точности, несложно определить необходимое спектральное разрешение дискретной модели, т. е. величину пространственного шага h. Шаг по времени при этом автоматически получается из установленного выше оптимального соотношения шагов (8). Рассмотренная в работе схема цифровой фильтрации (6), (7) по эффективности превосходит известный аналог [9, 10] и может быть использована в методе дробных шагов для численного анализа нелинейных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1989.
2. *Lele S. K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // J. of Computational Phys. 1992. Т. 103, № 1. С. 16–42.
3. *Мухин С. И., Попов С. Ю., Попов Ю. П.* О разностных схемах с искусственной дисперсией // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, № 6. С. 1355–1369.
4. *Мухин С. И., Попов С. Ю., Попов Ю. П.* Исследование внутренних диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем // Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики : сб. ст. М., 1984. С. 134–144.
5. *Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П.* Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера – Котельникова – Шеннона. М., 2004.
6. *Волков В. М., Циунчик А. С.* Метод дробных шагов с использованием рекурсивных цифровых фильтров для решения нелинейных уравнений Шредингера // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 5. С. 22–25.
7. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А.* Математическое моделирование в нелинейной оптике. М., 1989.
8. *Волков В. М., Мацука Н. П.* О консервативности, точности и асимптотических свойствах численных методов для нелинейных уравнений шредингеровского типа // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 7. С. 930–938.
9. *Plura M., Kissing J., Gunkel M., Lenge J., Elbers J. P., Glingener C., Voges E.* Improved split-step method for efficient fiber simulations // Electronics Letters. 2001. Vol. 37, № 5. P. 286–287.
10. *Carena A., Curri V., Gaudino R., Poggiolini P., Benedetto S.* A time-domain optical transmission system simulation package accounting for nonlinear and polarization-related effects in fiber // IEEE J. selected areas in communications. 1997. Vol. 15, № 4. P. 751–765.

Поступила в редакцию 06.04.2015.

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук, профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования физического факультета БГУ.

Алексей Николаевич Гуревский – аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования физического факультета БГУ. Научный руководитель – В. М. Волков.

Ирина Владимировна Жукова – аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования физического факультета БГУ. Научный руководитель – В. М. Волков.

УДК 33:517.925

Б. С. КАЛИТИН

КЛАССИФИКАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЫНКА ТРЕХ ТОВАРОВ

Представлена классификация типов рынков трех благ. Исследуется устойчивость экономического равновесия математической модели рынка трех товаров или услуг (a, b, c), где пары взаимодополняющих благ (a, b) и (b, c) являются взаимозаменяемыми парами товаров по отношению друг к другу. Модель такой экономики представлена в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора цен. Конструкция модели основывается на понятии экономических сил продавцов, покупателей и государства. Используются функциональные выражения таких сил с учетом экономических законов товарного рынка. В модели предполагается, что объем продаж есть функция цены, зависящая от параметров эластичностей, и модель обладает экономическим равновесием. Исследована задача об устойчивости в основном и в критическом случаях одного нулевого корня. Получены достаточные условия устойчивого развития рынка и дан анализ устойчивых многообразий.

Ключевые слова: рынок; классификация; динамическая модель; экономическое равновесие; устойчивость.

In this paper, we present a classification of types of the markets three products. The stability of economic equilibrium of mathematical model of the three good market or services (a, b, c) is investigated, where the two pairs of complementary goods (a, b) and (b, c) are interchangeable. An economy model a system of nonlinear ordinary differential equations with respect to a price vector is presented as. The construction of the model is based on the notion of economic forces by sellers, buyers and government. We use the functional expression of such force, taking into account the economic laws of the good market. The model assumes that the volume of sales is a function of price, which depends on the elasticity parameters, and economic system has equilibrium. The problem of the stability in the principal case and in the critical case of one zero root is investigated. Sufficient conditions for sustainable development of the market are obtained and the analysis of stable manifolds is given.

Key words: market; classification; dynamic model; economic equilibrium; stability.

Классификация

В работах [1–4] изучаются экономико-математические модели рынков трех товаров и услуг относительно вектора цен. При этом в [1] модель строится на основе идеи Л. Вальраса [5], а в работах [2–4] – на базе идеи, представленной в [6]. Опираясь на эти исследования, можно дать классификацию рынка трех благ следующим образом. Пусть реализуются три товара или услуги, которые условно обозначим a, b и c. Тогда в зависимости от типа продуктов (взаимозаменяемые и взаимодополняющие [7]) могут иметь место различные комбинации соотношений между реализуемыми товарами и услугами. Для описания возможных случаев предварительно введем следующие понятия.

Пусть (a, b) – пара товаров или услуг на рынке и отношение $a \wedge b$ означает, что a и b – взаимодополняющие товары, а отношение $a \vee b$ – что a и b – взаимозаменяемые товары. Используя такую символику, выпишем классы возможных типов трех, предложенных на продажу, рыночных благ (a, b, c). Исходя из экономических соображений, получим лишь следующие комбинации, характеризующие рынок:

1) $a \vee b \vee c$ – три взаимозаменяемых блага;
2) $a \wedge b \wedge c$ – три взаимодополняющих блага;
3) $(a \wedge b) \vee c$ – пара взаимодополняющих благ (a, b), а благо c является взаимозаменяемым с парой (a, b);
4) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c)$ – две пары взаимодополняющих благ (a, b) и (b, c), которые являются взаимозаменяемыми парами товаров по отношению друг к другу.

Очевидно, что других часто встречающихся ситуаций трех товаров или услуг на рынке нет, поскольку случай, когда два блага a и b являются одновременно взаимозаменяемыми и взаимодополняющими товарами, исключен.

Таким образом, на основе экономики товарных рынков выделено четыре типа рынков трех благ, составляющих в совокупности все множество таких рынков, причем очевидно, что эти классы попарно не пересекаются. Следовательно, они составляют классификацию множества рынков трех товаров или услуг.

Используя такую классификацию, можно отметить, что в работах [1–4] изучена динамика вектора цен рынков типов 1–3. В настоящей статье рассматривается рынок трех благ типа 4, для которого исследуется проблема устойчивости экономического равновесия.

Модель рынка

Экономико-математическая модель динамики рынка типа 4, так же как и в случаях рынков типов 1–3, может быть получена на основе концепции построения моделей [6]. Пусть $p = (p_1, p_2, p_3)$ означает вектор цен соответственно для товаров a, b и c. Поскольку в данном случае пары взаимодополняющих товаров (a, b) и (b, c) конкурируют между собой, то, опираясь на работы [2, 3], можем записать модель следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= -\frac{v_1 p_1'\left(p_1 - p_1^0\right)}{p_1 - p_1^*} - \frac{d_1 p_1''\left(p_1 - p_j^0\right)}{p_1^{**} - p_1} + \frac{r_1}{q_1^0}\left(p_1 q_1(p) - p_1^0 q_1^0\right) - c_{13}\left(\left(p_1 - p_1^0\right) - \left(p_3 - p_3^0\right)\right);\\
\dot{p}_2 &= -\frac{v_2 p_2'\left(p_2 - p_2^0\right)}{p_2 - p_2^*} - \frac{d_2 p_1''\left(p_2 - p_2^0\right)}{p_1^{**} - p_2} + \frac{r_2}{q_1^0}\left(p_2 q_2(p) - p_1^0 q_1^0\right);\\
\dot{p}_3 &= -\frac{v_3 p_3'\left(p_3 - p_3^0\right)}{p_3 - p_3^*} - \frac{d_3 p_3''\left(p_3 - p_3^0\right)}{p_3^{**} - p_3} + \frac{r_3}{q_3^0}\left(p_3 q_3(p) - p_3^0 q_3^0\right) - c_{31}\left(\left(p_3 - p_3^0\right) - \left(p_1 - p_1^0\right)\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Модель определена в параллелепипеде компонент допустимого вектора цен

$$p_j^* < p_j < p_j^{**}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Здесь для краткости используются обозначения и понятия работ [2–4], причем постоянные коэффициенты v_j, d_j, r_j и c_{ji} отражают интенсивности экономических сил для продавцов, покупателей, государства и сил конкуренции соответственно.

Будем считать, что функции объемов продаж $q_j = q_j(p)$ вектора цен $p = (p_1, p_2, p_3)$ линейны и в соответствии с указанным наличием взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров или услуг задаются формулами [2, 3]:

$$q_1(p) = q_1^0 - e_1 \frac{q_1^0}{p_1^0}\left(p_1 - p_1^0\right) - e_{12}\frac{q_1^0}{p_2^0}\left(p_2 - p_2^0\right) + e_{13}\frac{q_1^0}{p_3^0}\left(p_3 - p_3^0\right);$$

$$q_2(p) = q_2^0 - e_{21}\frac{q_2^0}{p_1^0}\left(p_1 - p_1^0\right) - e_2\frac{q_2^0}{p_2^0}\left(p_2 - p_2^0\right) - e_{23}\frac{q_2^0}{p_3^0}\left(p_3 - p_3^0\right);$$

$$q_3(p)=q_3^0+e_{31}\frac{q_3^0}{p_1^0}\left(p_1-p_1^0\right)-e_{32}\frac{q_3^0}{p_2^0}\left(p_2-p_2^0\right)-e_3\frac{q_3^0}{p_3^0}\left(p_3-p_3^0\right), \tag{3}$$

где e_j – абсолютная величина ценовой эластичности спроса j-го товара и e_{ji} – абсолютная величина перекрестной эластичности спроса j-го товара по цене i-го товара [7], вычисленные в точке $p=p^0$.

Для удобства исследования динамики вектора цен $p(t)=\left(p_1(t),\, p_2(t),\, p_3(t)\right)$ вблизи экономического равновесия $p=p^0$ введем замену переменных $x_j=p_j-p_j^0,\ j=1,2,3.$ Тогда функции объемов продаж примут вид

$$q_1\left(x+p^0\right)=q_1^0-e_1\frac{q_1^0}{p_1^0}x_1-e_{12}\frac{q_1^0}{p_2^0}x_2+e_{13}\frac{q_1^0}{p_3^0}x_3;$$

$$q_2\left(x+p^0\right)=q_2^0-e_{21}\frac{q_2^0}{p_1^0}x_1-e_2\frac{q_2^0}{p_2^0}x_2-e_{23}\frac{q_2^0}{p_3^0}x_3;$$

$$q_3\left(x+p^0\right)=q_3^0+e_{31}\frac{q_3^0}{p_1^0}x_1-e_{32}\frac{q_3^0}{p_2^0}x_2-e_3\frac{q_3^0}{p_3^0}x_3.$$

Интервал допустимых цен (2) в новых переменных определится неравенствами $-p_j'<x_j<p_j'',$ где $p_j'=p_j^0-p_j^*;\ p_j''=p_j^{**}-p_j^0.$

Запишем систему (1) в новых переменных вектора $x=\left(x_1,x_2,x_3\right),$ подставив сюда выражения объемов продаж. Такая процедура после несложных преобразований приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=-\frac{v_1p_1'x_1}{x_1+p_1'}-\frac{d_1p_1''x_1}{p_1''-x_1}+r_1\left(\left(1-e_1\right)x_1-\frac{e_1}{p_1^0}\left(x_1\right)^2-\frac{e_{12}}{p_2^0}x_1x_2+\frac{e_{13}}{p_3^0}x_1x_3\right)-c_{13}x_1-G_{12}x_2+G_{13}x_3;\\
\dot{x}_2&=-\frac{v_2p_2'x_2}{x_2+p_2'}-\frac{d_2p_2''x_2}{p_2''-x_2}+r_2\left(\left(1-e_2\right)x_2-\frac{e_2}{p_2^0}\left(x_2\right)^2-\frac{e_{21}}{p_1^0}x_1x_2-\frac{e_{23}}{p_3^0}x_2x_3\right)-G_{21}x_1-G_{23}x_3;\\
\dot{x}_3&=-\frac{v_3p_3'x_3}{x_3+p_3'}-\frac{d_3p_3''x_3}{p_3''-x_3}+r_3\left(\left(1-e_3\right)x_3-\frac{e_3}{p_3^0}\left(x_3\right)^2+\frac{e_{31}}{p_1^0}x_1x_3-\frac{e_{32}}{p_2^0}x_2x_3\right)-c_{31}x_3+G_{31}x_1-G_{32}x_2,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$G_{ji}=\frac{r_je_{ji}p_j^0}{p_i^0}\ \text{ для всех }\ i,\, j=1,2,3\ \left(i\neq j\right), \tag{5}$$

а новые переменные подчинены неравенствам $-p_j'<x_j<p_j''.$

В системе (4) экономическому равновесию $p=p^0$ соответствует начало координат $x=0$.

Устойчивость равновесия

Рассмотрим экономико-математическую модель (1) при следующих предположениях:

- запасы прочности $S_j=v_j+d_j-r_j\left(1-e_j\right)+c_{j3},\ j=1,3$ [6], первого и третьего товаров идентичны, т. е. можем положить

$$S_1=S_3=S; \tag{6}$$

- для коэффициентов модели (5) выполняются соотношения:

$$G_{31}=G_{13}=G_1;\ G_{12}=G_{32}=G_2;\ G_{21}=G_{23}=G. \tag{7}$$

Исследуем устойчивость равновесия $x=0$ системы (4), (5) по первому приближению, т. е. для достаточно малых возмущений. Используя разложения в ряд Тейлора в окрестности начала координат, запишем систему (4) с точностью до слагаемых третьего порядка малости в виде

$$\dot{x}_1=-Sx_1-G_2x_2+G_1x_3+H_{21}\left(x_1\right)^2-H_{31}\left(x_1\right)^3-R_{12}x_1x_2+R_{13}x_1x_3+o\left(\|x\|^3\right);$$

$$\dot{x}_2 = -Gx_1 - S_2x_2 - Gx_3 + H_{22}\left(x_2\right)^2 - H_{32}\left(x_2\right)^3 - R_{21}x_1x_2 - R_{23}x_2x_3 + o\left(\| x \|^3\right);$$
$$\dot{x}_3 = G_1x_1 - G_2x_2 - Sx_3 + H_{23}\left(x_3\right)^2 - H_{33}\left(x_3\right)^3 + R_{31}x_1x_3 - R_{32}x_3x_2 + o\left(\| x \|^3\right), \tag{8}$$

где положено

$$S = v_j + d_j - r_j\left(1 - e_j\right) + c_{ji} \text{ для } i, j = 1, 3, \quad i \neq j; \; S_2 = v_2 + d_2 - r_2\left(1 - e_2\right);$$

$$H_{2j} = \frac{v_j}{p_j'} - \frac{d_j}{p_j''} - \frac{r_je_j}{p_j^0}; \; H_{3j} = \frac{v_j}{\left(p_j'\right)^2} + \frac{d_j}{\left(p_j''\right)^2}; \; R_{ji} = \frac{r_je_{ji}}{p_j^0},$$

а величины G_1, G_2 и G определяются условиями (5) и (7). Матрица системы линейного приближения для системы (8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -S & -G_2 & G_1 \\ -G & -S_2 & -G \\ G_1 & -G_2 & -S \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение – это

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{9}$$

где коэффициенты определяются следующими формулами:

$$a_1 = 2S + S_2;$$
$$a_2 = S^2 + 2SS_2 - 2GG_2 - G_1^2;$$
$$a_3 = S^2S_2 - 2GG_1G_2 - G_1^2S_2 - 2GG_2S = \left(S + G_1\right)\left(SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2\right).$$

Потребуем, чтобы все корни характеристического уравнения (9) имели отрицательные вещественные части. Это будет выполнено, если воспользоваться критерием Рауса – Гурвица [8] для уравнения (9), а именно, если потребовать неравенства: $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$. В этом случае согласно теореме об устойчивости по первому приближению [9] экономическое равновесие нелинейной модели (1) будет асимптотически устойчивым. В подробной записи указанные три неравенства соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} 2S + S_2 > 0; \\ \left(S + G_1\right)\left(SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2\right) > 0; \\ \left(2S + S_2\right)\left(S^2 + 2SS_2 - 2GG_2 - G_1^2\right) > \left(S + G_1\right)\left(SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Дадим пояснения условиям (10) в виде графической иллюстрации. На рис. 1 и 2 указаны области, соответствующие множеству точек на плоскости $\left(S, S_2\right)$, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ и $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Покажем, что линии, ограничивающие области на рис. 1 и 2 в первой четверти, могут пересекаться при $S > G_1$. Действительно, рассмотрим функцию разности

$$\varphi\left(S\right) = \frac{2GG_2}{S - G_1} - \frac{2GG_2 + G_1^2}{S^2 + 2S}$$

и покажем, что эта функция может менять знак. Она будет положительной при $S > G_1$ тогда и только тогда, когда $2GG_2S^2 + \left(2GG_2 - G_1^2\right)S + G_1\left(2GG_2 + G_1^2\right) > 0$. Отсюда следуют равносильные соотношения:

$$2GG_2\left(S^2 + S + G_1\right) - G_1^2S + G_1^3 > 0 \Leftrightarrow 2GG_2 > \frac{G_1^2\left(S - G_1\right)}{S^2 + S + G_1}. \tag{11}$$

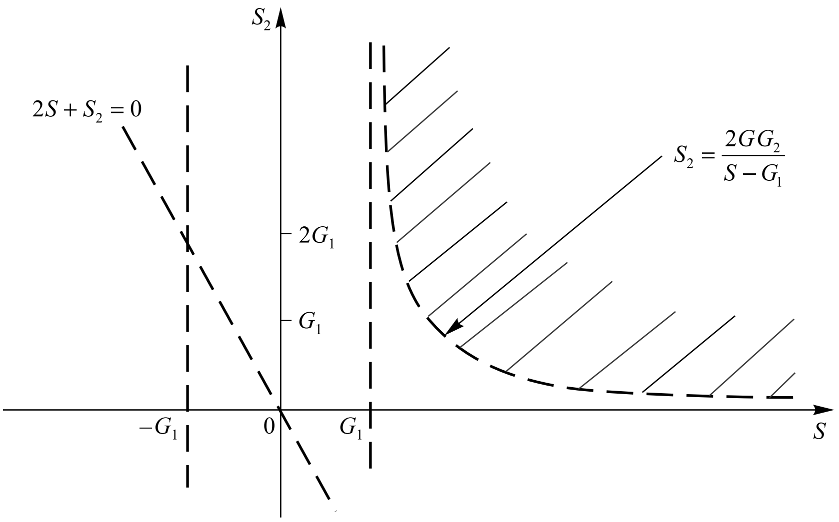

Рис. 1. Область, где $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$

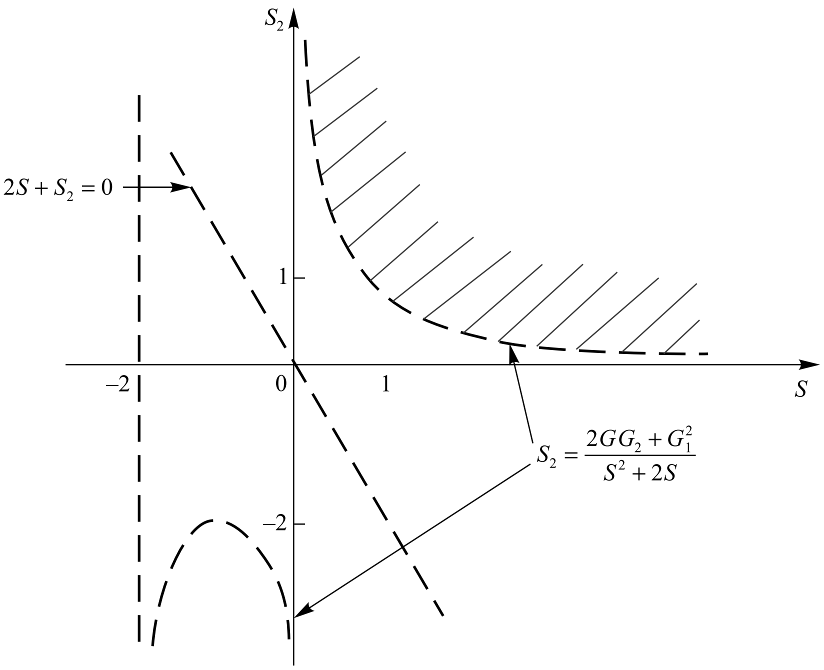

Рис. 2. Область, где $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$

Вычисляем максимальное значение правой части последнего неравенства по переменной S на полуинтервале $S > G_1$. Оно достигается в точке $S^* = G_1 + \sqrt{G_1^2 + 2G_1}$. В соответствии с этим имеем максимальное значение правой части (11) при $S = S^*$:

$$\alpha = \frac{G_1^2 \sqrt{G_1^2 + 2G_1}}{\left(G_1 + \sqrt{G_1^2 + 2G_1}\right)^2 + \sqrt{G_1^2 + 2G_1} + G_1}.$$

По построению рассматриваемые кривые пересекаются при $S > G_1$, если

$$2GG_2 < \alpha, \tag{12}$$

и они не пересекаются, если

$$2GG_2 > \alpha. \tag{13}$$

Поскольку величина α зависит лишь от параметра G_1, то при фиксированном G_1 неравенства (12) и (13) выполняются соответственно при достаточно малом и достаточно большом значениях величины GG_2. Таким образом, исследуемые кривые могут пересекаться.

Заметим, что в случае выполнения неравенства (13) область асимптотической устойчивости, определяемая условиями (10), сводится к двум требованиям: $S_2 > \dfrac{2GG_2}{S - G_1}$, $S > G_1$.

Область асимптотической устойчивости для случая неравенства (12) представлена на рис. 3.

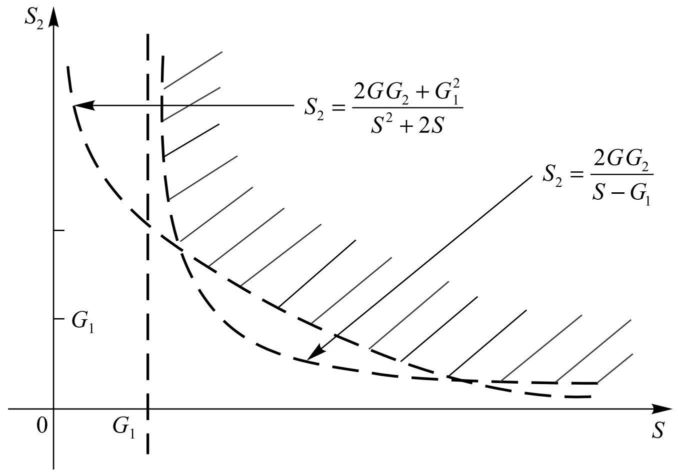

Рис. 3. Область асимптотической устойчивости в случае $2GG_2 < \alpha$

Выделим теперь случаи неустойчивости равновесия. Если выполняются неравенства $a_1 < 0$ или $a_3 < 0$, т. е. выполняется одно из следующих двух условий:

$$2S + S_2 < 0; \tag{14}$$

$$\left(S + G_1\right)\left(SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2\right) < 0, \tag{15}$$

то по крайней мере один корень характеристического уравнения (9) будет иметь положительную вещественную часть. В частности, неравенство (15) выполняется при $S = G_1$. Следовательно, по теореме о неустойчивости по первому приближению [9] каждое из неравенств (14) или (15) дает достаточное условие неустойчивости экономического равновесия.

Критические случаи

Рассмотрим проблему устойчивости нелинейной модели, когда один из корней характеристического уравнения (9) равен нулю. Теоретически это может иметь место в случае, если $S = -G_1$ или $SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2 = 0$ или же эти равенства выполняются одновременно. Анализ характеристического уравнения (9) дает следующие возможные ситуации.

Если $S = -G_1$, то имеем один нулевой корень, а два других корня удовлетворяют квадратному уравнению

$$\lambda^2 + \left(-2G_1 + S_2\right)\lambda - 2GS_2 - 2GG_2 = 0.$$

Эти корни вещественные и имеют разные знаки. Следовательно, экономическое равновесие неустойчиво.

Если $SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2 = 0$ и $S \neq G_1$, то имеем $S_2 = \dfrac{2GG_2}{S - G_1}$. Поэтому исходное характеристическое уравнение имеет один нулевой корень, а два других корня удовлетворяют квадратному уравнению

$$\lambda^2 + \frac{2S\left(S - G_1\right) + 2GG_2}{S - G_1}\lambda + \frac{\left(S + G_1\right)\left(\left(S - G_1\right)^2 + 2GG_2\right)}{S - G_1} = 0. \tag{16}$$

Отсюда видно, что при $S > G_1$ корни уравнения (16) будут иметь отрицательные вещественные части. В этой ситуации требуются дополнительные исследования устойчивости равновесия, соответствующие критическому случаю одного нулевого корня.

Если же выполняется обратное неравенство $S < G_1$, то корни будут вещественными разных знаков, т. е. равновесие неустойчиво.

Случай выполнения двух равенств $S = G_1$ и $SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2 = 0$ невозможен, так как при $S = G_1$ имеем $SS_2 - G_1S_2 - 2GG_2 = -2GG_2 \neq 0$.

Объединяя полученные результаты о неустойчивости в критическом случае одного нулевого корня с условиями (14) и (15), получим область неустойчивости, схематично изображенную на рис. 4.

По результатам проведенных исследований сформулируем следующее утверждение.

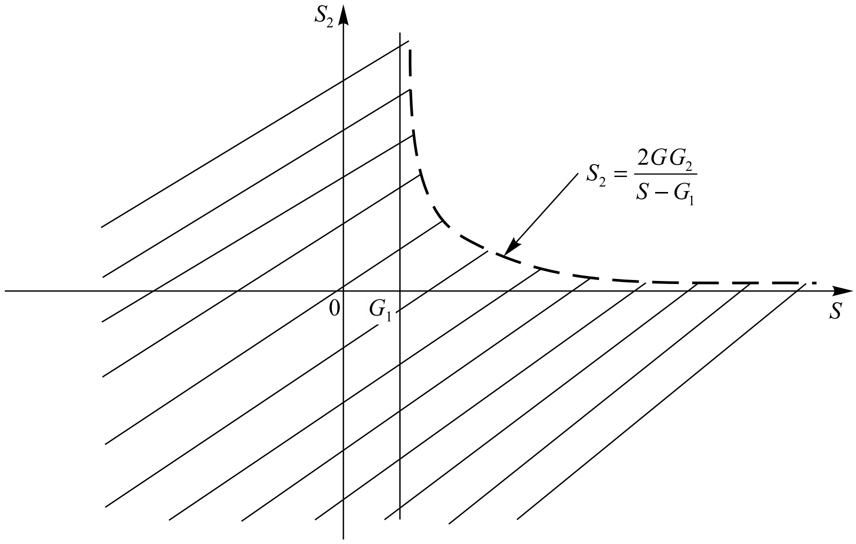

Рис. 4. Область неустойчивости

Теорема. *Предположим, что для модели (1), (5) выполнены условия (6) и (7). Тогда экономическое равновесие* $p_j = p_j^0$, $j = 1, 2, 3$, *будет асимптотически устойчивым, если выполняются условия (10), и равновесие будет неустойчивым в каждом из следующих двух случаев:*

1) $S \leq G_1$;

2) $S > G_1$ *и* $S_2(S - G_1) - 2GG_2 < 0$.

Замечание. При $S > G_1$ и $S_2(S - G_1) - 2GG_2 = 0$ требуются дополнительные исследования.

В заключение отметим следующее. Асимптотическая устойчивость экономического равновесия обеспечивается положительностью величин S и S_2 (запасов прочности рынка), при этом необходимо, чтобы выполнялось более жесткое требование $S > G_1$.

Исследуемая модель рынка трех товаров или услуг типа 4 содержит несколько произвольных параметров. Наличие объема параметров создает существенные трудности технического характера для полного исследования устойчивости в критическом случае одного нулевого корня [9].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Arrow K. J., Hurwitz L.* On the Stability of the Competitive Equilibrium, I // Econometrica. 1958. Vol. 26. P. 522–552.
2. *Калитин Б. С.* Об устойчивости рынка трех взаимозаменяемых товаров // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 2. С. 62–67.
3. *Калитин Б. С.* Об устойчивости рынка трех взаимодополняющих товаров // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 3. С. 72–76.
4. *Калитин Б. С., Кузьмич М. С.* К устойчивости рынка трех товаров // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. Науч.-исслед. экон. ин-та М-ва экономики Респ. Беларусь. Минск, 2014. Вып. 9.
5. *Walras L.* Économique et Mécanique // Bull. de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles. 1909. Vol. XLV. P. 313–327.
6. *Калитин Б. С.* Устойчивость равновесия конкурентного рынка (Динамическая модель рынка). Саарбрюккен, 2012.
7. *Долан Э. Дж., Линсдей Д.* Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1966.
9. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М. ; Л., 1950.

Поступила в редакцию 03.04.2015.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета БГУ.