УДК 519.853

Методы декомпозиции потока для одной дробно-линейной задачи потокового программирования

Л.А. Пилипчук
Белорусский государственный университет

Рассматривается математическая модель экстремальной задачи потокового программирования с дробно-линейной целевой функцией и линейными ограничениями, которая относится к классу задач нелинейного программирования. Используется конструктивная теория декомпозиции построения оптимальных решений, основанная на декомпозиции базисов обобщенного графа.

Цель статьи – разработка методов решения задач нелинейного потокового программирования.

Материал и методы. *В исследовании используются методы линейной алгебры и математического программирования.*

Результаты и их обсуждение. *Разработана и применена теория декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений специального вида для построения оптимальных решений экстремальных сетевых задач дробно-линейного программирования. Построен прямой опорный метод приращений для решения дробно-линейной задачи потокового программирования с дополнительными ограничениями общего вида. Используются концепции теории графов, результаты теории потоков и эффективные технологии построения численных решений нелинейных сетевых задач математического программирования, а также теоретико-графовые свойства опорных множеств. Доказаны достаточные условия оптимальности. Результаты исследования могут быть применены для построения оптимальных решений экстремальных задач линейного и нелинейного программирования.*

Заключение. *Разработана конструктивная теория декомпозиции обобщенного графа, которая используется для построения оптимальных решений сетевых задач дробно-линейного программирования.*

Ключевые слова: *оптимизационные алгоритмы, математическое программирование, допустимое решение, оптимальное решение, декомпозиция, дробно-линейная целевая функция, разреженная недоопределенная система, обобщенный граф, поток.*

Methods of Decomposition of the Flow for One Network Fractional-Linear Programming Problem

L.A. Pilipchuk
Belarusian State University

A mathematical model of one extremal network flow optimization problem with linear fractional objective function and linear constraints is considered. That problem belongs to a class of nonlinear problems of matematical programming. For building optimal solutions FLP we use the constructive decomposition theory, which is based on the decomposition of the support for the generalized graph.

The purpose of the article is the development of methods of solving the nonlinear network flow programming problems.

Material and metods. *The methods of linear algebra and mathematical programming are used in this work.*

Findings and their discussion. *The theory of decomposition of sparse systems of linear algebraic equations of a special form was developed and applied for the construction of optimal solutions of the network problems of fractional-linear programming. A direct support method of the increments was constructed for the fractional-linear problem of network flow programming with additional restrictions of general form. We use the concept of graph theory, the results of the theory of flows and effective technology to build the numerical solutions of nonlinear network mathematical programming problems. The graph-theoretic properties of support sets are used. Sufficient optimality conditions are proved. The results can be used to build optimal solutions extremal problems of linear and nonlinear programming.*

Conclusion. *A constructive decomposition theory of generalized graph is developed, which is used to construct the optimal solutions of network problems of fractional linear programming.*

Key words: *optimization algorithms, mathematical programming, feasible solution, optimal solution, decomposition, fractional-linear objective function, sparse underdetermined system, generalized graph, flow.*

Рассматривается математическая модель экстремальной задачи потокового программирования с дробно-линейной целевой функцией и линейными ограничениями, которая относится к классу задач нелинейного программирования. Используется конструктивная теория декомпозиции построения оптимальных решений, основанная на декомпозиции базисов обобщенного графа.

Цель статьи – разработка методов решения задач нелинейного потокового программирования.

Материал и методы. В исследовании используются методы линейной алгебры и математического программирования.

Рассмотрим математическую модель дробно-линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений и преобразованием дуговых потоков (1)–(4):

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}+\beta}{\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij}+\gamma}\to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji}=a_i,\ i\in I, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij}=\alpha_p,\ p=\overline{1,l}, \tag{3}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ (i,j)\in U, \tag{4}$$

где параметры $c_{ij},q_{ij},\mu_{ij},a_i,\lambda_{ij}^p,\alpha_p,\beta,\gamma$ задачи (1)–(4) определены, I – множество узлов, U – множество дуг ориентированного связного графа $G=(I,U)$, x_{ij} – величина дугового потока дуги $(i,j)\in U$, μ_{ij} – коэффициент преобразования дугового потока x_{ij} дуги (i,j): дуговой поток дуги $(i,j)\in U$ величины x_{ij} исходит из узла i и входит в узел j в преобразованном виде $\mu_{ij}x_{ij}$, причем, преобразование дугового потока x_{ij} осуществляется непосредственно перед узлом j; $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$, $\mu=(\mu_{ij},(i,j)\in U)$ – векторы дуговых потоков и коэффициентов их преобразования; $I_i^+(U)=\{j\in I:(i,j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j\in I:(j,i)\in U\}$.

Пусть V – множество решений $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$ системы уравнений и неравенств (2)–(4). Необходимо найти минимальное значение дробно-линейной целевой функции (1) на множестве V решений системы уравнений и неравенств (2)–(4). Выделим подмножество $Z\subseteq V$ *допустимых базисных решений* задачи (1)–(4). Допустимое базисное решение $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$, $x\in Z$ задачи (1)–(4) определяется следующим образом:

$$x=(x_{ij},(i,j)\in U_S;\ x_{ij}=0,(i,j)\in U\setminus U_S),$$

где U_S – множество базисных дуг обобщенного графа $G=(I,U)$ задачи (1)–(4) [1–3]. Полагаем, что знаменатель $q(x)=\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij}+\gamma$ дробно-линейной целевой функции (1) не меняет знак на множестве допустимых базисных решений. Без ограничения общности предположим, что знаменатель $q(x)>0, x\in Z$.

Общее определение базиса U_S предполагает наличие невырожденной базисной матрицы A_S порядка $n, n=|U_S|$, столбцы которой соответствуют дугам максимального множества $U_S\subset U$, при этом система $A_S x_S^T=0$, $x_S=(x_{ij},(i,j)\in U_S)$ имеет только тривиальное решение. Другими словами, максимальное множество дуг $U_S\subset U$, для которого существует тривиальный поток в обобщенной сети $G_S=(I,U_S)$ для системы (2)–(3), составляет базисное множество дуг обобщенной сети $G=(I,U)$ задачи (1)–(4) [2–3].

Для построения решения системы со специальными матрицами в [2–4] предложены алгоритмы декомпозиции, которые позволяют представить систему уравнений (часть ограничений задачи) в виде двух независимых систем: разреженной системы линейных алгебраических уравнений и системы общего вида. Это позволяет находить численное решение разреженной системы с применением современных технологий [5] на надлежащих структурах для представления базисов (без использования обращения матриц). При построении оптимального решения задачи (1)–(4) первоначально рассматривается невырожденная матрица порядка m, где $m\leq l$, обращение которой выполняется только на первой итерации. Затем на итерациях метода элементы обратных матриц пересчитываются с использованием формул [3] в случаях замены строки (столбца), усечения и окаймления матрицы. Методы декомпозиции [5–6] базисного множества дуг U_S обобщенного графа $G=(I,U)$ экстремальной дробно-линейной задачи потокового программирования (1)–(4) позволяют выделить базисное множество дуг U_L обобщенного графа (сети) G для разреженной системы (2) и применять эффективные технологии построения численных решений разреженных линейных систем вида (2). Заметим, что для базисного множества дуг U_L обобщенной сети G для разреженной системы (2) построение решения разреженной линейной системы вида (2) выполняется без использования обращения матрицы. Для этого применяется технология представления базиса U_L в виде коллекции корневых структур [6]. Использование декомпозиционного подхода к построению решений указанных разреженных систем в исследуемых дробно-линейных задачах потокового программирования позволяет в наибольшей степени учесть априорную информацию о задаче (ее модели, свойствах, типе разреженности) и организовать такой процесс преобразования информации, в котором максимально учитывается структура математической модели, а также теоретико-графовые свойства ее базисов. В результате декомпозиции системы (2)–(3) имеем две независимые системы, причем, вид разреженной системы (2) не изменяется. Согласно [7] общее решение разреженной системы (2) имеет следующий вид:

$$x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} x_{\tau\rho} + (\widetilde{x}_{ij} - \\ - \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} \widetilde{x}_{\tau\rho}), (i,j)\in U_L,$$

где $\delta(\tau,\rho), (\tau,\rho)\in U\setminus U_L$ – фундаментальная система решений однородной системы, порожденной системой (2), $\delta(\tau,\rho) = (\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i,j)\in U)$, $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_{ij}, (i,j)\in U)$ – любое частное решение системы (2). Если частное решение недоопределенной разреженной системы (2) определено по правилам $\widetilde{x}_{ij} = 0, (i,j)\in U\setminus U_L$, то общее решение системы (2) имеет вид:

$$x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} x_{\tau\rho} + \widetilde{x}_{ij}, (i,j)\in U_L.$$

Эффективные алгоритмы построения фундаментальной системы решений однородной системы, порожденной системой (2), представлены в [6–8]. С использованием технологии [6–7] построение характеристического вектора $\delta(\tau,\rho)$ и частного решения системы (2) осуществляется за линейное время. Общее решение $x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} x_{\tau\rho} + \widetilde{x}_{ij}, (i,j)\in U_L$ системы (2) подставим в (3):

$$\sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_L} \Lambda_{\tau\rho}^{p} x_{\tau\rho} = - \sum_{(i,j)\in U_L} \lambda_{ij}^{p} \widetilde{x}_{ij}, p = \overline{1,l},$$

где $\Lambda_{\tau\rho}^{p} = \lambda_{\tau\rho}^{p} + \sum_{(i,j)\in U_L} \lambda_{ij}^{p} \delta_{ij}^{\tau\rho}$. Прямоугольная матрица $R = \left(\Lambda_{\tau\rho}^{p}, p = \overline{1,l}, (\tau,\rho)\in U\setminus U_L\right)$ – матрица детерминантов структур, порожденных дугами множества $U\setminus U_L$ [2]. Таким образом, мы исключили из системы (3) неизвестные $x_{ij}, (i,j)\in U_L$, соответствующие дугам базиса U_L обобщенного графа $G = (I,U)$ для разреженной системы (2). Приведем теоретико-графовые свойства базисных множеств дуг U_S и U_L.

Теорема 1 (теоретико-графовые свойства базиса U_S). *Множество дуг U_S является базисом обобщенного графа $G = (I,U)$ задачи (1)–(4), если выполнены следующие условия:*

1) множество узлов $I(U_S)$, соответствующих базисным дугам U_S, содержит все узлы обобщенного графа G: $I(U_S) = I$;

2) граф $G_S = (I,U_S)$ состоит из t компонент связности $G_S^n = (I_S^n, U_S^n), n = \overline{1,t}$, каждая из которых содержит хотя бы один невырожденный цикл [2], $U_S = \bigcup_{n=1}^{t}(U_S^n), I = \bigcup_{n=1}^{t}(I_S^n)$;

3) минор максимального порядка $r = |U_B|$ матрицы $R = \left(\Lambda_{\tau\rho}^{p}, p = \overline{1,l}; (\tau,\rho)\in U\setminus U_S\right)$ отличен от нуля, $U_B = U_S \setminus U_L$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоретико-графовых свойств базиса для неоднородной задачи потокового программирования [3].

Пусть D – невырожденная подматрица матрицы R порядка $r = |U_B| = |U_S \setminus U_L|$, где $D = \left(\Lambda_{\tau\rho}^{p}, p\in P = \{1,2,\cdots,l\}; (\tau,\rho)\in U_B \subseteq U\setminus U_L\right)$. Базис U_S обобщенного графа G задачи (1)–(4) представим в следующем виде: $U_S = U_L \cup U_B, U_L \cap U_B = \varnothing$, где U_L – базис обобщенного графа G для разреженной системы (2).

Теорема 2 (теоретико-графовые свойства базиса U_L). *Множество дуг U_L является базисом обобщенного графа G для разреженной системы (2) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) граф $G_L = (I_L, U_L)$ состоит из m компонент связности $G_L^n = (I_L^n, U_L^n), n = \overline{1,m}$, каждая из которых содержит единственный невырожденный цикл [2];

2) компоненты связности $G_L^n = (I_L^n, U_L^n), n = \overline{1,m}$ графа $G_L = (I_L, U_L)$ содержат все узлы графа G: $I = \bigcup_{n=1}^{m} I(U_L^n)$, $U_L = \bigcup_{n=1}^{m} U_L^n$, где множество $I(U_L^n)$ состоит из узлов компоненты связности $G_L^n = (I_L^n, U_L^n)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично [3].

На основании теоретико-графовых свойств базисов (теоремы 1–2) получены эффективные алгоритмы декомпозиции дуговых потоков в соответствии с базисами U_L, U_S. Поскольку множество дуг $U_S = U_L \bigcup U_B$ – базис обобщенного графа $G=(I,U)$ задачи (1)–(4), $U_L \bigcap U_B = \varnothing$, то из системы $Dx_B = \beta$ однозначно вычислим неизвестные дуговые потоки x_B, соответствующие бициклическим дугам множества U_B, где векторы-столбцы x_B, β определены следующим образом:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{\tau\rho}, \\ (\tau,\rho) \in U_B \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{(i,j)\in U_L} \lambda_{ij}^p \widetilde{x}_{ij}, \\ p \in P \end{pmatrix}.$$

Подставим вычисленные дуговые потоки x_B в уравнения системы (2). Для вычисления неизвестных $x_{ij}, (i,j) \in U_L$ используем теоретико-графовые свойства базисного множества дуг U_L обобщенного графа $G=(I,U)$ для разреженной системы (2) (теорема 2).

Однако существенные преимущества указанного декомпозиционного подхода к построению решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений вида (2)–(3) оцениваются в контексте построения решений больших дробно-линейных задач потокового программирования. Представленные методы декомпозиции потоков в обобщенных сетях, технологии построения численных решений, основанные на декомпозиционном подходе, и их оптимальная реализация в конструктивных методах решения дробно-линейных задач потокового программирования (1)–(4) обеспечивают однородную методику для вычисления основных величин: приращения дробно-линейной целевой функции, подходящего направления изменения допустимого решения и потенциалов узлов обобщенного графа G.

С применением алгоритмов декомпозиции базиса $U_S = U_L \bigcup U_B$ графа G для системы (2)–(3), свойств базиса пространства решений однородной системы, порожденной системой (2), фундаментальных результатов теории потоков и современных технологий построения аналитических и численных решений разреженных линейных систем построим метод приращений для решения дробно-линейной экстремальной задачи потокового программирования (1)–(4).

Пусть $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ – некоторое допустимое базисное решение задачи (1)–(4), $x \in Z$. Рассмотрим допустимое базисное решение $\bar{x} = x + \Delta x$, $\bar{x} \in Z$, где $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}, (i,j) \in U)$, $\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij}$, $\Delta x = (\Delta x_{ij}, (i,j) \in U)$. Компонента Δx_{ij} вектора Δx является приращением дугового потока $x_{ij}, (i,j) \in U$. Поскольку $\bar{x}$ – допустимое базисное решение задачи (1)–(4), то справедливы соотношения:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \mu_{ji} \Delta x_{ji} = 0, \; i \in I, \qquad (5)$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p \Delta x_{ij} = 0, \; p = \overline{1,l}. \qquad (6)$$

Согласно [7] общее решение разреженной однородной недоопределенной системы (5) имеет вид:

$$\Delta x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} \Delta x_{\tau\rho}, (i,j) \in U_L. \qquad (7)$$

Подсчитаем приращение Δf дробно-линейной целевой функции (1) задачи (1)–(4).

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) = \frac{p(x+\Delta x)}{q(x+\Delta x)} - f(x) =$$

$$= \frac{p(x+\Delta x) - f(x) q(x+\Delta x)}{q(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{H_1 - f(x) H_2}{\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}(x_{ij} + \Delta x_{ij}) + \gamma},$$

$$H_1 = \left(p(x) + \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} \Delta x_{ij} \right),$$

$$H_2 = \left(q(x) + \sum_{(i,j)\in U} q_{ij} \Delta x_{ij} \right).$$

В полученное выражение Δf приращения дробно-линейной целевой функции (1) подставим общее решение (7) и преобразуем числитель и знаменатель приращения Δf к следующему виду:

$$\Delta f = \frac{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_L} \widetilde{\Delta}(\tau,\rho) \Delta x_{\tau\rho}}{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_L} \Delta_Q(\tau,\rho)\left(x_{\tau\rho} + \Delta x_{\tau\rho}\right) + Q + \gamma}, \qquad (8)$$

$$\widetilde{\Delta}(\tau,\rho) = \Delta(\tau,\rho) - \sum_{p=1}^{l} r_p \Lambda_{\tau\rho}^p,$$

$$\Delta(\tau,\rho) = \Delta_P(\tau,\rho) - f(x) \Delta_Q(\tau,\rho),$$

$$\Delta_P(\tau,\rho) = c_{\tau\rho} + \sum_{(i,j)\in U_L} c_{ij} \delta_{ij}^{\tau\rho},$$

$$\Delta_Q(\tau,\rho) = q_{\tau\rho} + \sum_{(i,j)\in U_L} q_{ij} \delta_{ij}^{\tau\rho}.$$

$$\left(D^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\upsilon_{p,t(\tau,\rho)}, p\in P=\{1,2,\cdots,l\};\\ t(\tau,\rho)=\overline{1,|U_B|}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\Lambda^p_{\tau\rho}, p\in P=\{1,2,\cdots,l\};\\ (\tau,\rho)\in U_B\end{pmatrix},$$

$$Q=\sum_{(i,j)\in U_L} q_{ij}\left(\widetilde{x}_{ij}-\sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_L}\widetilde{x}_{\tau\rho}\delta^{\tau\rho}_{ij}\right),$$

$$\begin{pmatrix} r_1\\ \cdots \\ r_{|U_B|}\end{pmatrix}=\left(D^T\right)^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \cdots\\ \omega_{|U_B|}\end{pmatrix},$$

$$\omega_t=-\sum_{(i,j)\in B_{\tau\rho}}\left(c_{ij}-f(x)q_{ij}\right)\delta^{\tau\rho}_{ij}, t=\overline{1,|U_B|},$$

где $t(\tau,\rho)$ – порядковый номер бициклической дуги $(\tau,\rho)\in U_B$, D – матрица детерминантов, которая соответствует множеству бициклических дуг U_B, входящих в состав базиса $U_S=U_L\bigcup U_B$ обобщенного графа G задачи (1)–(4), D^T – транспонированная матрица.

Для допустимого решения $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$ задачи дробно-линейного потокового программирования (1)–(4) сформулируем достаточные условия оптимальности.

Теорема 3 (достаточные условия оптимальности). *Для оптимальности допустимого решения x задачи (1)–(4) достаточно существования такого базиса U_S обобщенной сети $G=(I,U)$ для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (1)–(4), при котором выполняются соотношения:*

$$\begin{aligned}&x_{ij}=0, \text{если}\, \widetilde{\Delta}(i,j)\geq 0,\\ &x_{ij}>0, \text{если}\, \widetilde{\Delta}(i,j)=0, (i,j)\in U\setminus U_S.\end{aligned}\tag{9}$$

Доказательство. Предположим, что для допустимого решения $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$ существует такой базис U_S обобщенной сети $G=(I,U)$ для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (1)–(4), что выполняются соотношения (9). Для дугового потока $x_{ij}=0$ приращение $\Delta x_{ij}\geq 0$. Согласно (9) имеем $\widetilde{\Delta}(i,j)\geq 0$. Следовательно, $\widetilde{\Delta}(i,j)\Delta x_{ij}\geq 0$. Таким образом, при выполнении условий $x_{ij}=0$, если $\widetilde{\Delta}(i,j)\geq 0$ для дуг $(i,j)\in U\setminus U_S$, справедливо неравенство $\sum_{(i,j)\in U\setminus U_S}\widetilde{\Delta}(i,j)\Delta x_{ij}\geq 0.$ Если $x_{ij}>0$, то для дугового потока x_{ij} приращение Δx_{ij} может иметь любой знак, но, согласно условиям (9), выполняется равенство $\widetilde{\Delta}(i,j)=0$. Следовательно, $\widetilde{\Delta}(i,j)\Delta x_{ij}=0$. Таким образом, при выполнении условий (9) также справедливо неравенство $\sum_{(i,j)\in U\setminus U_S}\widetilde{\Delta}(i,j)\Delta x_{ij}\geq 0.$ Окончательно, в соответствии с (8) приращения дробно-линейной целевой функции (1), имеем $\Delta f\geq 0$. Поскольку неравенство $\Delta f\geq 0$ верно для любых $\overline{x}=x+\Delta x, \overline{x}\in Z$, то допустимое решение $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$ для рассматриваемой экстремальной задачи дробно-линейного программирования (1)–(4) является оптимальным решением, которому соответствует оптимальный базис U_S обобщенного графа $G=(I,U)$. Теорема доказана.

Согласно принципу возможных направлений [1–2] для допустимого базисного решения x построим новое допустимое базисное решение $\overline{x}=x+\Delta x, \overline{x}\in Z$ следующим образом:

$$\overline{x}=x+\theta y\in Z\ \ \forall\theta\in[0,\theta_0], \theta_0>0,$$

где $y=\left(y_{ij},(i,j)\in U\right)$ – подходящее направление [1–2] изменения допустимого базисного решения x, θ – шаг вдоль подходящего направления y. При нарушении условий оптимальности (9) существует подходящее направление y изменения допустимого базисного решения x. Построим подходящее направление y изменения допустимого базисного решения x. Пусть условия (9) нарушены на дуге $(i_0,j_0)\in U\setminus U_S$. Положим

$$\begin{aligned}&y_{i_0j_0}=-\widetilde{\Delta}(i_0,j_0)\operatorname{sgn}\left(\widetilde{\Delta}(i_0,j_0)\right),\\ &y_{ij}=0, (i,j)\in U\setminus\left(U_S\bigcup(i_0,j_0)\right).\end{aligned}$$

Компоненты $y_{ij},(i,j)\in U_S$, $y_{i_0j_0}$ вектора y удовлетворяют разреженной системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{j\in I_i^+(U_S\bigcup(i_0,j_0))} y_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U_S\bigcup(i_0,j_0))}\mu_{ji}y_{ji}=0, i\in I,\tag{10}$$

$$y_{i_0j_0}=-\widetilde{\Delta}(i_0,j_0)\operatorname{sgn}\left(\widetilde{\Delta}(i_0,j_0)\right),$$

$$\sum_{(i,j)\in U_S\bigcup(i_0,j_0)}\lambda^p_{ij}y_{ij}=0,\ p=\overline{1,l}.\tag{11}$$

Для построения эффективного алгоритма решения разреженной системы (10)–(11) применим принципы декомпозиции базиса U_S обобщенного графа $G=(I,U)$ задачи (1)–(4). Декомпозиция базиса U_S позволяет выделить базис U_L обобщенного графа G для разреженной системы (10),

$U_S = U_L \bigcup U_B, U_L \bigcap U_B = \varnothing$ и использовать его теоретико-графовые свойства (теорема 2). На основании теоремы 1 неизвестные системы (10)–(11), соответствующие бициклическим дугам U_B, однозначно вычислим из системы

$$\sum_{(\tau,\rho)\in U_B} \Lambda^p_{\tau\rho} y_{\tau\rho} = -\Lambda^p_{i_0 j_0} \widetilde{\Delta}(i_0, j_0)\,\mathrm{sgn}\left(\widetilde{\Delta}(i_0, j_0)\right), \quad p \in P, \tag{12}$$

где $\widetilde{\Delta}(i_0, j_0)$, $\Lambda^p_{i_0 j_0}$ – соответственно оценка и детерминант бицикла $B_{i_0 j_0}$, порожденного дугой $(i_0, j_0) \in U \setminus U_S$. Подставим в (10) значения $y_{ij}, (i, j) \in U_B$, которые однозначно определены из системы (12). Для вычисления неизвестных $y_{ij}, (i, j) \in U_L$ применим теоретико-графовые свойства базиса U_L (теорема 2) и технологии представления базиса U_L в виде коллекции корневых структур [2; 6]. Максимально-допустимый шаг $\theta_{\max} \in [0, \theta_0], \theta_0 > 0$, вдоль построенного подходящего направления $y = (y_{ij}, (i, j) \in U)$ изменения допустимого базисного решения $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$ вычисляется по стандартным правилам [1]. Пусть шаг $\theta_{\max}$ достигнут на дуге $(i_*, j_*) \in U_S$. В результате имеем новое допустимое базисное решение: $\overline{x} = (\overline{x}_{ij}, (i, j) \in U)$, где $\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \theta_{\max} y_{ij}$. Выполним построение базиса $\overline{U}_S = (U_S \cup (i_0, j_0)) \setminus (i_*, j_*)$ обобщенной сети $G = (I, U)$ задачи (1)–(4), где $\overline{U}_S = \overline{U}_L \cup \overline{U}_B$, $\overline{U}_L \bigcap \overline{U}_B = \varnothing$, $\overline{U}_L$ – новый базис обобщенной сети G для разреженной системы (2), $\overline{U}_B$ – множество бициклических дуг, входящих в состав базиса $\overline{U}_S$ обобщенного графа $G = (I, U)$ задачи (1)–(4). Переход от матрицы D^{-1} к матрице $\overline{D}^{-1}$, где матрица

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} \overline{\Lambda}^p_{\tau\rho}, p \in P = \{1, 2, \cdots, l\}; \\ (\tau, \rho) \in \overline{U}_B = U_S \setminus \overline{U}_L \end{pmatrix}$$

является матрицей детерминантов структур, порожденных дугами множества $U \setminus \overline{U}_L$, выполняется по рекуррентным соотношениям, связывающим элементы обратных матриц на итерациях описанного метода построения оптимального решения задачи (1)–(4), которые легко получить для обобщенного графа G на основании рекуррентных соотношений, полученных для экстремальной задачи линейной оптимизации [2]. Методы декомпозиции разреженных систем, которые применены для построения оптимальных решений дробно-линейной задачи потокового программирования с вложенной сетевой структурой ограничений и преобразованием дуговых потоков (1)–(4), используются также при решении неоднородных задач дробно-линейного потокового программирования [2] и для построения эффективных методов решения задачи оптимального расположения сенсоров в графах [9–11].

Заключение. Для построения оптимальных решений экстремальных сетевых задач нелинейного программирования разработана и применена теория декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений специального вида. Использование принципов декомпозиции для построения решений систем линейных алгебраических уравнений позволяет представить систему основных ограничений исследуемой сетевой задачи дробно-линейного программирования в виде двух независимых систем, причем, тип разреженности системы исходной задачи не изменяется. На основании применения свойств базиса пространства решений однородной системы, порожденной разреженной системой ограничений задачи, фундаментальных результатов теории потоков и современных технологий построения аналитических и численных решений разреженных линейных систем специального типа построен прямой базисный метод приращений для решения исследуемой дробно-линейной экстремальной задачи потокового программирования с дополнительными ограничениями общего вида. Доказаны достаточные условия оптимальности. Методы декомпозиции ограничений позволяют в наибольшей степени учесть априорную информацию о математической модели, ее свойствах, типе разреженности. Используются концепции теории графов, результаты теории потоков и эффективные технологии построения численных решений нелинейных сетевых задач математического программирования. Результаты исследования могут быть применены для построения оптимальных решений экстремальных задач линейного и нелинейного программирования, а также для решения задачи оптимального расположения сенсоров в обобщенном графе для оценки потоков на его ненаблюдаемой части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1980. – Ч. 3: Специальные задачи. – 368 с.
2. Пилипчук, Л.А. Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2013. – 235 с.

3. Пилипчук, Л.А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2009. – 222 с.
4. Пилипчук, Л.А. Применение конструктивных методов декомпозиции для решения одной нелинейной задачи сетевой оптимизации / Л.А. Пилипчук // Весн. Гродзенск. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 2(192). – С. 54–61.
5. Пилипчук, Л.А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л.А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2012. – 260 с.
6. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
7. Pilipchuk, L.A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L.A. Pilipchuk, O.V. German, A.S. Pilipchuk // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 2. – С. 91–96.
8. Pilipchuk, L.A. Graph algorithms in sparse linear systems with rectangular matrices / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk, Y.H. Pesheva // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc. – 2013. – Vol. 1570. – P. 485–490.
9. Pilipchuk, L.A. Sensor Location Problem for a Multigraph / L.A. Pilipchuk, T.S. Vishnevetskaya, Y.H. Pesheva // Mathematica Balkanica. New Series. – 2015. –Vol. 27. – Fasc. 1–2. – P. 65–75.
10. Pilipchuk, L.A. Solution of sparse system for sensor location problem as function of non-strictly positive arc flow split ratios / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk, Y.V. Ramanouski // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc. – 2014. – Vol. 1631. – Issue 1. – P. 344–349.
11. Pilipchuk, L.A. Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arcs flows / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk, Y.V. Ramanouski // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc. – 2014. – Vol. 1631. – Issue 1. – P. 350–353.

REFERENCES

1. Gabasov R., Kirillova F.M. Methods of Linear Programming in 3 Parts. Part 3. Special Problems [*Metody lineynogo programmirovaniya: v 3 ch. Ch. 3. Spetsialniye zadachi*]. Minsk, 1980. – 368 p.
2. Pilipchuk L.A. Fractional-Linear Extremal Inhomogeneous Problems in Network Flow Programming [*Drobno-lineinie ekstremalnie neodnorodnie zadachi potokovogo programmirovaniya*], Minsk, 2013, 235 p.
3. Pilipchuk L.A. Linear Inhomogeneous Problems in Network Flow Programming [*Lineynyye neodnorodnyye zadachi potokovogo programmirovaniya*]. Minsk, 2009, 222 p.
4. Pilipchuk L.A. Application of the Constructive Decomposition Methods for Solving a Nonlinear Problem of Network Optimization [*Primenenie konstruktivnih metodov dekompozicii dlya resheniya odnoi nelineinoi zadachi setevoi optimizacii*], Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaunaga universiteta imya Yanki Kupali. Seriya 2. Matematika. Fizika. Infarmatika, Vilichalnaya tekhnika i kiravanne, 2015, 2 (192), pp. 54–61.
5. Pilipchuk L.A. Sparse Underdetermined Systems of Linear Algebraic Equations [*Razrezhennyye nedoopredelennyye sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy*], Minsk, 2012, 260 p.
6. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
7. Pilipchuk, L.A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L.A. Pilipchuk, O.V. German, A.S. Pilipchuk // Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika. – 2015. – № 2. – C. 91–96.
8. Pilipchuk L.A., Pilipchuk A.S., Pesheva Y.H. Graph algorithms in sparse linear systems with rectangular matrices. American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc, 2013. Vol. 1570, p. 485–490.
9. Pilipchuk, L.A. Sensor Location Problem for a Multigraph / L.A. Pilipchuk, T.S. Vishnevetskaya, Y.H. Pesheva // Mathematica Balkanica. New Series. Vol. 27. – 2013. – Fasc. 1–2. – P. 65–75.
10. Pilipchuk, L.A. Solution of sparse system for sensor location problem as function of non-strictly positive arc flow split ratios / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk, Y.V. Ramanouski // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc., 2014. Vol. 1631, Issue 1, p. 344–349.
11. Pilipchuk, L.A. Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arcs flows / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk, Y.V. Ramanouski // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc., 2014. Vol. 1631, Issue 1, p. 350–353.

Поступила в редакцию 10.11.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: pilipchuk@bsu.by – Пилипчук Л.А.