^+\times\Omega$, где μ – мера Лебега на $\mathbb{R}^+$; $\int_0^T\Big(|v(s)|+|u(s)|^2\Big)ds<\infty$ для всех $T\in\mathbb{R}^+$; 2) с вероятностью 1 для всех $t\in[-h, \infty)$ выполняется соотношение

$$x(t)=\begin{cases}\psi(t),\ t\in[-h, 0],\\ \psi(0)+\int_0^t v(s)ds+\int_0^t u(s)dW(s),\ t\geq 0,\end{cases}$$

то набор $\big(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t)\big)$ (или кратко $x(t)$) называется *слабым решением* уравнения (1) с начальным распределением ν.

Предположим, что $f(t, 0, 0)=0$ и $g(t, 0, 0)=0$ при всех $t\geq 0$. В этом случае уравнение (1) имеет нулевое решение. В дальнейшем предполагаем, что функции f и g имеют линейный порядок роста по (x, φ), т. е. существует постоянная C такая, что для любых $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi\in C_h$ выполняется неравенство $|f(t, x, \varphi)|+|g(t, x, \varphi)|\leq C(1+|x|+\|\varphi\|)$, где $\|\varphi\|=\max_{t\in[-h, 0]}|\varphi(t)|$. В работе [11] доказано, что если функции f и g измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста, то для любой вероятности ν на $\big(C_h, \beta(C_h)\big)$ с компактным носителем уравнение (1) имеет слабое решение $\big(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t)\big)$ с начальным распределением ν.

Определение 2. Нулевое решение уравнения (1) *устойчиво по вероятности*, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $\|x_0\| \le \delta$ п. н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\left\{\sup_{t\ge 0}|x(t)| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$.

Определение 3. Нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $\|x_0\| \le \delta$ п. н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\left\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\right\} \ge 1 - \varepsilon$.

Исследование устойчивости методом функций Ляпунова

Предположим, что определены функции $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ и $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, и рассмотрим функцию $U : \mathbb{R}^+ \times C_h \to \mathbb{R}^+$, определенную формулой

$$U(t, \varphi) = V(t, \varphi(0)) + \int_{-h}^{0} a(\varphi(s))ds.$$

В дальнейшем предполагаем, что функция V непрерывна по $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x, функция a непрерывна.

Будем говорить, что функция $U(t, \varphi)$ удовлетворяет условию L, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\varphi \in C_h$, удовлетворяющего условию $\|\varphi\| \le \delta$, выполнено неравенство $PU(t, \varphi) \le 0$,
где

$$PU(t, \varphi) = BV(t, \varphi) + a(\varphi(0)) - a(\varphi(-h)),$$

$$BV(t, \varphi) = \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial t} + \sup_{v \in F(t, \varphi(0), \varphi)} \left(\frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial x} v \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t, \varphi(0), \varphi)} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(t, \varphi(0))}{\partial x^2} u u^T \right).$$

Лемма 1. *Пусть функция U удовлетворяет условию L, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t))$ – слабое решение уравнения (1), причем $\|x_0\| \le \delta$ п. н. (δ – число из условия L), τ_1, τ_2 – моменты остановки относительно потока $\mathcal{F}_t$, причем $\tau_1 \le \tau_2 < T$ п. н. с некоторым $T > 0$. Определим момент остановки $\sigma = \inf\left\{t \ge 0 : |x(t)| \ge \delta\right\}$. Тогда $E\left(U\left(\tau_1 \wedge \sigma, x_{\tau_1 \wedge \sigma}\right)\right) \ge E\left(U\left(\tau_2 \wedge \sigma, x_{\tau_2 \wedge \sigma}\right)\right)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Ито, получим

$$V(\tau_2 \wedge \sigma, x(\tau_2 \wedge \sigma)) = V(\tau_1 \wedge \sigma, x(\tau_1 \wedge \sigma)) + \int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} \left(\frac{\partial V(s, x(s))}{\partial t} + \frac{\partial V(s, x(s))}{\partial x} v(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s, x(s))}{\partial x^2} u(s) u^T(s) \right) \right) ds + \int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} \frac{\partial V(s, x(s))}{\partial x} u(s) dW(s).$$

Из последнего равенства следует

$$\mathbb{E}\left(V(\tau_2 \wedge \sigma, x(\tau_2 \wedge \sigma))\right) \le \mathbb{E}\left(V(\tau_1 \wedge \sigma, x(\tau_1 \wedge \sigma))\right) + \mathbb{E}\left(\int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} BV(s, x_s) ds \right);$$

$$\mathbb{E}\left(U\left(\tau_2 \wedge \sigma, x_{\tau_2 \wedge \sigma}\right) - U\left(\tau_1 \wedge \sigma, x_{\tau_1 \wedge \sigma}\right)\right) \le \mathbb{E}\left(\int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} BV(s, x_s) ds \right) + \mathbb{E}\left(\int_{-h}^{0} a\left(x_{\tau_2 \wedge \sigma}(s)\right) ds \right) - \mathbb{E}\left(\int_{-h}^{0} a\left(x_{\tau_1 \wedge \sigma}(s)\right) ds \right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} BV(s, x_s) ds \right) + \mathbb{E}\left(\int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} \left(a(x(s)) - a(x(s-h))\right) ds \right) = \mathbb{E}\left(\int_{\tau_1 \wedge \sigma}^{\tau_2 \wedge \sigma} PU(s, x_s) ds \right) \le 0.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть функция* $U(t, \varphi)$ *удовлетворяет условию L, причем* $U(t, 0) = 0$ *при всех* $t \in \mathbb{R}^+$, $U(t, \varphi) \geq \alpha(|\varphi(0)|) > 0$ *при* $0 < |\varphi(0)| \leq \delta$ *и всех* $t \in \mathbb{R}^+$, *где* $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– некоторая функция,* δ *– число из условия L. Кроме того, предположим, что* $\lim\limits_{\|\varphi\| \to 0} \sup\limits_{t > 0} U(t, \varphi) = 0$. *Тогда нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \delta$, $0 < \varepsilon_2$. Обозначим $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}^+,\ |\varphi(0)| = \varepsilon_1} U(t, \varphi) = m(\varepsilon_1) > 0$ и выберем число δ_1 такое, что $0 < \delta_1 < \varepsilon_1$ и $U(t, \varphi) < \dfrac{\varepsilon_2 m(\varepsilon_1)}{2}$ при $\|\varphi\| < \delta_1$ и всех $t \in \mathbb{R}^+$. Пусть $x(t)$ – слабое решение уравнения (1), для которого $\|x_0\| \leq \delta_1$ п. н., $T > 0$, τ – момент остановки относительно $\mathcal{F}_t$, причем $\tau \leq T$, $\sigma = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq \delta\}$. Согласно лемме 1 выполнено $\mathbb{E}U(\tau \wedge \sigma, x_{\tau \wedge \sigma}) \leq \mathbb{E}U(0, x_0)$. Пользуясь [12, лемма 2.1] и произвольностью числа T, получаем $\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} U(t \wedge \sigma, x_{t \wedge \sigma}) > m(\varepsilon_1)/2\} < \varepsilon_2$. Поскольку $\{\sup_{t \geq 0} U(t \wedge \sigma, x_{t \wedge \sigma}) > m(\varepsilon_1)/2\} \supset \{\sup_{t \geq 0} |x(t \wedge \sigma)| > \varepsilon_1\}$, имеем $\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} |x(t \wedge \sigma)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$. Нетрудно видеть, что $\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$. Тем самым нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ *непрерывна по* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, *непрерывно дифференцируема по* $t \in \mathbb{R}^+$, *дважды непрерывно дифференцируема по x. Предположим, что существует число* $\delta > 0$ *такое, что:*

1) $BV(t, \varphi) < \beta(\varepsilon) < 0$ *при всех* φ *таких, что* $\varepsilon \leq |\varphi(0)| \leq \delta$, *и при всех* $t \in \mathbb{R}^+$, *где* $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ *– некоторая функция;*

2) $V(t, x) \geq 0$ *при всех x, удовлетворяющих неравенству* $|x| \leq \delta$, *и всех* $t \in \mathbb{R}^+$.

Тогда для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta$, *для любого* $t \geq 0$ *и для любого слабого решения* $x(t)$ *уравнения (1) выполнено* $\mathbb{P}\{\tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \infty\} = 0$,
где

$$\tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} t, & x(t) \notin S(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ \inf\{s \geq t : x(s) \notin S(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\}, & x(t) \in S(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2); \end{cases}$$

$$S(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^d : \varepsilon_1 \leq |x| \leq \varepsilon_2\}.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $t \geq 0$, любые $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta$ и любое слабое решение $x(t)$ уравнения (1). Допустим, что $\mathbb{P}\{\tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \infty\} > 0$. Так же как и при доказательстве леммы 1, можно показать, что при каждом $s \geq t$ будем иметь

$$\mathbb{E}\Big(V\big(s \wedge \tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2), x(s \wedge \tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2))\big) - V(t, x(t))\Big) \leq \mathbb{E}\int\limits_t^{s \wedge \tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} BV(s_1, x_{s_1})\,ds_1 \leq$$

$$\leq (s - t)\beta(\varepsilon_1)\mathbb{P}\{\tau(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \infty\} \to -\infty, \ s \to \infty.$$

Очевидно, что последнее противоречит условиям, наложенным на функцию V. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть существуют число* $\delta > 0$ *и функция* $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, *непрерывная по* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, *непрерывно дифференцируемая по* $t \in \mathbb{R}^+$, *дважды непрерывно дифференцируемая по x, такие, что выполнены следующие условия:*

1) $BV(t, \varphi) < \beta(\varepsilon) < 0$ *при всех* φ *таких, что* $\varepsilon \leq |\varphi(0)| \leq \delta$, *и при всех* $t \in \mathbb{R}^+$, *где* $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ *– некоторая функция;*

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t, x) = 0$;

3) $V(t,0)=0$ *при всех* $t\in\mathbb{R}^+$*;*

4) $V(t,x)\ge\alpha(|x|)>0$ *при всех x таких, что* $|x|\le\delta$*, и всех* $t\in\mathbb{R}^+$*, где* $\alpha:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *– некоторая функция.*

Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво по вероятности.

Доказательство. Зафиксируем $0<\varepsilon_1<\delta$ и $0<\varepsilon_2$. В силу теоремы 1 нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности (следует положить $a(x)\equiv 0$ и $U(t,\varphi)=V(t,\varphi(0))$, $PU(t,\varphi)=BV(t,\varphi)$ $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\forall\varphi\in C_h$). Выберем такое $\delta_1\in(0,\varepsilon_1)$, что если $x(t)$ – слабое решение уравнения (1), для которого $\|x_0\|\le\delta_1$ п. н., то $\mathbb{P}\left\{\sup_{t\ge 0}|x(t)|>\varepsilon_1\right\}<\varepsilon_2$.

Пусть $\tau=\inf\left\{t>0:|x(t)|\ge\varepsilon_1\right\}$, $0<t_1<t_2$ – некоторые моменты времени. Применяя формулу Ито, имеем

$$V(t_2\wedge\tau,\,x(t_2\wedge\tau))=V(t_1\wedge\tau,\,x(t_1\wedge\tau))+\int\limits_{t_1\wedge\tau}^{t_2\wedge\tau}\left(\frac{\partial V(s,x(s))}{\partial t}+\frac{\partial V(s,x(s))}{\partial x}v(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x(s))}{\partial x^2}u(s)u^T(s)\right)\right)ds+\int\limits_{t_1\wedge\tau}^{t_2\wedge\tau}\frac{\partial V(s,x(s))}{\partial x}u(s)dW(s).$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\left(V(t_2\wedge\tau,\,x(t_2\wedge\tau))\,|\,\mathcal{F}_{t_1\wedge\tau}\right)\le V(t_1\wedge\tau,\,x(t_1\wedge\tau)).$$

Поэтому процесс $V(t\wedge\tau,\,x(t\wedge\tau))$ является $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})$-супермартингалом. Согласно [1, теорема 5.1] существует $\lim\limits_{t\to\infty}V(t\wedge\tau,\,x(t\wedge\tau))=\xi(\omega)$. Поскольку $\mathbb{P}\{\tau=\infty\}\ge 1-\varepsilon_2$, то с вероятностью не менее $1-\varepsilon_2$ предел $\lim\limits_{t\to\infty}V(t,x(t))$ существует и равен $\xi(\omega)$.

Покажем, что $\mathbb{P}\left\{\liminf\limits_{t\to\infty}x(t)=0\right\}\ge 1-\varepsilon_2$. Допустим, что $\mathbb{P}\left\{\liminf\limits_{t\to\infty}|x(t)|=0\right\}<1-\varepsilon_2$. Тогда $\mathbb{P}\left\{|x(t)|\le\varepsilon_1\ \forall t\ge 0,\ \liminf\limits_{t\to\infty}|x(t)|\ne 0\right\}>0$. Обозначим $B=\left\{\omega\in\Omega:|x(t)|\le\varepsilon_1\ \forall t\ge 0,\ \liminf\limits_{t\to\infty}|x(t)|\ne 0\right\}$. Если $\omega\in B$, то существуют числа $\varepsilon(\omega)>0$ и $T(\omega)>0$ такие, что $|x(t,\omega)|\ge\varepsilon(\omega)$ для всех $t\ge T(\omega)$. Из равенства $\mathbb{P}(B)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\omega\in B:\varepsilon(\omega)\ge\frac{1}{n}\right\}$ следует, что найдется такое $\varepsilon_0>0$, что $\mathbb{P}\{\omega\in B:\varepsilon(\omega)\ge\varepsilon_0\}>0$. Поскольку $\mathbb{P}\{\omega\in B:\varepsilon(\omega)\ge\varepsilon_0\}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\omega\in B:\varepsilon(\omega)\ge\varepsilon_0,\ T(\omega)\le n\}$, то найдется такое $T_0>0$, что $\mathbb{P}\{\omega\in B:\varepsilon(\omega)\ge\varepsilon_0,\ T(\omega)\le T_0\}>0$. Пусть $B(\varepsilon_0,T_0)=\{\omega\in B:\varepsilon(\omega)\ge\varepsilon_0,\ T(\omega)\le T_0\}=$ $=\{\omega\in\Omega:|x(t,\omega)|\ge\varepsilon_0\ \forall t\ge T_0,\ |x(t,\omega)|\le\varepsilon_1\ \forall t\ge 0\}$. По построению получаем $\mathbb{P}(B(\varepsilon_0,T_0))>0$, что противоречит утверждению леммы 2. Тем самым $\mathbb{P}\left\{\liminf\limits_{t\to\infty}|x(t)|=0\right\}\ge 1-\varepsilon_2$. Отсюда следует, что $\mathbb{P}\left\{\liminf\limits_{t\to\infty}V(t,x(t))=0\right\}\ge 1-\varepsilon_2$.

Теперь из предыдущих рассуждений вытекает, что $\mathbb{P}\left\{\lim\limits_{t\to\infty}V(t,x(t))=0\right\}\ge 1-2\varepsilon_2$. В силу положительной определенности функции V имеем $\mathbb{P}\left\{\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0\right\}\ge 1-2\varepsilon_2$. Теорема доказана.

Исследование устойчивости по линейному приближению

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t)=\left(A(t)x(t)+f(t,x(t),x_t)\right)dt+g(t,x(t),x_t)dW(t),\tag{2}$$

где $A:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^{d\times d}$ – кусочно-непрерывная функция; $\sup_{t\ge 0}\left|A(t)\right|\le M$; функции $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times C_h\to\mathbb{R}^d$; $g:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times C_h\to\mathbb{R}^{d\times d}$ измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста по x; $f(t, 0, 0)=0$, $g(t, 0, 0)=0$. В дальнейшем будем рассматривать слабые решения уравнения (2) лишь с постоянными начальными условиями $x(t)=\psi(t)$, $t\in[-h, 0]$, $\psi(\cdot)\in C_h$.

Наряду с системой (2) рассмотрим линейную детерминированную систему

$$dx(t)=A(t)x(t)dt. \tag{3}$$

Через $X^{(s,\,x)}(t)$ будем обозначать решение (единственное) системы (3), удовлетворяющее равенству $X^{(s,\,x)}(s)=x$, где $(s, x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$.

Определение 5. Система (3) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda>0$, не зависящие от s и x, такие, что для любых $(s, x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$, $t\ge s$, выполняется неравенство $\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|\le\Lambda|x|e^{-\lambda(t-s)}$.

Теорема 3. *Предположим, что функции $f(t, x, \varphi)$ и $g(t, x, \varphi)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ найдется $\delta_\varepsilon>0$ такое, что выполняются неравенства $\left|f(t, x, \varphi)\right|\le\varepsilon|x|$, $\left|g(t, x, \varphi)\right|\le\varepsilon|x|$ для любых $x\in\mathbb{R}^d$, $|x|\le\delta_\varepsilon$, $t\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\in C_h$, а система (3) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

Доказательство. Определим операторы B и B_0:

$$BV(s, x, \varphi)=\frac{\partial V(s, x)}{\partial s}+\sup_{v\in F(t,\,x,\,\varphi)}\left(\frac{\partial V(s, x)}{\partial x}\big(A(s)x+v\big)\right)+\frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,\,x,\,\varphi)}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2}uu^T\right);$$

$$B_0V(s, x)=\frac{\partial V(s, x)}{\partial s}+\frac{\partial V(s, x)}{\partial x}A(s)x,\quad s\in\mathbb{R}^+,\quad x\in\mathbb{R}^d,\quad \varphi\in C_h.$$

Определим функцию $V(s, x)$ равенством

$$V(s, x)=\int_s^{s+T}\left|X^{(s,x)}(t)\right|^2dt,$$

где T – некоторый положительный параметр, точное значение которого будет определено далее. Как показано в [1, следствие 5.3], функция $V(s, x)$ определена, непрерывно дифференцируема по $s\in\mathbb{R}^+$ и дважды непрерывно дифференцируема по $x\in\mathbb{R}^d$, причем справедливо равенство $B_0V(s, x)=\left|X^{(s,x)}(s+T)\right|^2-|x|^2$. Отсюда и из условия равномерной экспоненциальной устойчивости системы (3) следует, что можно подобрать достаточно большое $T_\lambda>s$ такое, что $\left|X^{(s,x)}(s+T)\right|^2\le|x|^2/2$ при всех $T\ge T_\lambda$, и, значит, $B_0V(s, x)\le-|x|^2/2$ при всех $T\ge T_\lambda$. Зафиксируем одно из таких T и покажем, что введенная функция $V(s, x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Условие 3 из теоремы 2 следует из единственности решения: $X^{(s,\,0)}(t)\equiv 0$.

Покажем, что выполнено условие 2. Оценим сверху функцию $V(s, x)$, используя условие равномерной экспоненциальной устойчивости системы (3):

$$0\le V(s, x)\le\int_s^{s+T}\Lambda|x|^2e^{-\lambda(t-s)}dt=\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}\Lambda|x|^2=k_1|x|^2,$$

где $k_1=\dfrac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}\Lambda>0$. Взяв от обеих частей этого неравенства супремум по $s>0$ и перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{x\to 0}\sup\limits_{s>0}V(s, x)=0$, что и требовалось.

Покажем, что выполнено условие 4 из теоремы 2. Поскольку

$$\left|X^{(s,\,x)}(s+T)\right|^2 = |x|^2 + \int_s^{s+T} B_0\left(\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|^2\right)dt = |x|^2 + \int_s^{s+T} 2\left(X^{(s,\,x)}(t)\right)^T A(t)\,X^{(s,\,x)}(t)\,dt;$$

$$\left|2\left(X^{(s,\,x)}(t)\right)^T A(t)\,X^{(s,\,x)}(t)\right| = 2\left|\left(A(t)\,X^{(s,\,x)}(t),\ X^{(s,\,x)}(t)\right)\right| \le$$

$$\le 2\left|A(t)\,X^{(s,\,x)}(t)\right|\,\left|X^{(s,\,x)}(t)\right| \le 2M\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|^2,$$

то

$$-\frac{1}{2}|x|^2 \ge \left|X^{(s,\,x)}(s+T)\right|^2 - |x|^2 \ge -2M\int_s^{s+T}\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|^2 dt = -2MV(s,\,x),$$

следовательно, $V(s,\,x) \ge |x|^2/(4M) > 0$ для $x \ne 0,$ и, таким образом, условие 4 выполнено.

Осталось показать, что выполнено условие 1. Имеем

$$BV(s,\,x,\,\varphi) = BV_0(s,\,x) + \sup_{v\in F(t,\,x,\,\varphi)}\left(\frac{\partial V(s,\,x)}{\partial x}v\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,\,x,\,\varphi)}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,\,x)}{\partial x^2}uu^T\right) =$$

$$= BV_0(s,\,x) + \sup_{v\in F(t,\,x,\,\varphi)}\left(v,\ \left(\frac{\partial V(s,\,x)}{\partial x}\right)^T\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,\,x,\,\varphi)}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,\,x)}{\partial x^2}uu^T\right) \le$$

$$\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \sup_{v\in F(t,\,x,\,\varphi)}|v|\,\left|\frac{\partial V(s,\,x)}{\partial x}\right| + \frac{\sqrt{d}}{2}\left|\frac{\partial^2 V(s,\,x)}{\partial x^2}\right|\sup_{u\in G(t,\,x,\,\varphi)}|u|^2 \le$$

$$\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon\,|x|\left|\frac{\partial V(s,\,x)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2 V(s,\,x)}{\partial x^2}\right|\frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2\,|x|^2$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и соответствующей окрестности нуля $|x| \le \delta_\varepsilon$.

Поскольку

$$\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x} = E_d + \int_s^t A(u)\frac{\partial X^{(s,\,x)}(u)}{\partial x}du;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|^2 = 2\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x}X^{(s,\,x)}(t);$$

$$\left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 = |e_i|^2 + \int_s^t B_0\left(\left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(u)}{\partial x_i}\right|^2\right)du \le 1 + \int_s^t c_3\left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(u)}{\partial x_i}\right|^2 du,$$

где $c_3 = 2M$, то

$$\left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le e^{c_3(t-s)},\ \left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x}\right|^2 = \sum_{i=1}^d\left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le de^{c_3(t-s)};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|^2\right| \le 2\left(\left|\frac{\partial X^{(s,\,x)}(t)}{\partial x}\right|^2\right)^{1/2}\left(\left|X^{(s,\,x)}(t)\right|^2\right)^{1/2} \le 2\sqrt{d\Lambda}\,e^{\frac{c_3-\lambda}{2}(t-s)}|x|;$$

$$\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| \le \left|\int\limits_s^{s+T} \frac{\partial}{\partial x}\left|X^{(s,x)}(t)\right|^2 dt\right| \le 2\sqrt{d\Lambda}\,|x| \int\limits_s^{s+T} e^{\frac{c_3-\lambda}{2}(t-s)}dt = K_1|x|,$$

где K_1 – положительная постоянная (без ограничения общности можно считать, что $2M-\lambda>0$).

В связи с тем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|X^{(s,x)}(t)\right|^2 = 2\left(\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right)^2,$$

имеем оценки

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|X^{(s,x)}(t)\right|^2\right| \le 2\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2 \le 2de^{c_3(t-s)}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right| \le \left|\int\limits_s^{s+T} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|X^{(s,x)}(t)\right|^2 dt\right| \le 2d\int\limits_s^{s+T} e^{c_3(t-s)}dt = K_2.$$

Таким образом, $BV(s,x,\varphi) \le \left(-0{,}5 + \varepsilon K_1 + \sqrt{d}\varepsilon^2 K_2/2\right)|x|^2$. За счет выбора достаточно малого ε добьемся того, чтобы константа при $|x|^2$ была отрицательной. Тогда условие 1 будет выполнено. Теорема доказана.

Замечание. Некоторые достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости системы (3) приведены в работе [13].

Пример 1. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dx(t) = \left((-20-0{,}1\sin t)x(t) + 0{,}1\cos t\, y(t) + \sin^2 x(t)\right)dt, \\ dy(t) = \left(-0{,}1\cos t\, x(t) - (20+0{,}1\sin t)\,y(t)\right)dt + \sin^2 y(t)\operatorname{sgn}\left(x(t-1)\right)dw(t), \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{4}$$

с начальными условиями $x(t)=\psi(t)$, $t\in[-1,0]$, $y(0)=y_0$, где x, $y\in\mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение.

Нулевое решение линеаризованной системы

$$dx(t) = \left((-20-0{,}1\sin t)x(t) + 0{,}1\cos t\, y(t)\right)dt,$$

$$dy(t) = \left(-0{,}1\cos t\, x(t) - (20+0{,}1\sin t)\,y(t)\right)dt,\ t\ge 0,$$

является равномерно экспоненциально устойчивым [13], следовательно, согласно теореме 3 нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво по вероятности.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, грант Ф14М-020.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. Berlin ; Heidelberg, 2012.

2. *Леваков А. А.* Исследование устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1258–1267.

3. *Ряшко Л. Б., Башкирцева И. А.* Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем. Екатеринбург, 2010.

4. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига, 1989.

5. *Шайхет Л. Е.* Устойчивость по вероятности нелинейных стохастических систем с запаздыванием // Матем. заметки. 1995. Т. 57, вып. 1. С. 142–146.

6. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* Устойчивость стохастических систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1993. Вып. 7. С. 66–85.

7. *Шайхет Л. Е.* Устойчивость по первому приближению стохастических систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1116–1121.

8. *Шайхет Л. Е.* Исследование на устойчивость стохастических систем с запаздыванием методом функционалов Ляпунова // Проблемы передачи информации. 1975. Т. 11, вып. 4. С. 70–76.
9. *Caraballo T., Shaikhet L.* Stability of delay evolution equations with stochastic pertur-bations // Communications on pure and applied analysis. 2014. Vol. 13, № 5. P. 2095–2113.
10. *Taniguchi T., Liu K., Truman A.* Existence, Uniqueness, and Asymptotic Behavior of Mild Solutions to Stochastic Functional Differential Equations in Hilbert Spaces // J. of differential equations. 2002. Vol. 181. P. 72–91.
11. *Васьковский М. М.* Существование β-мартингальных решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1080–1095.
12. *Леваков А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения. Минск, 2009.
13. *Ichmann A., Owens D., Pratzel-Wolters D.* Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems // Systems control letters. 1987. № 9. P. 157–163.

Поступила в редакцию 12.03.2015.

Максим Михайлович Васьковский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики БГУ.

Ярослав Борисович Задворный – ассистент кафедры высшей математики БГУ.

Илья Вадимович Качан – студент 3-го курса факультета прикладной математики и информатики БГУ.

УДК 514.763.22,512.715

Д. И. ПИРШТУК

К ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ СЕМЕЙСТВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Изучена проблема классификации нильпотентных аппроксимаций векторных распределений от трех переменных. Задача рассмотрена в рамках исследования управляемости аффинных динамических систем с использованием техники алгебр Ли для классификации и стандартного координатного представления нильпотентных аппроксимаций векторных распределений в сингулярных точках. Осуществлена полная классификация ручных случаев, когда эффективная подалгебра $\tilde{\mathfrak{n}}$ равна нулю.

В качестве подзадачи построена классификация однородных идеалов $I \subset \mathbb{C}[u, v]$ малой коразмерности с точностью до действия группы преобразований $\mathbb{SL}_2$. Последний результат находит применение также и в алгебраической геометрии, так как является классификацией нульмерных проективных схем с опорой в одной точке.

Ключевые слова: классификация; нильпотентные аппроксимации; однородные идеалы малой коразмерности; векторные поля на многообразиях; алгебры Ли.

In this paper it is investigated the problem of classification of nilpotent approximations of vector distributions of the three variables. The problem is considered in the study of controllability of affine control dynamic systems using techniques of Lie algebras for the classification and the standard coordinate representations of nilpotent approximations of vector distributions in the singular points. It's proposed a complete classification of visible cases when the effective subalgebra $\tilde{\mathfrak{n}}$ is equal zero.

As subtasks we constructed a classification of homogeneous ideals $I \subset \mathbb{C}[u, v]$ of small codimensions up to the action of the transformation group $\mathbb{SL}_2$. This result is used also in algebraic geometry, as is the classification of zero-dimensional projective schemes with support at one point.

Key words: classification; nilpotent approximations; homogeneous ideals of small codimensions; vector fields on manifolds; Lie algebras.

Пусть M – гладкое многообразие размерности m, D – вполне неинтегрируемое, сингулярное в точке p векторное распределение на M, порожденное аналитическими векторными полями $X = \left\{X_1, \ldots, X_{m_{-1}}\right\}$, а пара $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ – нильпотентная аппроксимация (или символ) распределения D в точке p [1–6]. Напомним, что $\mathfrak{m}$ – конечномерная градуированная нильпотентная алгебра Ли, порожденная элементами степени –1 (так как $\mathfrak{m}_{-1}$), а $\mathfrak{n}$ – ее эффективная градуированная подалгебра и $m_{-1} = \dim \mathfrak{m}_{-1}$, $m = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{n}$.

Семейство X в точке p будем называть *локально эквивалентным* семейству X' в точке p', если существуют такие окрестности $U(p) \subset M$ и $U'(p') \subset M'$ и локальный аналитический диффеоморфизм $\Phi : U(p) \to U'(p')$, что $\Phi(p) = p'$ и $\mathrm{Ad}_\Phi X_i = X'_{p'}$ для всех $i = \overline{1, m_{-1}}$.

Распределения D и D' назовем *локально эквивалентными*, если существуют локально эквивалентные семейства X и X' в точках p и p', порождающие D и D' соответственно.

Нильпотентные аппроксимации $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ и $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ будем называть *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}'$ градуированных алгебр Ли такой, что $\varphi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}'$. Отметим, что локальная эквивалентность распределений влечет эквивалентность нильпотентных аппроксимаций, но обратное, вообще говоря, неверно.