БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. А. Расолько

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

В ДВУХ ЧАСТЯХ

Часть 2

АЛГОРИТМЫ В MATHEMATICA

МИНСК
БГУ
2016

УДК 517.968 + 519.642.7

Расолько, Г. А. Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода. В 2 ч. Ч. 2. Алгоритмы в Mathematica [Электронный ресурс] / Г. А. Расолько. – Минск : БГУ, 2016. – ISBN 978-985-566-327-1.

Рассматривается реализация алгоритмов численного решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с произвольными коэффициентами и ядрами Коши в системе компьютерной математики Mathematica, основанных на полученных спектральных соотношениях для характеристических операторов. В приложении даются файлы с программами в Mathematica (папка Module_Mathematica).

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физико-математических наук *В. Б. Таранчук;*
доктор физико-математических наук *В. М. Волков*

ISBN 978-985-566-327-1 (ч. 2)
ISBN 978-985-566-255-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание состоит из двух глав и приложения. Содержит краткое описание и некоторые уточнения алгоритмов, полученных в работе [51], и их реализации в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Сохранены последовательность изложения материала и условные обозначения из монографии [51].

В первой главе приводятся краткие сведения из теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ); во второй – даются реализации алгоритмов спектральных соотношений и приближенного решения характеристического и полного уравнений с произвольными коэффициентами в разных классах функций. В каждой главе после изложения алгоритмов имеются описания параметров и листинги функций, реализующих эти алгоритмы в системе Mathematica.

Автор выражает искреннюю признательность научному руководителю и соавтору многих работ – доктору физико-математических наук, профессору Шешко Михаилу Антоновичу, который показал перспективность изучения этого раздела вычислительной математики и оказывал постоянную помощь при совместной работе.

Особая благодарность доктору физико-математических наук В. М. Волкову, доктору физико-математических наук В. Б. Таранчуку и кандидату физико-математических наук Ю. А. Кременю за советы и замечания.

Все предложения и вопросы просьба отправлять по адресу: 220030, Минск, пр. Независимости, 4, кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования, механико-математический факультет, Белорусский государственный университет.

Глава 1. БАЗОВЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. СИУ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$a(x)\phi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}b(t)\phi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k(x,t)\phi(t)dt=f(x),\,-1<x<1, \tag{1.1.1}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $k(x,t)$, $f(x)$ – заданные функции, непрерывные по Гельдеру, $\phi(x)$ – искомая функция.

Предполагается, что $b(x)\not\equiv 0$, $a^2(x)-b^2(x)\neq 0, \forall x\in[-1,1]$. Сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

После выполнения перехода в уравнении (1.1.1) к новой неизвестной функции $u(x)$ по правилу

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}, \tag{1.1.2}$$

где

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]\,X^+(x)=[a(x)-b(x)]\,X^-(x), \quad -1<x<1,$$

и введения обозначения

$$A(x)=\frac{a(x)}{a^2(x)-b^2(x)}, \qquad B(x)=\frac{b(x)}{a^2(x)-b^2(x)},$$

уравнение (1.1.1) принимает вид

$$K^0(u(x);x)+k(u(x);x)=f(x), \quad -1<x<1, \tag{1.1.3}$$

в котором

$$K^0(u(x);x)\overset{def}{=}A(x)Z(x)\,u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$k(u(x);x)\overset{def}{=}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}k(x,t)u(t)dt. \tag{1.1.4}$$

Оператор K^0 называется характеристическим.

Здесь $X^{\pm}(x)-$ предельные значения канонической функции $X(z)$ задачи линейного сопряжения

$$X^+(x)=\frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}X^-(x), \quad -1<x<1, \tag{1.1.5}$$

решением которой является функция

$$X(z) = (z-1)^{-\kappa_1}(z+1)^{-\kappa_2} e^{\Gamma(z)}, \quad |z|>1,$$

при этом

$$X^{\pm}(x) = (x-1)^{-\kappa_1}(x+1)^{-\kappa_2} e^{\Gamma^{\pm}(x)},$$

где

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa,$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\ln G(t)}{t-z} dt,$$

$$\Gamma^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}\ln G(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\ln G(t)}{t-x} dt,$$

$$G(x) = \frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}, \qquad -\pi < \arg G(-1) \le \pi,$$

$$a^2(x) - b^2(x) \ne 0, \forall x \in [-1,1]. \tag{1.1.6}$$

Имеет место представление [24]:

$$Z(x) = (x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta} Z_0(x), \quad \mathrm{Re}\alpha > -1, \ \mathrm{Re}\beta > -1,$$

$Z_0(x)$ – ограниченная функция.

Входящие в показатели целые числа κ_1, κ_2 подбираются так, чтобы в окрестностях точек ± 1 функция $X(z)$ принадлежала заданному классу. Такому же классу принадлежит и решение $\phi(x)$.

Число $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ называется *индексом задачи линейного сопряжения* (1.1.5) или, что то же самое, характеристического уравнения (1.1.1) $(k(x,t) \equiv 0)$.

Согласно [57, 58] имеет место представление функции

$$X(z) = (z-1)^{\frac{1}{2\pi i}\ln G(1) - \kappa_1}(z+1)^{-\frac{1}{2\pi i}\ln G(-1) - \kappa_2} e^{\Omega(z)},$$

индексы κ_1, κ_2, а следовательно, и κ, зависят от значения вещественной части функции

$$\frac{1}{2\pi i}\ln G(x) = \frac{1}{2\pi i}\big(\ln|G(x)| + i(\arg G(x) + 2\pi k)\big), \quad -\pi < \arg G(x) + 2\pi k \le \pi, \ k \in Z.$$

Пусть

$$\alpha(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln G(x)\right) = \frac{1}{2\pi}\arg_0 G(x), \quad -\pi < \arg_0 G(x) \le \pi.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} < \alpha(-1) \le \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2} < \alpha(1) \le \dfrac{1}{2}, \quad x \in [-1,1]. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Напомним определение класса h, введенного Н. И. Мусхелишвили [24].

Мы говорим, что каноническая функция $X(z)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5) принадлежит классу $h(0)$, если в окрестности точек $z = \pm 1$ она допускает интегрируемую особенность. Класс $h(-1,1)$ определяется тем, что $X(z)$ ограничена вблизи точек $z = \pm 1$. Классы $h(1)$ и $h(-1)$ означают интегрируемую неограниченность в окрестности точек $z = -1$ и $z = 1$ соответственно.

Класс 1. Искомое решение $\phi(x)$ принадлежит классу $h(0)$. Тогда, согласно [65], κ_1, κ_2, выбираются из условий

$$0 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(-1)\right] + \kappa_2 < 1,$$

$$-1 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(1)\right] - \kappa_1 < 0, \qquad -\pi < \arg G(-1) \le \pi, \tag{1.1.8}$$

и, на основании (1.1.7), κ принадлежит множеству $\{0,1,2\}$.

Класс 2. Искомое решение $\phi(x)$ принадлежит классу $h(-1,1)$. Тогда κ_1, κ_2, выбираются из условий

$$-1 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(-1)\right] + \kappa_2 < 0,$$

$$0 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(1)\right] - \kappa_1 < 1, \qquad -\pi < \arg G(-1) \le \pi, \tag{1.1.9}$$

и, на основании (1.1.7), κ принадлежит множеству $\{-2,-1,0\}$.

Класс 3. Искомое решение $\phi(x)$ принадлежит классу $h(-1)$. Тогда κ_1, κ_2, выбираются из условий

$$-1 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(-1)\right] + \kappa_2 < 0,$$

$$-1 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(1)\right] - \kappa_1 < 0, \qquad -\pi < \arg G(-1) \le \pi, \tag{1.1.10}$$

и, на основании (1.1.7), κ принадлежит множеству $\{-1,0,1\}$.

Класс 4. Искомое решение $\phi(x)$ принадлежит классу $h(1)$. Тогда κ_1, κ_2, выбираются из условий

$$0 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(-1)\right] + \kappa_2 < 1,$$

$$0 < \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(1)\right] - \kappa_1 < 1, \qquad -\pi < \arg G(-1) \le \pi, \tag{1.1.11}$$

и, на основании (1.1.7), κ принадлежит множеству $\{-1, 0, 1\}$.

Случай, когда $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(-1)\right] + \kappa_2 = 0, \quad \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(1)\right] - \kappa_1 = 0$, особый, и нами не рассматривается.

Листинг функции, реализующей формулы (1.1.8) – (1.1.11) (файл «kappa.nb»)

Функция Fκ.

Назначение: вычисляет индекс κ задачи линейного сопряжения в зависимости от класса функций.

Прототип: Fκ[$a\_, b\_, klass\_$].

Параметры:

a, b – функции $a(x), b(x)$ – коэффициенты уравнения (1.1.3),

$klass$ – класс, которому принадлежит искомая функция согласно описанной выше (1.1.8) – (1.1.11) классификации.

Возвращаемое значение: $\kappa_1, \kappa_2, \kappa$ – частные индексы и индекс задачи линейного сопряжения.

Реализация в Mathematica

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] :=
  Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2];
     χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2];
       χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2];
        χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}];
  ];
```

Имеет место разложение канонической функции

$$X(z)=(z-1)^{-\kappa_1}(z+1)^{-\kappa_2}e^{\Gamma(z)},\quad |z|>1,\quad \kappa_1+\kappa_2=\kappa,$$

в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$:

$$X(z)=z^{-\kappa}(p_\kappa+p_{\kappa+1}z^{-1}+\ldots),\quad p_\kappa=1,\quad \kappa\ge 0, \tag{1.1.12}$$

$$X(z)=z^{|\kappa|}(p_{|\kappa|}+p_{|\kappa|+1}z^{-1}+\ldots),\quad p_{|\kappa|}=1,\quad \kappa<0. \tag{1.1.13}$$

Листинг функции, реализующей формулу (1.1.6) (файл «FunEGz.nb»)

Функция FunEΓz.
Назначение: вычисляет коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $e^{\Gamma(z)}$, где $\Gamma(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\ln G(t)}{t-z}dt.$

Прототип: FunEΓz[$a\_,b\_,n\_$].

Параметры:

a, b – функции $a(x), b(x)$ – коэффициенты уравнения (1.1.3),

n – количество коэффициентов.

Возвращаемое значение: коэффициенты разложения функции $e^{\Gamma(z)}$.

Алгоритм: известно, что

$$e^{\Gamma(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{z^j}, \qquad \alpha_0 = 1,$$

где α_j – пока неизвестные коэффициенты, но

$$\left(e^{\Gamma(z)}\right)' = \left(e^{\Gamma(z)}\right)\Gamma'(z),$$

и так как

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\ln G(t)}{t - z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{z^{k+1}}, \quad r_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \ln G(t) dt,$$

то

$$\Gamma'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{z^{k+2}}, \quad d_k = -(k+1) r_k.$$

Следовательно, если воспользоваться формулой Коши перемножения рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right),$$

то получим

$$\frac{1}{z}\sum_{j=1}^{\infty}(-j)\frac{\alpha_j}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{z^j}\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{z^n} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta_n}{z^n}, \quad \delta_n = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j d_{n-j}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, будем иметь

$$\alpha_j = -\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k d_{j-1-k}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Реализация в Mathematica

```
(*================ FunЕГz ================*)
FunЕГz[a_, b_, n_] := Module[{ r, d, α},
   fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
   fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
   d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[k = 0, k ≤ n, k++, d[[k + 1]] = (k + 1) Integrate[(fg[t] t^k), {t, -1, 1}]];
   α = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   α[[1]] = 1;
   For[j = 1, j ≤ n, j++, {r = -N[1/j * Sum[(d[[j - k]] * α[[k + 1]]), {k, 0, j - 1}]],
     α[[j + 1]] = r}];
   Return[α];
  ];
```

Листинг функции, реализующей формулы (1.1.12), (1.1.13) (файл «Fp.nb»)

Функция Fp.

Назначение: вычисляет коэффициенты (1.1.12) $(p_\kappa, p_{\kappa+1}, \dots, \kappa \geq 0)$ или (1.1.13) $(p_{|\kappa|}, p_{|\kappa|+1}, \dots, \kappa < 0)$.

Прототип: Fp[$a\_, b\_, \kappa 1\_, \kappa 2\_, n\_$].

Параметры:

a, b – функции $a(x), b(x)$ – коэффициенты уравнения (1.1.3),

$\kappa 1, \kappa 2$ – частные индексы задачи линейного сопряжения,

n – количество коэффициентов.

Возвращаемое значение: списки

$p_\kappa,\ p_{\kappa+1}, \dots,\ p_{\kappa+n}$ $(\kappa = \kappa 1 + \kappa 2 \geq 0)$ или

$p_{|\kappa|},\ \ p_{|\kappa|+1}, \dots\ p_{|\kappa|+n}$ $(\kappa = \kappa 1 + \kappa 2 < 0)$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== Fp ============*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
  (*========== FunEΓz ============*)
  FunEΓz := Module[{ d, α},
    fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
    fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
    d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    For[k = 0, k ≤ n, k++, d[[k + 1]] = (k + 1) ∫_{-1}^{1} (fg[t] t^k) ⅆt];
    α = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    α[[1]] = 1;
    For[j = 1, j ≤ n, j++,
      {α[[j + 1]] = N[-1/j Sum[(d[[j - k]] α[[k + 1]]), {k, 0, j-1}]]}];
    Return[α];
  ];
  (*=============== Funχ0i0 ===============*)
  Funχ0i0 := Module[{α},
    α = FunEΓz;
    Return[α];
  ];
  (*============== Funχ0iM1 ================*)
  Funχ0iM1 := Module[{ α, mχ},
    α = FunEΓz;
    mχ = 1;
    q = Table[0, {k, 1, n + mχ + 1}];
    q[[1]] = 0;
    q[[mχ + 1]] = 1;
    For[j = 1, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] + α[[j]]];
    Return[q];
  ];
```

```
(*=============== FunχM1i0 ===============*)
FunχM1i0 := Module[{ α, mχ, q, j},
  α = FunEΓz;
  mχ = 1;
  q = Table[0, {j, 1, n + mχ + 1}];
  q[[mχ + 1]] = 1.;
  For[j = 1, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] - α[[j]]];
  Return[q];
 ];
(*================ FunχM1iM1 ===============*)
FunχM1iM1 := Module[{ α, mχ, q, j},
  α = FunEΓz;
  mχ = 2;
  q = Table[0, {j, 1, n + mχ + 1}];
  q[[mχ + 1]] = 1.;
  q[[mχ + 2]] = α[[2]];
  For[j = 2, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] - α[[j - 1]]];
  Return[q];
 ];
(*=============== FunχP1i0 ================*)
FunχP1i0 := Module[{ α, χ, q, k, m},
  α = FunEΓz;
  χ = 1;
  q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
  q[[χ + 1]] = 1.;
  For[k = 1, k ≤ n, k++, q[[χ + k + 1]] = Sum[α[[k - m + 1]], {m, 0, k}]];
  Return[q];
 ];
```

```
(*================ Funχ0iP1 =================*)
Funχ0iP1 := Module[{α, χ, q, k, m},
  α = FunEΓz;
  χ = 1;
  q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
  q[[χ + 1]] = 1.;
  For[k = 1, k ≤ n, k++,
   q[[χ + k + 1]] =
    Sum[If[Mod[m, 2] == 0, α[[k - m + 1]], -α[[k - m + 1]]], {m, 0, k}]];
  Return[q];
 ];
(*================= FunχP1iP1 ================*)
FunχP1iP1 := Module[{α, χ, q, k, m},
  α = FunEΓz;
  χ = 2;
  q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
  q[[χ + 1]] = 1.;
  For[k = 1, k ≤ n, k++,
   q[[χ + k + 1]] = Sum[(If[Mod[m, 2] == 1, 0, 1] α[[k - m + 1]]), {m, 0, k}]];
  Return[q];
 ];
(*================ FunχP1iM1 ================*)
FunχP1iM1 := Module[{α, β, q, k, j},
  α = FunEΓz;
  β = Table[0, {k, 1, n + 1}];
  For[k = 0, k ≤ n, k++, β[[k + 1]] = Sum[(2 α[[k - m + 1]]), {m, 0, k}]];
  q = Table[0, {k, 0, n}];
  q[[1]] = 1.;
  For[j = 1, j ≤ n, j++, q[[j + 1]] = α[[j + 1]] + β[[j]]];
  Return[q];
 ];
```

```
(*================ FunχM1iP1 ===============*)
FunχM1iP1 := Module[{ α, β, k, m, q, j},
   α = FunEΓz;
   β = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[k = 0, k ≤ n, k++,
     β[[k + 1]] = Sum[(If[Mod[m, 2] == 1, -2, 2] α[[k - m + 1]]), {m, 0, k}]];
   q = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   q[[1]] = 1.;
   For[j = 1, j ≤ n, j++, q[[j + 1]] = α[[j + 1]] - β[[j]]];
   Return[q];
  ];
(*================================*)
p = If[And[χ1 == 1, χ2 == 1], FunχP1iP1,
   If[And[χ1 == 0, χ2 == 1], Funχ0iP1,
    If[And[χ1 == 1, χ2 == 0], FunχP1i0,
     If[And[χ1 == 0, χ2 == 0], Funχ0i0,
      If[And[χ1 == -1, χ2 == 0], FunχM1i0,
       If[And[χ1 == 0, χ2 == -1], Funχ0iM1,
        If[And[χ1 == -1, χ2 == -1], FunχM1iM1,
         If[And[χ1 == 1, χ2 == -1], FunχP1iM1,
          If[And[χ1 == -1, χ2 == 1], FunχM1iP1, None]]]]]]]]];
Return[p]
];
```

1.2. Спектральные соотношения

Пусть $\varkappa$ – индекс оператора K^0. В [65] выведены спектральные соотношения для оператора $K^0(x^k;x)$, которые позволили получить эффективные вычислительные схемы приближенного решения уравнения (1.1.3), а именно

$$K^0(x^k;x) = A(x)Z(x)x^k + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)t^k \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0,\dots,\varkappa-1, \quad \varkappa > 0, \\ p_\varkappa x^{k-\varkappa} + p_{\varkappa+1}x^{k-\varkappa-1} + \dots + p_k, & k = \varkappa, \varkappa+1,\dots, \quad \varkappa \ge 0, \\ p_{|\varkappa|}x^{k+|\varkappa|} + p_{|\varkappa|+1}x^{k+|\varkappa|-1} + \dots + p_{|\varkappa|+k}, & k = 0,1,\dots, \quad \varkappa < 0, \end{cases}$$

где коэффициенты $p_\varkappa, p_{\varkappa+1},\dots,$ $p_{|\varkappa|}, p_{|\varkappa|+1},\dots,$ находятся соответственно из разложений канонической функции $X(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ (1.1.12), (1.1.13).

Соотношение демонстрирует тот факт, что степенная функция оператором K^0 преобразуется в многочлен.

В монографии [51] на базе аналогов формул (1.1.1) для оператора K^0, а именно формул вида

$$K^0(T_{k+\varkappa};x) = \alpha_0^{(k)}U_0(x) + \alpha_1^{(k)}U_1(x) + \dots + \alpha_k^{(k)}U_k(x), \quad k \ge 0, \quad \varkappa \ge 0,$$
$$K^0(U_{k+\varkappa};x) = \rho_0^{(k)}U_0(x) + \rho_1^{(k)}U_1(x) + \dots + \rho_k^{(k)}U_k(x), \quad k \ge 0, \quad \varkappa \ge 0,$$
$$K^0(T_{k+\varkappa};x) = \gamma_0^{(k)}T_0(x) + \gamma_1^{(k)}T_1(x) + \dots + \gamma_k^{(k)}T_k(x), \quad k \ge 0, \quad \varkappa \ge 0,$$
$$K^0(U_{k+\varkappa};x) = \eta_0^{(k)}T_0(x) + \eta_1^{(k)}T_1(x) + \dots + \eta_k^{(k)}T_k(x), \quad k \ge 0, \quad \varkappa \ge 0,$$
$$K^0(T_{k-|\varkappa|};x) = \delta_0^{(k)}U_0(x) + \delta_1^{(k)}U_1(x) + \dots + \delta_k^{(k)}U_k(x), \quad k \ge |\varkappa|, \quad \varkappa < 0,$$
$$K^0(U_{k-|\varkappa|};x) = \sigma_0^{(k)}U_0(x) + \sigma_1^{(k)}U_1(x) + \dots + \sigma_k^{(k)}U_k(x), \quad k \ge |\varkappa|, \quad \varkappa < 0,$$
$$K^0(U_{k-|\varkappa|};x) = \beta_0^{(k)}T_0(x) + \beta_1^{(k)}T_1(x) + \dots + \beta_k^{(k)}T_k(x), \quad k \ge |\varkappa|, \quad \varkappa < 0,$$
$$K^0(T_{k-|\varkappa|};x) = \mu_0^{(k)}T_0(x) + \mu_1^{(k)}T_1(x) + \dots + \mu_k^{(k)}T_k(x), \quad k \ge |\varkappa|, \quad \varkappa < 0,$$

построены вычислительные схемы с неотрицательным и отрицательным индексами для уравнения (1.1.3). Там же дано обоснование схем с указанием оценки порядка погрешности приближенного решения. В данной работе рассмотрим реализации этих схем в Mathematica.

1.3. О рекуррентных соотношениях Кленшоу

Имеется простой способ вычисления выражений вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x),$$

не прибегая к вычислению значений функции $T_k(x)$. Такой способ был предложен Кленшоу в 1955 г., а его реализация описана, например, в [20] или [10]. Приведем ее.

1. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x). \tag{1.3.1}$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k - 2xb_{k+1} + b_{k+2} = a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$.

Подстановка в формулу (1.3.1) выражения для a_k дает

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (b_k - 2xb_{k+1} + b_{k+2})\, T_k(x) + (b_{n-1} - 2xb_n)\, T_{n-1}(x) + b_n T_n(x).$$

Имеют место формулы [28]:

$$\begin{aligned}
&T_{n+1}(x) - 2x\, T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,\\
&T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x,\\
&U_{n+1}(x) - 2x\, U_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,\\
&U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x, \qquad n = 1, 2, \dots.
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

В силу формулы (1.3.2) все коэффициенты при b_k равны нулю, за исключением b_0 и b_1.

Таким образом,

$$f(x) = (b_0 - 2xb_1)T_0(x) + b_1 T_1(x)$$

или окончательно

$$f(x) = b_0 - xb_1.$$

По аналогии с данным алгоритмом, используя формулы [28]

$$\begin{aligned}
&2T_n(x)\, T_m(x) = T_{m-n}(x) + T_{m+n}(x),\\
&2T_n(x)\, U_m(x) = U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x),\\
&T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1, \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x,\\
&U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \qquad U_3(x) = 8x^3 - 4x,
\end{aligned}$$

можно получить следующие схемы.

2. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_{2k}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2(2x^2 - 1)b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$.

Тогда $$f(x) = b_0 T_0(x) + b_1 T_2(x) - 2(2x^2 - 1)b_1 T_0(x)$$

или

$$f(x) = b_0 - (2x^2 - 1)b_1.$$

3. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_{2k+1}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2x^2 - 1)\,b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$.

Тогда $f(x) = b_0 T_1(x) + b_1 T_3(x) - 2(2x^2 - 1)b_1 T_1(x)$

или

$$f(x) = x(b_0 - b_1).$$

4. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k U_k(x). \tag{1.3.3}$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k - 2xb_{k+1} + b_{k+2} = a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$.

Тогда $f(x) = (b_0 - 2xb_1)U_0(x) + b_1 U_1(x)$ или окончательно

$$f(x) = b_0.$$

5. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k U_{2k}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2x^2 - 1)\,b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$.

Тогда

$$f(x)=b_0U_0(x)+b_1U_2(x)-2(2x^2-1)b_1U_0(x)$$

или

$$f(x) = b_0 + b_1.$$

6. Пусть необходимо вычислить

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k U_{2k+1}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2\,(2x^2-1)b_{k+1}-b_{k+2}+a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$.

Тогда

$$f(x)=b_0U_1(x)+b_1U_3(x)-2(2x^2-1)b_1U_1(x)$$

или

$$f(x) = 2x\,b_0.$$

Листинг функции, реализующей формулу (1.3.1) (файл «TClenchaw.nb»)

Функция TClenchaw .

Назначение: вычисляет значение функции $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$ по формуле (1.3.1).

Прототип: TClenchaw[a_,x_].

Параметры:

a – коэффициенты многочлена a_k, $k=\overline{0,n}$,

x – значение внешней точки x.

Возвращаемое значение: значение функции $f(x)$ по формуле (1.3.1).

Реализация в Mathematica

```
(*============ TClenshaw ===========*)
TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
  na = Length[a];
  b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
  For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
   b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
  y = b[[1]] - x b[[2]];
  Return[y]
 ]
```

Листинг функции, реализующей формулу (1.3.3) (файл «UClenchaw.nb»)

Функция UClenchaw.

Назначение: вычисляет значение функции $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k U_k(x)$ по формуле (1.3.3).

Прототип: UClenchaw[a_,x_].

Параметры:

a – коэффициенты многочлена a_k, $k=\overline{0,n}$,

x – значение внешней точки.

Возвращаемое значение: значение функции $u_n(x)$ по формуле (1.3.3).

Реализация в Mathematica

```
(*============ UClenshaw ===========*)
UClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
  na = Length[a];
  b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
  For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
   b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
  y = b[[1]];
  Return[y]
 ]
```

Глава 2. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2.1. Основные сведения из теории СИУ

2.1.1. Характеристическое уравнение

Если искомое решение (1.1.2) $\phi(x)=\dfrac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}$ принадлежит классам $h(0),\ h(1),\ h(-1)$ и индекс κ характеристического оператора (1.1.4) K^0 или, что то же самое, задачи (1.1.5) неотрицателен, то решение характеристического уравнения

$$K^0(u(x);\,x)=f(x),\quad -1<x<1, \tag{2.1.1}$$

дается формулой [24], [16]:

$$u(x)=\frac{a(x)}{Z(x)}f(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t-x}+\gamma_0+\cdots+\gamma_{\kappa-1}x^{\kappa-1}, \tag{2.1.2}$$

где $\gamma_0,\ldots,\gamma_{\kappa-1}$ – произвольные комплексные числа.

Эти числа $(\kappa>0)$ однозначно определяются, если к уравнению (2.1.1) присоединить условия

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)t^{j-1}dt=\alpha_j,\qquad j=1,\ldots,\kappa, \tag{2.1.3}$$

где α_j – наперед заданные числа.

Если же решение уравнения (2.1.1) ищется в классах $h(-1,1), h(1), h(-1)$ и $\kappa<0$, тогда при выполнении условий (необходимых и достаточных)

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)t^{q-1}dt=0,\qquad q=1,\ldots,|\kappa|,$$

решение $u(x)$ определяется формулой (2.1.2) с $\gamma_k\equiv 0,\ k=0,1,\ldots$.

2.1.2. Полное уравнение

Уравнение (1.1.1), записанное в форме (1.1.3),

$$K^0(u(x);\,x)+k(u(x);\,x)=f(x),\ -1<x<1,$$

в классах $h(0), h(1), h(-1)$, когда индекс κ характеристического оператора неотрицателен, эквивалентно (в смысле разрешимости) интегральному уравнению Фредгольма

$$u(x)+\int_{-1}^{1}N(x,\,t)\,u(t)dt=F(x),\quad -1<x<1, \tag{2.1.4}$$

в котором

$$N(x,t)=\frac{1}{\pi i}\frac{Z(t)}{Z(x)(a^2(t)-b^2(t))}\left[a(x)k(x,t)-\frac{Z(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}\right],$$

$$F(x)=\frac{a(x)}{Z(x)}f(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t-x}+P_{\kappa-1}(x),$$

$$P_{\kappa-1}(x)=\gamma_0+\dots+\gamma_{\kappa-1}x^{\kappa-1}.$$

Если однородное уравнение (2.1.4) ($F(x)\equiv 0$) неразрешимо (имеет только нулевое решение), то решение неоднородного уравнения (2.1.4) дается формулой

$$u(x)=F(x)-\int_{-1}^{1}\Gamma(x,t)F(t)dt,$$

где $\Gamma(x,t)$ – резольвента ядра $N(x,t)$.

Справедлива теорема, которую дает М. А. Шешко [65].

Теорема 2.1.1. *Пусть искомое решение* $\phi(x)$ *уравнения* (1) *принадлежит классу* $h(0)$*, индекс* κ *характеристического оператора* K^0*, определяемого* (4), *больше нуля, однородное уравнение* (20) *неразрешимо. Тогда задача*

$$\begin{gathered}K^0(u(x);\,x)+k(u(x);\,x)=f(x),\quad -1<x<1,\\ \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,u(t)\,t^{j-1}dt=\alpha_j,\qquad j=1,2,\dots,\kappa,\end{gathered} \tag{2.1.5}$$

имеет единственное решение.

Если решение $\phi(x)$ уравнения (1.1.1) принадлежит классам $h(0), h(1), h(-1)$ и $\kappa<0$, то уравнение (1.1.1), записанное в форме (1.1.3), эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма

$$u^*(x)+\int_{-1}^{1}N^*(x,\,t)\,u^*(t)dt=F^*(x),\quad -1<x<1,$$

в котором

$$N^{*}(x,t)=\frac{1}{\pi i}\frac{1}{a^{2}(t)-b^{2}(t)}\left[a(x)k(x,t)-\frac{Z(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}\right],$$

$$F^{*}(x)=a(x)f(x)-\frac{Z(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$u^{*}(x)=Z(x)u(x),$$

с присоединенными к нему уравнениями (условиями разрешимости)

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)t^{j-1}dt=\frac{1}{(\pi i)^{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}\frac{Z(\tau)}{a^{2}(\tau)-b^{2}(\tau)}k(t,\tau)\,u(\tau)t^{j-1}d\tau dt,$$
$$j=1,2,\ldots,|\kappa|.$$

2.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

2.2.1. Предварительные сведения

Для указания разложения характеристического оператора (1.1.4) по многочленам Чебышева первого или второго рода приведем некоторые вспомогательные сведения.

Известно, что

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_k^{(n)} x^{n-2k},$$

$$a_0^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2^{n-1}, & n > 0, \end{cases} \qquad a_{k+1}^{(n)} = -\frac{(n-2k-1)(n-2k)}{4(k+1)(n-k-1)} a_k^{(n)},$$

$$k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-2}{2}\right], \tag{2.2.1}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_k^{(n)} x^{n-2k},$$

$$b_0^{(n)} = 2^n, \qquad b_k^{(n)} = -\frac{(n+1-2k)(n+2-2k)}{4k(n+1-k)} b_{k-1}^{(n)},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2.2.2}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.1)
(файл «akn.nb»)

Функция akn.

Назначение: вычисляет коэффициенты многочлена $T_n(x)$ по формуле (2.2.1).

Прототип: akn[n_].

Параметры:

n – степень многочлена $T_n(x)$.

Возвращаемое значение: коэффициенты a_k, $k = \overline{0, n}$, вычисляемые по формуле (2.2.1).

Реализация в Mathematica

```
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
  If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
  a = Table[0., {k, 0, Floor[n/2]}];
  a[[1]] = 2.^(n-1);
  For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
   mm = n - 1. - 2 k;
   a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
  Return[a]
  ];
```

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.2) (файл «bkn.nb»)

Функция bkn.

Назначение: вычисляет коэффициенты многочлена $U_n(x)$ по формуле (2.2.2).

Прототип: bkn[n_].

Параметры:

n – степень многочлена $U_n(x)$.

Возвращаемое значение: коэффициенты b_k, $k = \overline{0, n}$, вычисляемые по формуле (2.2.2).

Реализация в Mathematica

```
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]
  ];
```

Приведем леммы, доказанные в [51].

Лемма 2.2.1. *В окрестности бесконечно удаленной точки имеет место представление*

$$\frac{T_M(z)}{\sqrt{z^2-1}} = U_{M-1}(z) + R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right), \quad M \geq 0,$$

где

$$R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^{(M)}}{z^k}, \in$$

$$q_1^{(M)} = \begin{cases} 1, & M = 0, \\ 0, & M \neq 0, \end{cases} \qquad q_2^{(M)} = \begin{cases} 0{,}5, & M = 1, \\ 0, & M \neq 1, \end{cases}$$

$$q_3^{(M)} = \begin{cases} 0{,}5, & M = 0, \\ 0, & M = 1, \\ 0{,}25, & M = 2, \\ 0, & M > 2, \end{cases}$$

$$q_{2l-1+\delta_M}^{(M)} = 0, \qquad q_{2l-\delta_M}^{(M)} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} a_{\left[\frac{M}{2}\right]-m}^{(M)} \varepsilon_{l+m-\delta_M}, \qquad l = 2, 3, \ldots, \qquad (2.2.3)$$

$$\delta_M = (M+1) \bmod 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{z^{2k+1}}, \qquad |z|>1,$$
$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\varepsilon_k, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{2.2.4}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.4) (файл «epsk.nb»)

Функция εk.

Назначение: вычисляет коэффициенты разложения функции $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ по формуле (2.2.4).

Прототип: εk[n_].

Параметры:

n – количество коэффициентов.

Возвращаемое значение: коэффициенты $\varepsilon_k, k=\overline{0,n}$, вычисляемые по формуле (2.2.4).

Реализация в Mathematica

```
εk[n_] := Module[{ϵ, k},
   ϵ = Table[1., {k, 0, n}];
   For[k = 0, k < n, k++,
    ϵ[[k + 2]] = ϵ[[k + 1]] (2 k + 1.)/(2 k + 2.)];
   Return[ϵ]
  ];
```

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.3) (файл «qkM.nb»)

Функция qkM.

Назначение: вычисляет коэффициенты $q_k^{(M)}, k=\overline{1,3}$ разложения (2.2.3) по формуле (2.2.3).

Прототип: qkM[n_,M_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

M – степень многочлена $T_M(x)$.

Возвращаемое значение: коэффициенты $q_k^{(M)}$, $k = \overline{1, n}$, вычисляемые по формуле (2.2.3).

Реализация в Mathematica

```
(*========== qkM ===========*)
qkM[nn_, MM_] :=
  Module[{a, ep, q, M2, δM, δN, n2, l, m},
   δN = Mod[nn, 2];
   q = Table[0, {k, 1, nn + δN}];
   δM = Mod[MM + 1, 2];
   M2 = Floor[MM/2];
   n2 = Floor[(nn + δN)/2];
   a = akn[MM];
   ep = ϵk[nn + MM];
   For[l = 1, l ≤ n2, l++, q[[2 l - 1 + δM]] = 0;
    q[[2 l - δM]] =
     Sum[(a[[M2 - m + 1]] ep[[l + m + 1 - δM]]), {m, 0, M2}]];
   q[[1]] = If[MM == 0, 1, 0];
   q[[2]] = If[MM == 1, 0.5, 0];
   q[[3]] = If[MM == 0, 0.5, If[MM == 2, 0.25, 0]];
   Return[q];
  ];
```

Лемма 2.2.2. *В окрестности бесконечно удаленной точки имеет место представление*

$$\sqrt{z^2-1}\,U_{M-1}(z)=T_M(z)+R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right),\quad M>0,$$

$$R_\infty^{(M)}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{(M)}}{z^k},\tag{2.2.5}$$

где

$$d_1^{(M)}=\begin{cases}-0{,}5, & M=1,\\ 0, & M\ne 1,\end{cases}\quad d_2^{(M)}=\begin{cases}-0{,}25, & M=2,\\ 0, & M\ne 1,\end{cases}$$

$$d_3^{(M)}=\begin{cases}-0{,}125, & M=1,\\ -0{,}125, & M=3,\\ 0, & M\ne 1, M\ne 3,\end{cases}$$

$$d_{2l-1+\delta_M}^{(M)}=0,$$

$$d_{2l-\delta_M}^{(M)}=-\sum_{m=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]}b_{\left[\frac{M-1}{2}\right]-m}^{(M-1)}e_{l+m-\delta_M},\quad l=1,2,\ldots,$$

$$\delta_M=M\operatorname{mod}2,\tag{2.2.6}$$

$$\sqrt{z^2-1}=z-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k}{z^{2k+1}},\qquad |z|>1,$$

$$e_0=0{,}5,\qquad e_{k+1}=\frac{2k+1}{2k+4}e_k,\qquad k=0,1,\ldots.\tag{2.2.7}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.7) (файл «ek.nb»)

Функция ek.

Назначение: вычисляет коэффициенты разложения функции $\sqrt{z^2-1}$ по формуле (2.2.7).

Прототип: ek[n_].

Параметры:

n – количество коэффициентов.

Возвращаемое значение: коэффициенты e_k, $k=\overline{0,n}$, вычисляемые по формуле (2.2.7).

Реализация в Mathematica

```
ek[n_] := Module[{e, k},
  e = Table[0.5, {k, 0, n + 1}];
  For[k = 0, k < n + 1, k++,
   e[[k + 2]] = e[[k + 1]] (2 k + 1.)/(2 k + 4.)];
  Return[e]
  ];
```

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.6)
(файл «dkM.nb»)

Функция dkM.

Назначение: вычисляет коэффициенты $d_k^{(M)}$, $k=\overline{1,n}$, разложения (2.2.5) по формуле (2.2.6).

Прототип: dkM[n_,M_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

M – степень многочлена $T_M(x)$.

Возвращаемое значение: коэффициенты $d_k^{(M)}$, $k=\overline{1,n}$, вычисляемые по формуле (2.2.6).

Реализация в Mathematica

```
dkM[nn_, MM_] :=
  Module[{b, ee, d, M2, δN, δM, n2, m, l},
   δN = Mod[nn, 2];
   d = Table[0, {k, 1, nn + δN}];
   δM = Mod[MM, 2];
   M2 = Floor[(MM - 1)/2];
   n2 = Floor[(nn + δN)/2];
   b = bkn[MM - 1];
   ee = ek[nn + MM];
   For[l = 1, l ≤ n2, l++, d[[2 l + δM - 1]] = 0;
    d[[2 l - δM]] =
     -Sum[(b[[M2 - m + 1]] ee[[l + m + 1 - δM]]), {m, 0, M2}]];
   d[[1]] = If[MM == 1, -0.5, 0];
   Print["d=", d];
   Return[d];
  ];
```

Приведем еще некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.2.3. *Для любого многочлена степени* $M \geq 0$ *справедливо*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}A(t)Z(t)P_M(t)dt = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}X(z)P_M(z)\right), \qquad (2.2.8)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)P_M(t)dt = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}(X(z)P_M(z)), \qquad (2.2.9)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,A(t)Z(t)P_M(t)dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\sqrt{z^2-1}\,X(z)P_M(z)\right). \qquad (2.2.10)$$

Доказательство. На основании теории вычетов имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-1}}X(\zeta)P_M(\zeta)d\zeta=\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}X(z)P_M(z)\right),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}X(\zeta)P_M(\zeta)d\zeta=\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}(X(z)P_M(z)),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\sqrt{\zeta^2-1}X(\zeta)P_M(\zeta)d\zeta=\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\left(\sqrt{z^2-1}X(z)P_M(z)\right),$$

где Λ – замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,1]$, с положительным направлением по движению часовой стрелки.

Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,1]$ и учитывая легко проверяемые соотношения

$$X^+(x)+X^-(x)=2A(x)Z(x),$$

$$X^+(x)-X^-(x)=-2B(x)Z(x),\quad -1<x<1,$$

от данных равенств приходим к равенствам (2.2.8)–(2.2.10).

2.2.2. Спектральные соотношения

Пусть, как и ранее, имеет место (1.1.4):

$$K^0(u(x);x)=A(x)Z(x)\,u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}.$$

Приведем полученные в [51] теоремы о разложении оператора K^0 по многочленам Чебышева, коэффициенты которых вычисляются согласно (2.2.1), (2.2.2). В теоремах будем использовать переменные $q_r^{(M)}$, $d_r^{(N)}, r\geq 1$ из лемм 2.2.1, 2.2.2, а также переменные, определенные в (1.1.12), (1.1.13).

Теорема 2.2.1. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0\ \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa\geq 0$ *одного из классов:* $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедлива формула*

$$A(x)Z(x)T_{k+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)T_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\alpha_0^{(k)}U_0(x)+\alpha_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\alpha_k^{(k)}U_k(x),\quad k\geq 0,\qquad (2.2.11)$$

где

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & j = k = 0, \kappa = 0, \\ 0{,}5, & j = k \neq 0, \kappa = 0, \\ p_{\kappa+1}, & j = k-1, \kappa = 0, \\ 1, & j = k, \kappa = 1, \\ 2H_{k-j-1} + d_1^{(k-j-1)}, & k - j - 2 \geq 0, \kappa = 0, \\ 2H_{k+\kappa-j-1}, & k + \kappa - j - 2 \geq 0, \kappa > 0, \end{cases} \quad j = \overline{0, k}, \tag{2.2.12}$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M+(1-\kappa)\delta_\kappa}{2}\right]} a_r^{(M)} p_{M+1-2r},$$

$$\delta_\kappa = \begin{cases} 0, & \kappa = 0, \\ 1, & \kappa \geq 1, \end{cases} \quad M \geq \delta_\kappa(\kappa - 1).$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.12) (файл «jkalpha.nb»)

Функция αjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\alpha_j^{(k)}$ разложения (2.2.11) по формуле (2.2.12).

Прототип: αjk[j_, k_, κ_, p_].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, k+\kappa$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\alpha_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}],
    a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    a[[1]] = 2.^(n-1);
    For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
     mm = n - 1. - 2 k;
     a[[k + 2]] = - (mm * (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
    Return[a]]];
(*================ Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, h, r},
   a = akn[M];
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
   h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
   Return[2 h];];
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
   If[And[j == k, k == 0, χ == 0] || And[j == k, χ == 1], α = 1.,
    If[And[j == k, k ≠ 0, χ == 0], α = 0.5,
     If[And[j == k - 1, χ == 0], α = p[[χ + 2]],
      If[And[k - j ≥ 2, χ == 0],
       α = Hα[k - j - 1, χ, p] + If[k - j - 1 == 1, -0.5, 0],
       α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]]]]];
   Return[α]
  ];
```

Теорема 2.2.2. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa\geq 0$ *одного из классов:* $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедлива формула*

$$A(x)Z(x)U_{k+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)U_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\rho_0^{(k)}U_0(x)+\ldots+\rho_k^{(k)}U_k(x),\quad k\geq 0, \tag{2.2.13}$$

где

$$\rho_j^{(k)}=\begin{cases}2H_{k+\kappa-j}, & \kappa>0,\\ 2H_{k-j}+q_1^{(k-j)}, & \kappa=0,\end{cases}\qquad j=\overline{0,k}, \tag{2.2.14}$$

$$H_M=\begin{cases}\displaystyle\sum_{r=0}^{\left[\frac{(M-1+(1-\kappa)\delta_\kappa)}{2}\right]} b_r^{(M-1)}p_{M-2r}, & M>0,\\ 0, & M=0,\end{cases}$$

$$\delta_\kappa=\begin{cases}0, & \kappa=0,\\ 1, & \kappa\geq 1.\end{cases}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.14) (файл «jkrho.nb»)

Функция ρjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\rho_j^{(k)}$ разложения (2.2.13) по формуле (2.2.14).

Прототип: ρjk[j_, k_, κ_, p_].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j=\kappa,\kappa+1,\ldots,k+\kappa$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\rho_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - mm (mm + 1)/(4. k (mm + k)) * b[[k]]];
   Return[b]];
(*============ Hρ ================*)
Hρ[M_, χ_, p_] := Module[{δ, b, M2, r, h},
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1 + (1 - χ) δ)/2];
   h = If[M == 0, 0, Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}]];
   Return[2 h];];
(*============ ρjk ================*)
ρjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{ρ},
   If[χ == 0, ρ = Hρ[k - j, χ, p] + If[k - j == 0, 1., 0],
    ρ  = Hρ[k + χ - j, χ, p]];
   Return[ρ]
  ];
```

Теорема 2.2.3. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa\geq 0$ *одного из классов:* $h(0), h(-1), h(1)$ *при* $-0{,}5<\alpha, \ -0{,}5<\beta$.

Тогда для $x \in (-1,1)$ *справедливы формулы*

$$A(x)Z(x)T_{k+\kappa}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \gamma_0^{(k)}T_0(x) + \cdots + \gamma_k^{(k)}T_k(x), \quad k \ge 0, \tag{2.2.15}$$

где

$$h_j\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0,5(q_1^{(k-j)} + q_1^{(k+j)}) + H_{k-j}, & \kappa = 0, \\ H_{k+\kappa-j}, & \kappa > 0, \end{cases} \tag{2.2.16}$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5, & j \ne 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0,k},$$

$$H_M = \begin{cases} 0, & M = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{M-1+(1-\kappa)\delta_\kappa}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M-2r}, & M > 0, \end{cases}$$

$$\delta_\kappa = \begin{cases} 0, & \kappa = 0, \\ 1, & \kappa \ge 1. \end{cases}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.16) (файл «jkgamma.nb»)

Функция γjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\gamma_j^{(k)}$ разложения (2.2.15) по формуле (2.2.16).

Прототип: γjk[$j\_, k\_, \kappa\_, p\_$].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, k+\kappa$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\gamma_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{b, mm},
    If[n == 0 , Return[{1.}]];
    b = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
    b[[1]] = 2.^n;
    For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
     mm = n + 1. - 2 k;
     b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) * b[[k]]];
    Return[b]];
(*============ Hϒ ================*)
Hϒ[M_, χ_, p_] := Module[{b, M2, h, δ, r},
    δ = If[χ == 0, 0, 1];
    b = bkn[M - 1];
    M2 = Floor[(M - 1 + (1 - χ) δ)/2];
    h = If[M == 0, 0, Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}]];
    Return[h];];
(*============ ϒjk ================*)
ϒjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{ϒ},
    hj := If[j == 0, 1, 2];
    q1[M_] := If[M == 0, 1., 0];
    If[χ == 0, ϒ = hj (0.5 (q1[k - j] + q1[k + j]) + Hϒ[k - j, χ, p]),
     ϒ = hj Hϒ[k + χ - j, χ, p]];
    Return[ϒ]
   ];
```

Теорема 2.2.4. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\text{к}\geq 0$ *одного из классов:* $h(0), h(-1), h(1)$ *при* $-0{,}5<\alpha,\ -0{,}5<\beta$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедливы формулы.*

$$A(x)Z(x)U_{k+\text{к}}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)U_{k+\text{к}}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\eta_0^{(k)}T_0(x)+\cdots+\eta_k^{(k)}T_k(x),\quad k\geq 0, \tag{2.2.17}$$

где

$$h_j\eta_j^{(k)}=\sum_{l=0}^{[\frac{k-j}{2}]}r_l^{(k+\text{к}-j+1)}p_{k+\text{к}-j-2l}, \tag{2.2.18}$$

$$h_j=\begin{cases}0{,}5, & j\neq 0,\\ 1, & j=0,\end{cases}\quad j=\overline{0,k},$$

$$r_l^{(M)}=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{l}a_m^{(M)}, & l<[\dfrac{M}{2}],\\[2ex] 1, & l\geq[\dfrac{M}{2}].\end{cases}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.18) (файл «jketa.nb»)

Функция ηjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\eta_j^{(k)}$ разложения (2.2.17) по формуле (2.2.18).

Прототип: ηjk[$j\_, k\_, \text{к}\_, p\_$].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j=\text{к},\text{к}+1,\ldots,k+\text{к}$,

к – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\eta_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*============ frη ================*)
frη[l_, M_] := Module[{a, r, m},
   If[l ≥ Floor[M/2], Return[{1.}]];
   a = akn[M];
   r = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
   Return[r]];
(*============ ηjk ================*)
ηjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{η, hj, l},
   hj = If[j == 0, 1, 2];
   η = hj (Sum[(frη[l, k + χ - j + 1] p[[k + χ - j - 2 l + 1]]), {l, 0, Floor[(k-j)/2]}]);
   Return[η]
  ];
```

Теорема 2.2.5. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa<0$ *класса* $h(-1,1)$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедливы формулы*

$$A(x)Z(x)U_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\frac{U_{k-|\kappa|}(t)}{t-x}dt=$$
$$=\sigma_0^{(k)}U_0(x)+\sigma_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\sigma_k^{(k)}U_k(x),\quad k\geq|\kappa|, \qquad (2.2.19)$$

где

$$\sigma_j^{(k)}=-G_{k-|\kappa|+j+2}+\begin{cases} G_0, & j=k-|\kappa|,\\ G_{j-k+|\kappa|}, & j>k-|\kappa|,\\ 2H_{k-|\kappa|-j}+G_{k-|\kappa|-j}, & j<k-|\kappa|,\end{cases}\quad j=\overline{0,k}, \qquad (2.2.20)$$

$$H_M=\sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]}b_r^{(M-1)}p_{M+2|\kappa|-2r},\quad M>0,$$

$$G_M=\sum_{r=1}^{|\kappa|+1}q_r^{(M)}p_{2|\kappa|-r+1}.$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.20) (файл «jksigma.nb»)

Функция σjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\sigma_j^{(k)}$ разложения (2.2.19) по формуле (2.2.20).

Прототип: σjk[j_, k_, κ_, p_].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.13): p_j, $j=|\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, k+|\kappa|$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\sigma_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++, mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
(*============ Gσ ================*)
Gσ[M_, χ_, p_] := Module[{q, GM},
   q = Table[0, {k, 1, 3}];
   q[[1]] = If[M == 0, 1., 0];
   q[[2]] = If[M == 1, 0.5, 0];
   q[[3]] = IF[M == 0, 0.5, If[M == 2, 0.25, 0]];
   GM = Sum[(q[[r]] p[[-2 χ - r + 2]]), {r, 1, -χ+1}];
   Return[GM];
  ];
(*============ Hσ ================*)
Hσ[M_, χ_, p_] := Module[{b, M2, Hz, r},
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1)/2];
   Hz = Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}];
   Return[Hz]
  ];
```

```
(*============ σjk ================*)
σjk[j_, k_, ϰ_, p_] := Module[{σ},
   σ = -Gσ[k + ϰ + j + 2, ϰ, p];
   σ = If[j - ϰ < k,
     σ + Gσ[k + ϰ - j, ϰ, p] + 2 Hσ[k + ϰ - j, ϰ, p],
     If[k == j - ϰ, σ + Gσ[0, ϰ, p],
      σ + Gσ[-k - ϰ + j, ϰ, p]]];
   Return[σ]
  ];
```

Теорема 2.2.6. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa<0$ *класса* $h(-1,1)$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедливы формулы*

$$A(x)Z(x)T_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)T_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\delta_0^{(k)}U_0(x)+\cdots+\delta_k^{(k)}U_k(x),\quad k\geq|\kappa|, \tag{2.2.21}$$

где

$$\delta_j^{(k)}=-G_{k-|\kappa|+j+1}+$$

$$+\begin{cases} G_{k-|\kappa|-j-1}+2H_{k-|\kappa|-j-1}, & k-j>|\kappa|+1, \\ H_0, & k-j=|\kappa|+1, \\ -G_{j+|\kappa|+1-k}, & k-j\leq|\kappa|, \end{cases}\quad j=\overline{0,k}, \tag{2.2.22}$$

$$H_M=\sum_{r=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]}a_r^{(M)}p_{M+2|\kappa|+1-2r},$$

$$G_M=\sum_{r=1}^{|\kappa|+1}d_r^{(M)}p_{2|\kappa|-r+1}.$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.22) (файл «jkdelta.nb»)

Функция δjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\delta_j^{(k)}$ разложения (2.2.21) по формуле (2.2.22).

Прототип: $\delta jk[j\_, k\_, \kappa\_, p\_]$.

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.13): $p_j,\ j = |\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, k+|\kappa|$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\delta_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}],
    a = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
    a[[1]] = 2.^(n-1);
    For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
     mm = n - 1. - 2 k;
     a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
    Return[a]]
   ];
```

```
-
(*============ Hδ =================*)
Hδ[M_, χ_, p_] := Module[{a, M2, HM, r},
    a = akn[M];
    M2 = Floor[M/2];
    HM = Sum[(a[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 2]]), {r, 0, M2}];
    Return[HM]];
(*============ Gδ =================*)
Gδ[M_, χ_, p_] := Module[{d, r, GM},
    d = Table[0, {k, 1, 3}];
    d[[1]] = If[M == 1, -0.5, 0];
    d[[2]] = If[M == 2, -0.25, 0];
    d[[3]] = If[Or[M == 1, M == 3], -0.125, 0];
    GM = Sum[(d[[r]] p[[-2 χ - r + 2]]), {r, 1, -χ + 1}];
    Return[GM]];
(*============ δjk ================*)
δjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{δ, t1, t2},
    t1 = -Gδ[k + χ + j + 1, χ, p];
    If[j == k + χ - 1, t2 = Hδ[0, χ, p],
     If[j < k + χ - 1,
      t2 = 2 Hδ[k + χ - j - 1, χ, p] + Gδ[k + χ - j - 1, χ, p],
      t2 = -Gδ[j - k - χ + 1, χ, p]]];
    δ = t1 + t2;
    Return[δ]
   ];
```

Теорема 2.2.7. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0$ $\forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa<0$ *класса* $h(-1,1)$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедливы формулы*

$$A(x)Z(x)U_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)U_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\beta_0^{(k)}T_0(x)+\beta_1^{(k)}T_1(x)+\ldots+\beta_k^{(k)}T_k(x),\quad k\geq|\kappa|, \tag{2.2.23}$$

где

$$\frac{\beta_j^{(k)}}{h_j}=\begin{cases}0{,}5, & j=k,\ \kappa=-1,\\ G_{k-j}, & j<k,\ \kappa=-1,\\ H_{k-1+j}+H_{k-1-j}+G_{k-1-j}, & j<k-1,\ \kappa=-2,\\ 0{,}5\,p_{|\kappa|+1}, & j=k-1,\ \kappa=-2,\\ H_{k-1+j}+0{,}25, & j=k,\ \kappa=-2,\end{cases} \tag{2.2.24}$$

$$h_j=\begin{cases}2, & j\neq 0,\\ 1, & j=0,\end{cases}\quad j=\overline{0,k},$$

$$H_M=\begin{cases}-0{,}25 & \kappa=-2,\ M=1,\\ 0, & \kappa=-2,\ M\neq 1,\\ 0, & \kappa=-1,\end{cases}$$

$$G_M=\sum_{l=0}^{\left[\frac{M+|\kappa|-1}{2}\right]}p_{M+2|\kappa|-1-2l}\,r_l^{(M)},$$

$$r_l^{(M)}=\begin{cases}\sum_{m=0}^{l}a_m^{(M)}, & l<\left[\dfrac{M}{2}\right],\\ 1 & l\geq\left[\dfrac{M}{2}\right].\end{cases}$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.24) (файл «jkbeta.nb»)

Функция βjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\beta_j^{(k)}$ разложения (2.2.23) по формуле (2.2.24).

Прототип: βjk[j_, k_, κ_, p_].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.13): p_j, $j = |\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, k+|\kappa|$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\beta_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
   a = akn[M];
   rez = If[l ≥ Floor[M/2], 1, Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}]];
   Return[rez]];
```

```
(*============ Gβ ================*)
Gβ[M_, ϰ_, p_] :=
  Sum[(rβ[l, M] p[[M + 2 Abs[ϰ] - 2 l]]), {l, 0, Floor[(M + Abs[ϰ] - 1)/2]}];
(*============ Hβ ================*)
Hβ[M_, ϰ_, p_] := Module[{d, HM},
   d = If[M == 1, -0.5, 0];
   HM = If[ϰ == -1, 0, 0.5 (p[[Abs[ϰ] + 1]] d)];
   Return[HM]
  ];
(*============ βjk ================*)
βjk[j_, k_, ϰ_, p_] := Module[{β},
  hj = If[j == 0, 1, 2];
  If[And[j == k, ϰ == -1], β = 1,
   If[And[k ≥ j + 1, ϰ == -1], β = Gβ[k - j, ϰ, p],
    If[And[j < k - 1, ϰ = -2],
     β = Hβ[k - 1 + j, ϰ, p] + Hβ[k - 1 - j, ϰ, p] + Gβ[k - 1 - j, ϰ, p],
     If[And[j == k - 1, ϰ = -2],
      β = Hβ[k - 1 + j, ϰ, p] + 0.5 Gβ[0, ϰ, p],
      β = Hβ[k - 1 + j, ϰ, p] - Hβ[1 - k + j, ϰ, p]] ]]
  ];
  Return[β hj]
 ]
```

Теорема 2.2.8. *Пусть на* $[-1,1]$ *заданы две комплекснозначные функции* $a(x)$ *и* $b(x)$, *непрерывные по Гельдеру, причем* $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1]$. *Пусть далее* $X(z)$ *– каноническая функция задачи линейного сопряжения* (1.1.5) *с индексом* $\kappa<0$ *класса* $h(-1,1)$.

Тогда для $x\in(-1,1)$ *справедливы формулы*

$$A(x)Z(x)T_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)T_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x}=$$

$$=\mu_0^{(k)}T_0(x)+\cdots+\mu_k^{(k)}T_k(x),\quad k\geq|\kappa|, \tag{2.2.25}$$

где

$$h_j \mu_j^{(k)} = \quad 0,5G_{k-|\kappa|+j} + \begin{cases} 0,5G_{k-|\kappa|-j} + H_{k-|\kappa|-j}, & k-j > |\kappa|, \\ 0,5G_0, & k-j = |\kappa|, \\ 0,5G_{-k+|\kappa|+j}, & k-j < |\kappa|, \end{cases} \qquad (2.2.26)$$

$$h_j = \begin{cases} 0,5, & j \neq 0, \\ 1, & j = 0, \end{cases} \quad j = \overline{0, k},$$

$$H_M = \sum_{r=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} b_r^{(M-1)} p_{M+2|\kappa|-2r},$$

$$G_M = \sum_{r=1}^{|\kappa|+1} q_r^{(M)} p_{2|\kappa|-r+1}.$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.2.26) (файл «jkmu.nb»)

Функция μjk.

Назначение: вычисляет коэффициент $\mu_j^{(k)}$ разложения (2.2.25) по формуле (2.2.26).

Прототип: μjk[$j\_, k\_, \kappa\_, p\_$].

Параметры:

j, k – индексы,

p – коэффициенты разложения (1.1.13): $p_j,\ j = |\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, k+|\kappa|$,

κ – индекс задачи линейного сопряжения.

Возвращаемое значение: значение $\mu_j^{(k)}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
    If[n == 0 , Return[{1.}]];
    b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    b[[1]] = 2.^n;
    For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++, mm = n + 1. - 2 k;
     b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
    Return[b]];

(*============ Gμ ================*)
Gμ[M_, χ_, p_] := Module[{rM, GM},
    q = Table[0, {k, 1, 3}];
    q[[1]] = If[M == 0, 1., 0];
    q[[2]] = If[M == 1, 0.5, 0];
    q[[3]] = If[M == 0, 0.5, If[M == 2, 0.25, 0]];
    GM = Sum[(p[[-2 χ - r + 2]] q[[r]]), {r, 1, -χ + 1}];
    Return[GM]
   ];
(*============ Hμ ================*)
Hμ[M_, χ_, p_] := Module[{b, M2, Hz, r},
    b = bkn[M - 1];
    M2 = Floor[(M - 1)/2];
    Hz = Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}];
    Return[Hz]
   ];
```

```
(*============ μjk ================*)
μjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{μ, t1, t2, hj},
  hj = If[j == 0, 1, 2];
  t1 = 0.5 Gμ[k + χ + j, χ, p];
  If[k > j - χ, t2 = 0.5 Gμ[k + χ - j, χ, p] + Hμ[k + χ - j, χ, p],
   If[k - j == -χ, t2 = 0.5 Gμ[0, χ, p],
    t2 = 0.5 Gμ[-k - χ + j, χ, p]]];
  μ = hj (t1 + t2);
  Return[μ]
 ]
```

2.3. Приближенное решение характеристического уравнения

Рассмотрим полученные в работе [51] вычислительные схемы приближенного решения характеристического уравнения

$$A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=f(x),\quad -1<x<1. \tag{2.3.1}$$

В алгоритмах используются интерполяционные многочлены функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [28]:

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x), \tag{2.3.2}$$

где

$$f_0=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k),$$

$$f_j=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)T_j(x_k),\qquad j=1,\dots,n,$$

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\qquad k=1,2,\dots,n+1,$$

и

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x), \tag{2.3.3}$$

где

$$f_j=G_j-\delta_j G_{j+2},$$

$$G_j=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)T_j(x_k),$$

$$\delta_j=\begin{cases}1, & j=0,1,\dots,n-2,\\ 0, & \quad j=n-1,n,\end{cases}$$

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\qquad k=1,2,\dots,n+1.$$

Листинг функции, реализующей формулу (2.3.2)
(файл «fjT.nb»)

Функция fjT.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $f_j, j=\overline{0,n}$, по формуле (2.3.2).

Прототип: fjT[ff _, n _].

Параметры:

n – степень многочлена $f_n(x)$,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $f_j, j=\overline{0,n}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== fjT ============*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
   f = Table[0, {k, 0, n}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j ++,
    f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   Return[f]];
```

Листинг функции, реализующей формулу (2.3.3)
(файл «fjU.nb»)

Функция fjU.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $f_j, j=\overline{0,n}$, по формуле (2.3.3).

Прототип: fjU[$ff\_, n\_$].

Параметры:

n – степень многочлена $f_n(x)$,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $f_j, j=\overline{0,n}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, j, k},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]
  ];
```

2.3.1. Решение характеристического уравнения в классах с неотрицательным индексом

Приближенное решение задачи (2.1.1), (2.1.3) найдем как решение задачи

$$A(x)Z(x)u_{n+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u_{n+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x}=f_n(x),\quad -1<x<1,\quad (2.3.4)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u_{n+\kappa}(t)t^{j-1}dt=\alpha_j,\quad j=1,\ldots,\kappa,\qquad (2.3.5)$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен.

Так как решением задачи (2.3.4), (2.3.5) является алгебраический многочлен степени не выше $n+\kappa$, ищут его в виде линейной комбинации многочленов Чебышева.

Схема 2.3.1. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n}f_jU_j(x)$ определяется в (2.3.3), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_kU_k(x),\qquad (2.3.6)$$

c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.6) в (2.3.4), получим при $-1<x<1$

$$\sum_{k=0}^{n}c_{k+\kappa}\left[A(x)Z(x)U_{k+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)U_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x}\right]=f_n(x).$$

Учитывая (2.2.13), найдем при $-1<x<1$

$$\sum_{k=0}^{n}c_{k+\kappa}\left[\rho_0^{(k)}U_0(x)+\rho_1^{(k)}U_1(x)+\cdots+\rho_k^{(k)}U_k(x)\right]=\sum_{j=0}^{n}f_jU_j(x).$$

Для определения $c_\kappa, c_{\kappa+1},\ldots,c_{\kappa+n}$ имеем треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n}\rho_j^{(k)}c_{k+\kappa}=f_j,\quad j=n,n-1,\ldots,0.\qquad (2.3.7)$$

Недостающие неизвестные $c_{\kappa-1},\ldots,c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_k\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)U_k(t)t^{j-1}dt\right]=-\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_k\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)U_k(z)z^{j-1}\right)\right]=\alpha_j,$$

$$j=1,\ldots,\kappa.$$

Для определения $c_{\kappa-1}, \dots, c_0$ имеем систему

$$\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} c_k I_{kj} = \alpha_j, \quad j=1,\dots,\kappa,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)}. \qquad (2.3.8)$$

Решение системы (2.3.7), (2.3.8) определяется формулами

$$c_{n+\kappa} = \frac{f_n}{\rho_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\kappa-l} = \frac{1}{\rho_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\kappa-l+j} \rho_{n-l}^{(n-l+j)} \right], \qquad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$c_{\kappa-j} = \frac{1}{I_{\kappa-j,j}}\left[\alpha_j - \sum_{k=\kappa-j+1}^{n+\kappa} c_k I_{kj} \right], \qquad j=1,\dots,\kappa,$$

где коэффициенты $\rho_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.14).

Листинг функции, реализующей схему 2.3.1 (файл «Fckrho.nb»)

Функция Fckρ.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.6) – решение системы (2.3.7), (2.3.8): $c_0, c_1, \dots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: Fckρ[n_, κ_, ff_, αj_, pp_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

αj – массив, содержащий значения α_j, $j=1,\dots,\kappa$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j=\kappa, \kappa+1, \dots, n+\kappa$.

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \dots, c_{n+\kappa}$.

Используемые внешние функции:

ρjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\rho_j^{(k)}$ разложения (2.2.13) по формуле (2.2.14).

Реализация в Mathematica

```
(*========== bkn ============*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
(*============ Hρ ================*)
Hρ[M_, χ_, p_] := Module[{δ, b, M2, r, h},
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1 + (1 - χ) δ)/2];
   h = If[M == 0, 0, Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}]];
   Return[h]];
(*============ ρjk ================*)
ρjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{ρ},
   If[χ == 0, ρ = 2 Hρ[k - j, χ, p] +
      If[k - j == 0, 1, 0], ρ = 2 Hρ[k + χ - j, χ, p]];
   Return[ρ]];
(*========== Ikjρ ============*)
Ikjρ[k_, j_, χ_, p_] := Module[{b, z, M2, m},
   b = bkn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] b[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
```

```
(*========== fjU ===========*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
(*========== Fckρ ===========*)
Fckρ[n_, χ_, ff_, αj_, p_] := Module[{ f, c, temp, l, j, k},
  f = fjU[ff, n];
  c = Table[0, {k, 0, n + χ}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/ρjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] ρjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = 1/ρjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp);];
  For[j = 1, j ≤ χ, j++,
   temp = Sum[(c[[k + 1]] * Ikjρ[k, j, χ, p]), {k, χ - j + 1, n + χ}];
   c[[χ - j + 1]] = 1/Ikjρ[χ - j, j, χ, p] (αj[[j]] - temp);];
  Return[c]]
```

Схема 2.3.2. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k T_k(x), \tag{2.3.9}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.9) в (2.3.4), получим при $|x|<1$

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[A(x)Z(x)T_k(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_k(t)\frac{dt}{t-x} \right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} c_{k+\kappa} \left[A(x)Z(x)T_{k+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x} \right]=f_n(x).$$

Учитывая (2.2.15), найдем

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\kappa}\left[\gamma_0^{(k)}T_0(x)+\gamma_1^{(k)}T_1(x)+\cdots+\gamma_k^{(k)}T_k(x)\right]=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x), -1<x<1.$$

Для определения $c_\kappa, c_{\kappa+1}, \ldots, c_{\kappa+n}$ получим треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \gamma_j^{(k)} c_{k+\kappa}=f_j, \qquad j=n, n-1, \ldots, 0. \tag{2.3.10}$$

Недостающие неизвестные $c_{\kappa-1}, \ldots, c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_k(t)t^{j-1}dt\right]=-\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)T_k(z)z^{j-1}\right)\right]=\alpha_j,$$

$$j=1, \ldots, \kappa.$$

Для определения $c_{\kappa-1}, \ldots, c_0$ имеем систему

$$\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} c_k I_{kj} \quad =\alpha_j, \quad j=1, \ldots, \kappa,$$

$$I_{kj}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} a_m^{(k)}. \tag{2.3.11}$$

Решение системы (2.3.10), (2.3.11) определяется формулами

$$c_{n+\kappa} = \frac{f_n}{\gamma_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\kappa-l} = \frac{1}{\gamma_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\kappa-l+j} \gamma_{n-l}^{(n-l+j)} \right],$$

$$l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$c_{\kappa-j} = \frac{1}{I_{\kappa-j,j}} \left[\alpha_j - \sum_{k=\kappa-j+1}^{n+\kappa} c_k I_{kj} \right],$$

$$j = 1, \ldots, \kappa.$$

где коэффициенты $\gamma_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.16).

Листинг функции, реализующей схему 2.3.2 (файл «Fckgamma.nb»)

Функция Fckγ.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.9) – решение системы (2.3.10), (2.3.11): $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: Fckγ[$n\_$, $\kappa\_$, $ff\_$, $\alpha j\_$, $pp\_$].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \ldots, \kappa$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.

Используемые внешние функции:

γjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\gamma_j^{(k)}$ разложения (2.2.15) по формуле (2.2.16).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== bkn ============*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]
  ];
(*============ Hγ ================*)
Hγ[M_, χ_, p_] := Module[{b, M2, h, δ, r},
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1 + (1 - χ) δ)/2];
   h = If[M == 0, 0, Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}]];
   Return[h]
  ];
(*============ γjk ================*)
γjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{γ},
   hj := If[j == 0, 1, 2];
   q1[M_] := If[M == 0, 1., 0];
   If[χ == 0, γ = 0.5 (q1[k - j] + q1[k + j]) + Hγ[k - j, χ, p],
    γ = Hγ[k + χ - j, χ, p]];
   Return[hj γ]
  ];
```

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
(*========== Ikjϒ ============*)
Ikjϒ[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
   a = akn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
(*========== fjT ============*)
fjT[fu_, n_] := Module[{ft, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   ft[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j++,
    ft[[j + 1]] = 2/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   Return[ft]];
```

```
(*========== Fckϒ ============*)
Fckϒ[n_, χ_, ff_, αj_, p_] := Module[{f, c, temp, l, k, j},
  f = fjT[ff, n];
  c = Table[0, {j, 1, n + χ + 1}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / ϒjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] ϒjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = 1/ϒjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)];
  For[j = 1, j ≤ χ, j++,
   temp = Sum[(c[[k + 1]] Ikjϒ[k, j, χ, p]), {k, χ - j + 1, n + χ}];
   c[[χ - j + 1]] = 1/Ikjϒ[χ - j, j, χ, p] (αj[[j]] - temp);];
  Return[c]
 ]
```

Схема 2.3.3. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k U_k(x), \tag{2.3.12}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.12) в (2.3.4), получим

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[A(x)Z(x)U_k(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_k(t)\frac{dt}{t-x} \right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} c_{k+\kappa} \left[A(x)Z(x)U_{k+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x} \right]=$$

$$=f_n(x), |x|<1.$$

Учитывая (2.2.17), найдем

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\kappa}\left[\eta_0^{(k)}T_0(x)+\eta_1^{(k)}T_1(x)+\cdots+\eta_k^{(k)}T_k(x)\right]=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x), -1<x<1.$$

Для определения $c_\kappa, c_{\kappa+1}, \ldots, c_{\kappa+n}$ получим треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n}\eta_j^{(k)}c_{k+\kappa}=f_j, \qquad j=n, n-1, \ldots, 0. \tag{2.3.13}$$

Недостающие неизвестные $c_{\kappa-1}, \ \ldots, c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_k(t)t^{j-1}dt\right]=-\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k\left[\mathop{\mathrm{Res}}_{z=\infty}\left(X(z)U_k(z)z^{j-1}\right)\right]=\alpha_j,$$

$j=1, \ldots, \kappa.$

Для определения $c_{\kappa-1}, \ \ldots, c_0$ имеем систему

$$\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} c_k I_{kj}=\alpha_j, \quad j=1, \ldots, \kappa,$$

$$I_{kj}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m}b_m^{(k)}. \tag{2.3.14}$$

Решение системы (2.3.13), (2.3.14) определяется формулами

$$c_{n+\kappa}=\frac{f_n}{\eta_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\kappa-l}=\frac{1}{\eta_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l}-\sum_{j=1}^{l} c_{n+\kappa-l+j}\eta_{n-l}^{(n-l+j)}\right],$$

$$l=1, 2, \ldots, n,$$

$$c_{\kappa-j}=\frac{1}{I_{\kappa-j,j}}\left[\alpha_j-\sum_{k=\kappa-j+1}^{n+\kappa} c_k I_{kj}\right],$$

$$j=1, \ldots, \kappa,$$

где коэффициенты $\eta_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.18).

Листинг функции, реализующей схему 2.3.3 (файл «Fcketa.nb»)

Функция Fckη.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.12) – решение системы (2.3.13), (2.3.14): $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: Fckη$[n_, \kappa_, ff_, \alpha j_, pp_]$.

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \ldots, \kappa$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.

Используемые внешние функции:

ηjk$[j, k, p, \kappa]$ – вычисляет коэффициент $\eta_j^{(k)}$ разложения (2.2.17) по формуле (2.2.18).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - mm (mm + 1)/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
```

```
(*============ frη ================*)
frη[l_, M_] := Module[{a, r, m},
    If[l ≥ Floor[M/2], Return[{1.}]];
    a = akn[M];
    r = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
    Return[r]
  ];
(*============ ηjk ================*)
ηjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{η, hj, kj2, l},
    hj = If[j == 0, 1, 2];
    kj2 = Floor[(k - j)/2];
    η = Sum[(frη[l, k + χ - j + 1] p[[k + χ - j - 2 l + 1]]), {l, 0, kj2}];
    Return[η hj]
  ];
(*========== bkn ===========*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
    If[n == 0 , Return[{1.}]];
    b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    b[[1]] = 2.^n;
    For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
     mm = n + 1. - 2 k;
     b[[k + 1]] = -(mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
    Return[b]
  ];
```

```
(*========== Ikjη ===========*)
Ikjη[k_, j_, χ_, p_] := Module[{b, z, M2, m},
   b = bkn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] b[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
(*========== fjT ===========*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
   f = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j++,
    f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   Return[f]];
(*========== Fckη ===========*)
Fckη[n_, χ_, ff_, αj_, p_] := Module[{f, c, temp, j, l, k},
   f = fjT[ff, n];
   c = Table[0, {j, 1, n + χ + 1}];
   c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/ηjk[n, n, χ, p];
   For[l = 1, l ≤ n, l++,
    temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] ηjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
    c[[n + χ - l + 1]] = 1/ηjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)];
```

```
For[j = 1, j ≤ ϰ, j++,
  temp = Sum[(c[[k + 1]] Ikjη[k, j, ϰ, p]), {k, ϰ - j + 1, n + ϰ}];
  c[[ϰ - j + 1]] = 1/Ikjη[ϰ - j, j, ϰ, p] (αj[[j]] - temp)];
Return[c]
];
```

Схема 2.3.4. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k T_k(x), \tag{2.3.15}$$

где c_k – числа, подлежащие определению. Подставляя (2.3.15) в (2.3.4), получим

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[A(x)Z(x)T_k(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_k(t)\frac{dt}{t-x} \right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} c_{k+\kappa} \left[A(x)Z(x)T_{k+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{k+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x} \right]=f_n(x), \quad |x|<1.$$

Учитывая (2.2.11), найдем

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k+\kappa}\left[\alpha_0^{(k)}U_0(x)+\alpha_1^{(k)}U_1(x)+\cdots+\alpha_k^{(k)}U_k(x) \right]=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x), -1<x<1.$$

Для определения $c_\kappa, c_{\kappa+1}, \ldots, c_{\kappa+n}$ получим треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=j}^{n} \alpha_j^{(k)} c_{k+\kappa}=f_j, \qquad j=n, n-1, \ldots, 0. \tag{2.3.16}$$

Недостающие неизвестные $c_{\kappa-1}, \ldots, c_0$ определим из равенств (2.3.5) с помощью формулы

$$\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_k(t)t^{j-1}dt \right]=-\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k \left[\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(X(z)T_k(z)z^{j-1}\right) \right]=\alpha_j,$$

$$j=1, \ldots, \kappa.$$

Для определения $c_{\kappa-1}, \ldots, c_0$ имеем систему

$$\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} c_k I_{kj} = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, \kappa,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} a_m^{(k)}. \tag{2.3.17}$$

Решение системы (2.3.16), (2.3.17) определяется формулами

$$c_{n+\kappa} = \frac{f_n}{\alpha_n^{(n)}},$$

$$c_{n+\kappa-l} = \frac{1}{\alpha_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n+\kappa-l+j}\alpha_{n-l}^{(n-l+j)}\right], \qquad l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$c_{\kappa-j} = \frac{1}{I_{\kappa-j,j}}\left[\alpha_j - \sum_{k=\kappa-j+1}^{n+\kappa} c_k I_{kj}\right], \qquad j = 1, \ldots, \kappa,$$

где коэффициенты $\alpha_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.12).

Листинг функции, реализующей схему 2.3.4 (файл «Fckalpha.nb»)

Функция Fckα.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.15) – решение системы (2.3.16), (2.3.17): $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: Fckα[n_, κ_, ff_, αj_, pp_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \ldots, \kappa$,

pp –коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.

Используемые внешние функции:

αjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\alpha_j^{(k)}$ разложения (2.2.11) по формуле (2.2.12).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2. k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
(*================ Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, h, r},
   a = akn[M];
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
   h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
   Return[2 h]
  ];
```

```
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p] := Module[{α},
   If[And[j == k, k == 0, χ == 0] || And[j == k, χ == 1], α = 1,
    If[And[j == k, k ≠ 0, χ == 0], α = 0.5,
     If[And[j == k - 1, χ == 0], α = p[[χ + 2]],
      If[And[k - j ≥ 2, χ == 0],
       α = Hα[k - j - 1, χ, p] + If[k - j == 2, -0.5, 0],
       α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]]]]];
   Return[α]
  ];
(*========== Ikjα ============*)
Ikjα[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
   a = akn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]
  ];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
```

```
(*========== Fckα ============*)
Fckα[n_, ϰ_, ff_, αj_, p_] := Module[{f, c, temp, l, j},
  f = fjυ[ff, n];
  c = Table[0, {l, 1, n + ϰ + 1}];
  c[[n + ϰ + 1]] = f[[n + 1]] / αjk[n, n, ϰ, p];
  For[l = 1, l ≤ n, l++,
    temp = Sum[(c[[n + ϰ - l + j + 1]] αjk[n - l, n - l + j, ϰ, p]), {j, 1, l}];
    c[[n + ϰ - l + 1]] = 1 / αjk[n - l, n - l, ϰ, p] (f[[n - l + 1]] - temp);
  ];
  For[j = 1, j ≤ ϰ, j++,
    temp = Sum[(c[[k + 1]] * Ikjα[k, j, ϰ, p]), {k, ϰ - j + 1, n + ϰ}];
    c[[ϰ - j + 1]] = 1 / Ikjα[ϰ - j, j, ϰ, p] (αj[[j]] - temp);
  ];
  Return[c]
]
```

2.3.2. Модельные примеры

Приведем результаты численного решения модельных сингулярных интегральных уравнений.

Решение в классах функций с неотрицательным индексом

Рассмотрим уравнение (1.1.1)

$$a(x)\phi(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} b(t)\phi(t)\frac{dt}{t-x} = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

в котором

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}\dfrac{1+E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\end{cases}\qquad E(x)=e^{2\pi i w x},$$

$$b(x)=\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)=\frac{1}{x-2}.$$

Класс $h(0)$.

Пусть $w=\left(\dfrac{2}{5}-i\right)$ и решение данного уравнения принадлежит классу $h(0)$.

Используя результат работы программы Fк для заданного первого класса и данных коэффициентов $a(x), b(x)$, получим $\kappa_1=1$, $\kappa_2=1$, $\kappa=2$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(0)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

Обозначим $g(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}$. Тогда после элементарных упрощений получим $g(x)=wx$.

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=g(1)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=2g(1)+g(x)\left(\ln\frac{1-x}{1+x}+\pi i\right),$$

$$X(z)=(z-1)^{-\kappa_1}(z+1)^{-\kappa_2}e^{\Gamma(z)},$$

$$X^{+}(x)=(x-1)^{-\kappa_1}(x+1)^{-\kappa_2}e^{\Gamma^{+}(x)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]\,X^{+}(x). \tag{2.3.18}$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)}, \tag{2.3.19}$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\\ \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{x-2},\ -1<x<1,\\
&\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)t^{j-1}dt=-2^{j-1},\qquad j=1,2.
\end{aligned}
\tag{2.3.20}
$$

Точным решением рассматриваемой задачи (2.3.20) является функция

$$u(x)=\frac{A^*}{x-2} \tag{2.3.21}$$

при

$$A^*=\frac{1}{X(2)}=3e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)}=3{,}183324033245894-0{,}636098761545623\,1i.$$

Для численного решения задачи (2.3.20) надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z): p_{\kappa}, p_{\kappa+1},\ldots,\ \kappa\ge 0$. Получим их, используя функцию Fp.

Вычисление функции (2.3.18) $X^{+}(x)$ для данной задачи оформим следующим модулем.

Листинг функции, реализующей формулу (2.3.18)
(файл «FXiPlus.nb»)

Функция FXiPlus.

Назначение: вычисляет значение функции $X^{+}(x)$ в точке x.

Прототип: FXiPlus[a_,b_,κ1_,κ2_,x_]

Параметры:

a,b – функции $a(x),b(x)$ – коэффициенты уравнения (1.1.3),

κ1, κ2 – частные индексы задачи линейного сопряжения,

x – заданная точка.

```
(*================ FXiPlus ================*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{ r, rr},
   ΓPlus := Module[{rez},
     fG[t_] = (a[t] - b[t])/(a[t] + b[t]);
     fg[t_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[t]];
     rez = 2 fg[1.] + fg[x] (ln[(1 - x)/(1 + x)] + π ⅈ);
     Return[rez]
    ];
   r = ⅇ^ΓPlus[x];
   rr = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 r;
   Return[rr];
  ];
```

Точное решение $u(x)$ вычисляется по формуле (2.3.21), точное решение $\phi(x)$ вычисляется по формуле (2.3.19).

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.1–2.3.4, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.4 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\alpha_X_P\Xar_P1_P1_alpha.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.1 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\rho_X_P\Xar_P1_P1_rho.nb**;
- схемы 2.3.2 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\gamma_X_P\Xar_P1_P1_gamma.nb**;
- схемы 2.3.3 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\eta_X_P\Xar_P1_P1_eta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(0)$ с использованием схемы 2.3.4

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}]];

(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
   (*================================*)
   FunEΓz := Module[{ r, d, α},
     fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
     fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
     d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) ⅆt;
       d[[k + 1]] = (k + 1.) r}];
     α = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     α[[1]] = 1.;
     For[j = 1, j ≤ n, j++, α[[j + 1]] = -1/j Sum[(d[[j - k]] α[[k + 1]]), {k, 0, j - 1}]];
     Return[α]];
```

```
(*================ FunχP1iP1 ===============*)
FunχP1iP1 := Module[{ α, χ},
  α = FunEΓz;
  χ = 2;
  q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
  q[[χ + 1]] = 1;
  For[k = 1, k ≤ n, k++,
   q[[χ + k + 1]] = Sum[(If[Mod[m, 2] == 1, 0, 1] α[[k - m + 1]]), {m, 0, k}]];
  Return[q]];
p = FunχP1iP1;
Return[p]];

(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x},
  ft = Table[0, {i, 1, n + 1}];
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  G = Table[0, {i, 1, n + 1}];
  For[j = 0, j ≤ n, j++,
   G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
  For[j = 0, j ≤ n - 2, j++, ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
  ft[[n]] = G[[n]]; ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
  Return[ft]];
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
  If[n ≤ 1, Return[{1}]];
  a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}]; a[[1]] = 2.^(n-1);
  For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2 k;
   a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
  Return[a]];
```

```
(*================= Hα ================*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, r, h},
    a = akn[M];
    δ = If[χ == 0, 0, 1];
    M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
    h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
    Return[2 h]];
(*============= αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
    α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p];
    Return[α]];
(*=========== Ikjα ============*)
Ikjα[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
    a = akn[k];
    M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
    z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
    Return[z]];
(*=========== Fckα ============*)
Fckα[n_, χ_, ff_, αj_, p_] := Module[{f, c, temp, i, l, j},
    f = fjU[ff, n];
    c = Table[0, {i, 1, n + χ + 1}];
    c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / αjk[n, n, χ, p];
    For[l = 1, l ≤ n, l++,
      temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] αjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
      c[[n + χ - l + 1]] = 1/αjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)];
```

```
    For[j = 1, j ≤ χ, j++,
              n+χ
      temp =   ∑     (c[[k + 1]] Ikjα[k, j, χ, p]);
            k=χ-j+1
                                1
      c[[χ - j + 1]] = ─────────────────────── (αj[[j]] - temp)];
                       Ikjα[χ - j, j, χ, p]
    Return[c]];

(*============ TClenshawArr ===========*)
TClenshawArr[a_, x_] := Module[{y, b, k, j, na, nx},
    na = Length[a];
    nx = Length[x];
    y = Table[0, {j, 1, nx}];
    For[j = 1, j ≤ nx, j++,
     b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
     For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
      b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x[[j]] b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
     y[[j]] = b[[1]] - x[[j]] b[[2]];];
    Return[y]];
(*============ TClenshaw ===========*)
TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
    na = Length[a];
    b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
    For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
     b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
    y = b[[1]] - x b[[2]];
    Return[y]];
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
    x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
    Return[x]];

(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
    len = Length[x];
    y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
    Return[y]];
```

```
(*================ FXiPlus =================*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
      rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
      Return[rez];
     ];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 re;
   Return[r]];

(* * * * * Example          * * * * *)
r = 2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
f[x_] = 1/(x - 2.);
Az = 3 Exp[(Log[3] - 1) 2 w];
ut[x_] = Az/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 1];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
αj = Table[-2^(j-1), {j, 1, χ}];

χ1=1 χ2=1 χ=2

nnn = 25;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];

ckα = Fckα[nnn, χ, f, αj, pp];
```

```
a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = TClenshaw[ckα, xx];
```

198

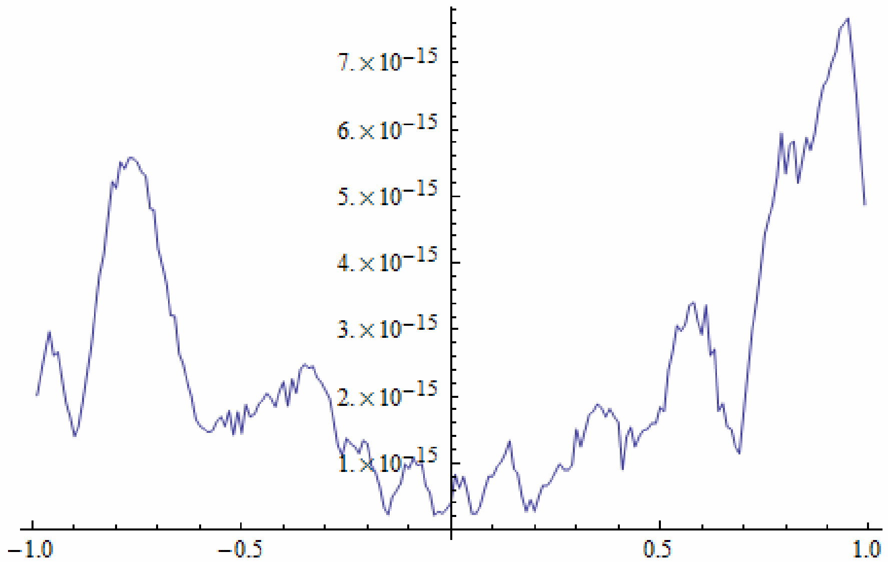
```
zz = uArr[ut, xx];
```

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

```
Print["eps=", Max[Abs[yy - zz]/Abs[zz]]];
```

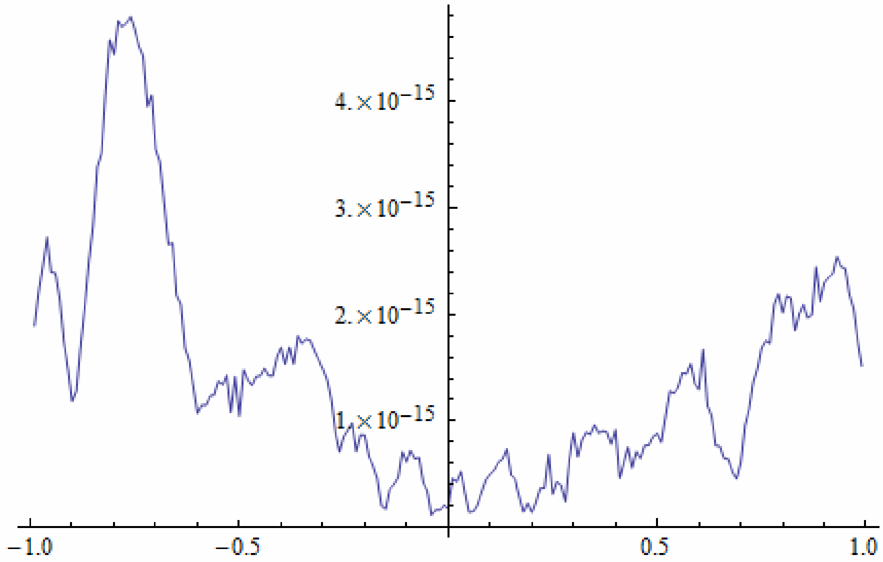
eps=4.75616×10^{-15}

```
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[zz[[i]] - yy[[i]]]}, {i, 1, kk}]]
```




```
un[x_] := TClenshaw[ckα, x];
ϕn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x]/(fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x]/(fa[x] - fb[x]) ut[x];
```

```
ListLinePlot[
 Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 1 приведены оценки погрешности решения поставленной задачи для разных n.

Таблица 1

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\dfrac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	6,6e-7	9,4e-10	1,3e-12	4,8e-15	4,7e-15

Класс $h(-1,1)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(-1,1)$ и снова $w=\left(\frac{2}{5}-i\right)$.

Используя результат работы программы Fк для заданных коэффициентов $a(x), b(x)$ и второго класса, получим $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa = 0$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(-1,1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left[2+x\left(\pi i+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z)=e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x)=e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\\ \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим уравнение

$$A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{x-2}, -1<x<1,$$

точным решением которого является функция

$$u(x)=\frac{A^{*}}{x-2},$$

при

$$A^{*}=\frac{1}{X(2)}=e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)}=0{,}9062264981637044-0{,}181084158301654i.$$

Для численного решения данного уравнения надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z): p_{\kappa}, p_{\kappa+1}, \ldots, \kappa \geq 0$. Получим их, используя функцию Fp.

При помощи модуля FXiPlus вычислим значение функции $X^{+}(x)$.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.1–2.3.4, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.4 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\alpha_X_P\Xar_P0_P0_alpha.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.1 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\rho_X_P\Xar_P0_P0_rho.nb**;
- схемы 2.3.2 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\gamma_X_P\Xar_P0_P0_gamma.nb**;
- схемы 2.3.3 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\eta_X_P\Xar_P0_P0_eta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1,1)$ с использованием схемы 2.3.4

```
(*============ Fχ =================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 := Re[ g[1.]] ;
   t2 := Re[g[-1.]] ;
   boo := Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 := Floor[1 - t2]; χ1 := Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 := Floor[-t2]; χ1 := Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 := Floor[-t2]; χ1 := Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 := Floor[1 - t2]; χ1 := Floor[t1]},
       None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}]];
```

```
(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
  (*================================*)
  FunEΓz := Module[{ r, d, α},
    fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
    fg[x_] = 1/(2 π ⅈ) Log[fG[x]];
    d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) ⅆt;
      d[[k + 1]] = (k + 1.) r}];
    α = Table[1, {k, 1, n + 1}];
    For[j = 1, j ≤ n, j++,
      α[[j + 1]] = -1/j Sum_{k=0}^{j-1} (d[[j - k]] α[[k + 1]])];
    Return[α]];
  (*==============Funχ0i0==============*)
  Funχ0i0 := Module[{α},
    α = FunEΓz;
    Return[α]];
  p = Funχ0i0;
  Return[p]];

(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2. k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
```

```
(*========== fjU ===========*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x},
    ft = Table[0, {i, 1, n + 1}];
    x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
    G = Table[0, {i, 1, n + 1}];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] * ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n+1}]];
    For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
     ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
    ft[[n]] = G[[n]];
    ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
    Return[ft]];
(*================ Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, r, h},
    a = akn[M];
    δ = If[χ == 0, 0, 1];
    M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
    h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
    Return[2 h]];
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
    If[And[j == k, k == 0, χ == 0] || And[j == k, χ == 1], α = 1.,
     If[And[j == k, k ≠ 0, χ == 0], α = 0.5,
      If[And[j == k - 1, χ == 0], α = p[[χ + 2]],
       If[And[k - j ≥ 2, χ == 0],
        α = Hα[k - j - 1, χ, p] + If[k - j - 1 == 1, -0.5, 0],
        α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]]]]];
    Return[α]];
```

```
(*========== Fckα ============*)
Fckα[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, temp, l, j},
    f = fjU[ff, n];
    c = Table[0, {l, 1, n + χ + 1}];
    c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / αjk[n, n, χ, p];
    For[l = 1, l ≤ n, l++,
     temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] αjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
     c[[n + χ - l + 1]] = 1 / αjk[n - l, n - l, χ, p]
       (f[[n - l + 1]] - temp);];
    Return[c]];
(*============ TClenshawArr ===========*)
TClenshawArr[a_, x_] := Module[{y, b, k, j, na, nx},
    na = Length[a];
    nx = Length[x];
    y = Table[0, {j, 1, nx}];
    For[j = 1, j ≤ nx, j++,
     b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
     For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
      b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x[[j]] b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
     y[[j]] = b[[1]] - x[[j]] b[[2]]];
    Return[y]];
(*============ TClenshaw ===========*)
TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
    na = Length[a];
    b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
    For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
     b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
    y = b[[1]] - x b[[2]];
    Return[y]];
```

```
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]];
(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y];];
(****************** FXiPlus ****************)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
      rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
      Return[rez];];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1.)^-χ1 (x + 1.)^-χ2 re;
   Return[r]];

(* * * * * Example                * * * * *)
r = 2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
f[x_] = 1/(x - 2.);
Az = Exp[(Log[3] - 1) 2 w];
ut[x_] = Az/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 2];
```

```
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
```

χ1=0 χ2=0 χ=0

```
nnn = 25;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];

ckα = Fckα[nnn, χ, f, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = TClenshawArr[ckα, xx];
zz = uArr[ut, xx];
```

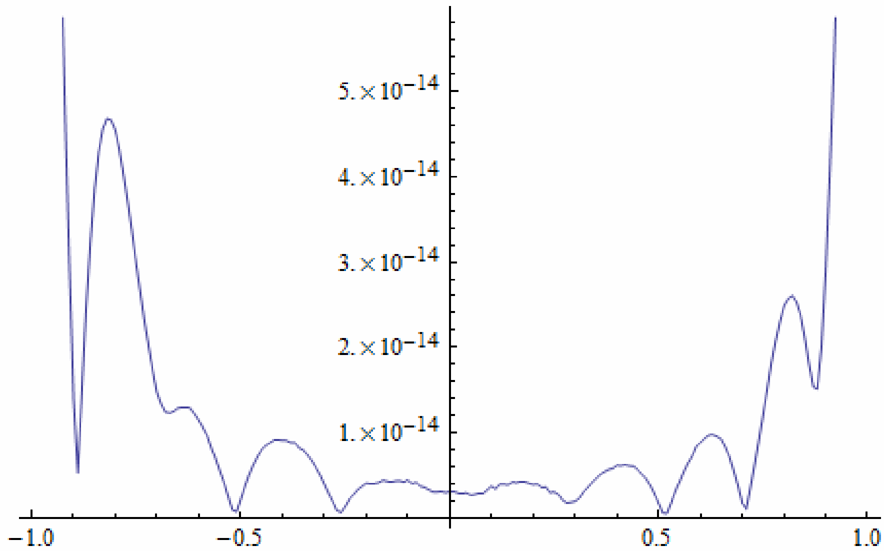
198

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

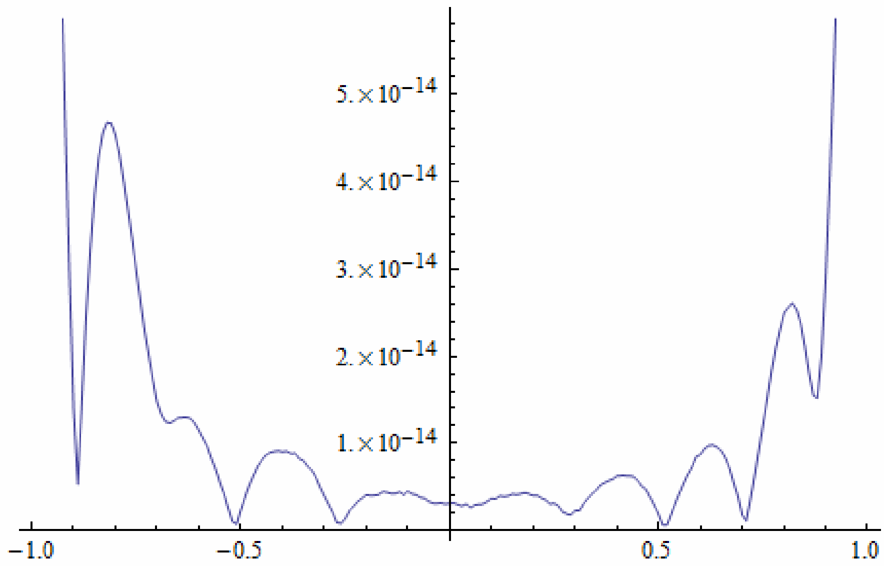
```
Print["eps=", Max[Abs[(yy - zz) / zz]]];
```

eps=1.52664×10^{-13}

```
ListLinePlot[
 Table[{xx[[i]], Abs[(zz[[i]] - yy[[i]]) / zz[[i]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



```
un[x_] := TClenshaw[ckα, x];
ϕn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
ListLinePlot[
 Table[
  {xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 2 приведены оценки погрешности решения заданного уравнения для разных n.

Таблица 2

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\dfrac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	1,5e-5	2,8e-8	5,1e-11	4,0e-14	4,0e-13

Класс $h(-1)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(-1)$ и $w=\left(\frac{2}{5}-i\right)$.

Используя результат работы программы $F\kappa$ для заданных коэффициентов $a(x)$, $b(x)$ и второго класса, получим $\kappa_1=1$, $\kappa_2=0$, $\kappa=1$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(-1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left[2+x\left(\pi i+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z)=\frac{1}{z-1}e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x)=\frac{1}{x-1}e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\\ \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}&A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{x-2},\ -1<x<1,\\ &\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)t^{j-1}dt=-2^{j-1},\quad j=1,\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

точным решением которой является функция

$$u(x) = \frac{A^*}{x-2}$$

при

$$A^* = \frac{1}{X(2)} = e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)} = 1{,}0611080110819646 - 0{,}21203292051520767i.$$

Для численного решения задачи (2.3.22) надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z): p_\kappa, p_{\kappa+1}, \ldots, \kappa \geq 0$. Получим их, используя функцию Fp.

При помощи модуля FXiPlus вычислим значение функции $X^+(x)$.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.1–2.3.4, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.4 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\alpha_X_P\Xar_P1_P0_alpha.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.1 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\rho_X_P\Xar_P1_P0_rho.nb**;
- схемы 2.3.2 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\gamma_X_P\Xar_P1_P0_gamma.nb**;
- схемы 2.3.3 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\eta_X_P\Xar_P1_P0_eta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1)$ с использованием схемы 2.3.4

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π i) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}];];
(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
   (*================================*)
   FunEГz := Module[{ r, d, α},
     fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
     fg[x_] = 1/(2. π i) Log[fG[x]];
     d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) dt;
       d[[k + 1]] = (k + 1.) r}];
     α = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     α[[1]] = 1.;
     For[j = 1, j ≤ n, j++,
      α[[j + 1]] = -1/j Sum[(d[[j - k]] α[[k + 1]]), {k, 0, j-1}]];
     Return[α]];
```

```
(*================ FunχP1i0 ================*)
FunχP1i0 := Module[{ α, χ, q},
   α = FunEΓz;
   χ = 1;
   q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
   q[[χ + 1]] = 1;
   For[k = 1, k ≤ n, k++, q[[χ + k + 1]] = Sum[α[[k - m + 1]], {m, 0, k}]];
   Return[q]];
p = FunχP1i0;
Return[p]];

(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x},
   ft = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]]; ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];

(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}]; a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
```

```
(*================ Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, h},
    a = akn[M];
    δ = If[χ == 0, 0, 1];
    M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
    h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
    Return[2 h]];
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
    If[j == k, α = 1, α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]];
    Return[α]
  ];
(*========== Ikjα ===========*)
Ikjα[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
    a = akn[k];
    M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
    z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 * m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
    Return[z]];
(*========== Fckα ===========*)
Fckα[n_, χ_, ff_, αj_, p_] := Module[{f, c, temp, i, l, j},
    f = fjU[ff, n];
    c = Table[0, {i, 1, n + χ + 1}];
    c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / αjk[n, n, χ, p];
    For[l = 1, l ≤ n, l++,
      temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] αjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
      c[[n + χ - l + 1]] = 1/αjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)
    ];
```

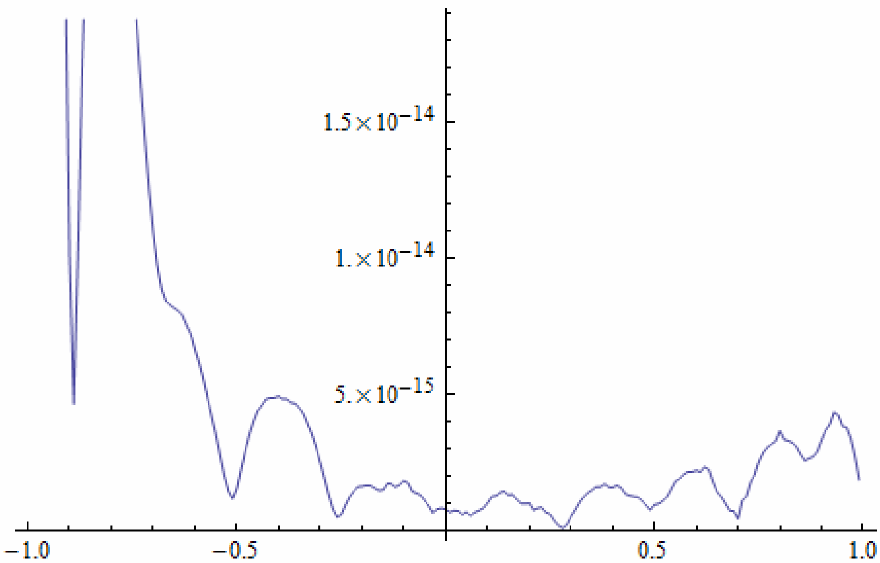
```
For[j = 1, j ≤ χ, j++,
  temp = Sum[(c[[k + 1]] Ikjα[k, j, χ, p]), {k, χ - j + 1, n + χ}];
  c[[χ - j + 1]] = 1/Ikjα[χ - j, j, χ, p] (αj[[j]] - temp)];
Return[c]];

(*============ TClenshawArr ===========*)
TClenshawArr[a_, x_] := Module[{y, b, k, j, na, nx},
  na = Length[a];
  nx = Length[x];
  y = Table[0, {j, 1, nx}];
  For[j = 1, j ≤ nx, j++,
   b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
   For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
    b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x[[j]] b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
   y[[j]] = b[[1]] - x[[j]] b[[2]]];
  Return[y]];
(*============ TClenshaw ===========*)
TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
  na = Length[a];
  b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
  For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
   b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
  y = b[[1]] - x b[[2]];
  Return[y]];
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
  x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
  Return[x]];

(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
  len = Length[x];
  y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
  Return[y]];
```

```
(*============== FXiPlus =============*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π i) Log[fG[xx]];
      rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π i);
      Return[rez]];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 re;
   Return[r]];

(* * * * * Example             * * * * *)
r = 2/5;
w = r - i;
fE[x_] = Exp[2. π i w x];
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π i w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
f[x_] = 1/(x - 2.);
Az = Exp[(Log[3] - 1) 2 w];
ut[x_] = Az/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 3];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
αj = Table[-2^(j-1), {j, 1, χ}];

χ1=1 χ2=0 χ=1

nnn = 25;
```

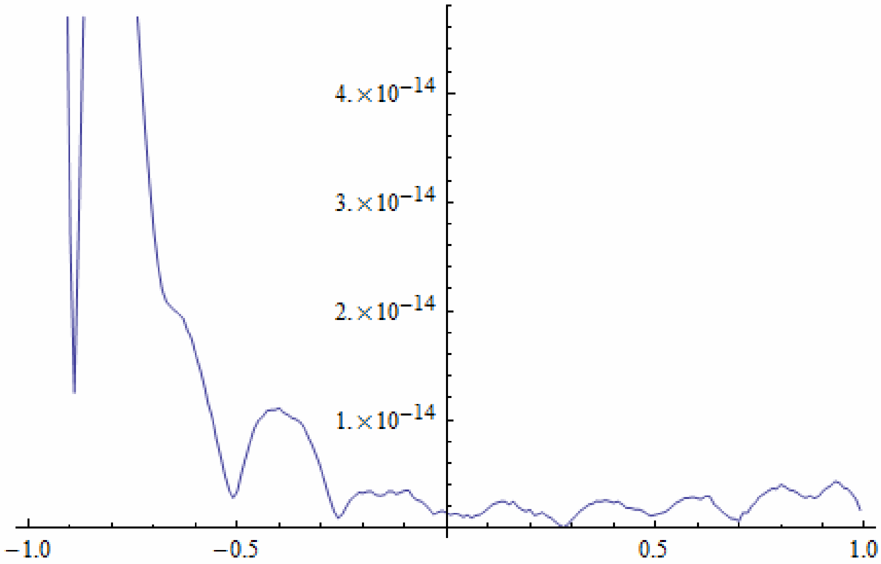
```
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2,  2 nnn + χ];

ckα = Fckα[nnn, χ, f, αj, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = TClenshaw[ckα, xx];

198

zz = uArr[ut, xx];
```

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

```
Print["eps=", Max[Abs[yy - zz]/Abs[zz]]];

eps=3.04458×10^-13

ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[zz[[i]] - yy[[i]]]}, {i, 1, kk}]]
```



```
un[x_] := TClenshaw[ckα, x];
φn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
ListLinePlot[
 Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - φn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 3 приведены оценки погрешности решения поставленной задачи для разных n.

Таблица 3

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\dfrac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	2,9e-5	5,7e-8	1,0e-10	3,0e-13	7,9e-13

Класс $h(1)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(1)$ и $w=\left(\frac{2}{5}-i\right)$.

Используя результат работы программы Fк для заданных коэффициентов $a(x)$, $b(x)$ и второго класса, получим $\kappa_1=0$, $\kappa_2=1$, $\kappa=1$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

Обозначим $g(x)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}$. Тогда $g(x)=wx$ при $w=\left(\frac{2}{5}-i\right)$.

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left[2+x\left(\pi i+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z)=\frac{1}{z+1}e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x)=\frac{1}{x+1}e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\\[2mm] \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}&A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{x-2},\quad -1<x<1,\\ &\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,u(t)\,t^{j-1}dt=-2^{j-1},\qquad j=1,\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

точным решением которой является функция

$$u(x) = \frac{A^*}{x-2}$$

при

$$A^* = \frac{1}{X(2)} = 3e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)} = 3{,}183324033245894 - 0{,}6360987615456231i.$$

Для численного решения задачи (2.3.23) надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z): p_\kappa, p_{\kappa+1}, \ldots, \kappa \geq 0$. Получим их, используя функцию Fp.

При помощи модуля FXiPlus вычислим значение функции $X^+(x)$.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.1–2.3.4, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.4 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\alpha_X_P\Xar_P0_P1_alpha.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.1 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\rho_X_P\Xar_P0_P1_rho.nb**;
- схемы 2.3.2 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\gamma_X_P\Xar_P0_P1_gamma.nb**;
- схемы 2.3.3 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\eta_X_P\Xar_P0_P1_eta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(1)$ с использованием схемы 2.3.4

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 := Re[ g[1.]] ;
   t2 := Re[g[-1.]] ;
   boo := Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 := Floor[1 - t2]; χ1 := Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 := Floor[-t2]; χ1 := Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 := Floor[-t2]; χ1 := Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 := Floor[1 - t2]; χ1 := Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}]];

(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
   (*================================*)
   FunEΓz := Module[{ r, d, α},
     fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
     fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
     d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) ⅆt;
       d[[k + 1]] = (k + 1.) r}];
     α = Table[1, {k, 1, n + 1}];
     For[j = 1, j ≤ n, j++, α[[j + 1]] = -1/j ∑_{k=0}^{j-1} (d[[j - k]] α[[k + 1]])];
     Return[α]];
```

```
(*=================Funχ0iP1===============*)
Funχ0iP1 := Module[{ α, χ},
   α = FunEΓz;
   χ = 1;
   q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
   q[[χ + 1]] = 1;
   For[k = 1, k ≤ n, k++,
    q[[χ + k + 1]] =
     Sum[If[Mod[m, 2] == 0, α[[k - m + 1]], -α[[k - m + 1]]], {m, 0, k}]];
   Return[q]];
p = Funχ0iP1;
Return[p]];

(*=========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2. k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x},
   ft = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   x = Table[N[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π]], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++, G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++, ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];  ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
```

```
(*================ Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, r, h},
   a = akn[M];
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
   h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
   Return[2 h]];
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
   If[j == k, α = 1.,
    α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]];
   Return[α]];
(*========== Ikjα ===========*)
Ikjα[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
   a = akn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
(*========== Fckα ============*)
Fckα[n_, χ_, ff_, αj_, p_] := Module[{f, c, temp, l, j},
  f = fjU[ff, n];
  c = Table[0, {l, 1, n + χ + 1}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/αjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] αjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = 1/αjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)];
```

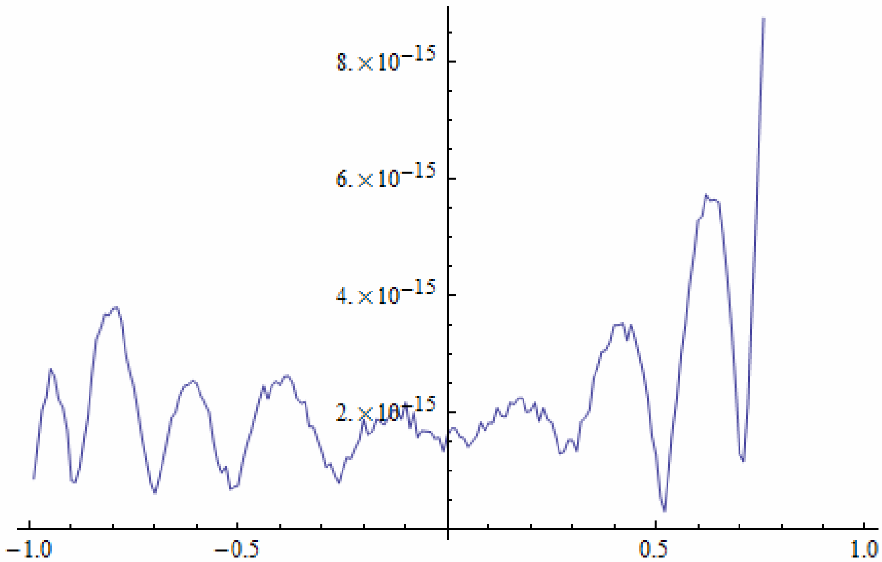
```
   For[j = 1, j ≤ χ, j++,
     temp = Sum[(c[[k + 1]] Ikjα[k, j, χ, p]), {k, χ - j + 1, n + χ}];
     c[[χ - j + 1]] = 1/Ikjα[χ - j, j, χ, p] (αj[[j]] - temp);
   ];
   Return[c]
  ];
(*============ TClenshawArr ===========*)
TClenshawArr[a_, x_] := Module[{y, b, k, j, na, nx},
   na = Length[a];
   nx = Length[x];
   y = Table[0, {j, 1, nx}];
   For[j = 1, j ≤ nx, j++,
    b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
    For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
     b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x[[j]] b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
    y[[j]] = b[[1]] - x[[j]] b[[2]]];
   Return[y]];
(*============ TClenshaw ===========*)
TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
   na = Length[a];
   b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
   For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
    b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
   y = b[[1]] - x b[[2]];
   Return[y]];
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]];
(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y]];
```

```
(*=============== FXiPlus ===================*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
     fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
     fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
     rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
     Return[rez]];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 re;
   Return[r]];

(* * * * * Example               * * * * *)
r = 2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
f[x_] = 1/(x - 2.);
Az = 3 Exp[(Log[3] - 1) 2 w];
ut[x_] = Az/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 4];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
αj = Table[-2^(j-1), {j, 1, χ}];

χ1=0  χ2=1  χ=1

nnn = 25;
```

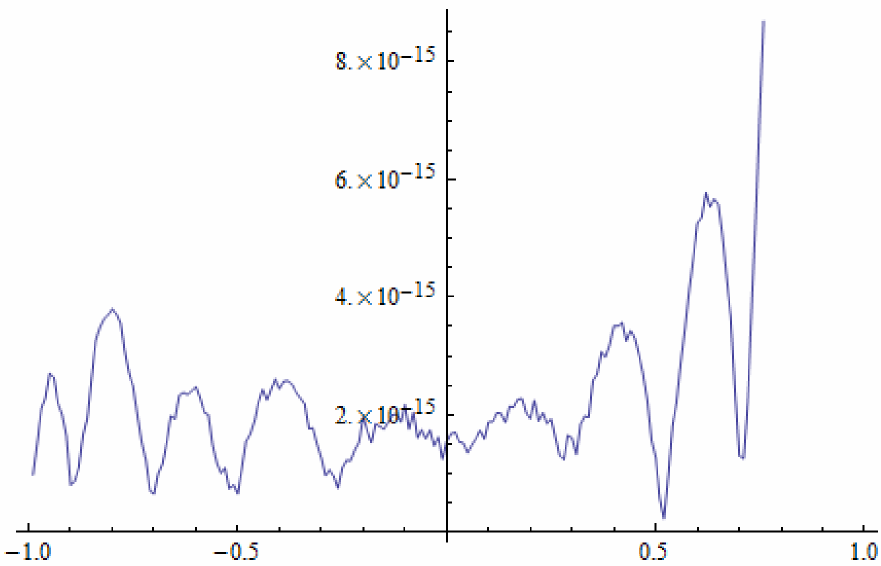
```
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];

ckα = Fckα[nnn, χ, f, αj, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = TClenshawArr[ckα, xx];
zz = uArr[ut, xx];

198
```

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

```
Print["eps=", Max[Abs[(yy - zz) / zz]]];

eps=8.92798 × 10^-14

ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[(zz[[i]] - yy[[i]]) / zz[[i]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



```
un[x_] := TClenshaw[ckα, x];
ϕn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
ListLinePlot[
 Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 4 приведены оценки погрешности решения поставленной задачи для разных n.

Таблица 4

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\frac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	9,4e-6	1,9e-8	3,4e-11	8,9e-14	2,6e-13

Класс $h(0)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(0)$ и $w=\left(-\dfrac{2}{5}-i\right)$.

Используя результат работы программы Fк для заданных коэффициентов $a(x), b(x)$ и первого класса, получим $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa = 0$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(0)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left[2+x\left(\pi i+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z)=e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x)=e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi iw}, & x=0,\\[2mm] \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим уравнение

$$A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{x-2},\quad -1<x<1,$$

точным решением которого является функция

$$u(x)=\frac{A^*}{x-2}$$

при

$$A^*=\frac{1}{X(2)}=e^{2w(\ln 3-1)}=0{,}9062264981637044-0{,}181084158301654i.$$

Для численного решения данного уравнения надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z): p_\kappa, p_{\kappa+1}, \ldots, \kappa \geq 0$. Получим их, используя функцию Fp.

При помощи модуля FXiPlus вычислим значение функции $X^+(x)$.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.1–2.3.4, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.4 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\alpha_X_P\Xar_P0_P0_alpha_r-otr.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.1 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\rho_X_P\Xar_P0_P0_rho_r-otr.nb**;
- схемы 2.3.2 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\gamma_X_P\Xar_P0_P0_gamma_r-otr.nb**;
- схемы 2.3.3 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_X\eta_X_P\Xar_P0_P0_eta_r-otr.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(0)$ с использованием схемы 2.3.4

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π i) Log[G[x]];
   t1 := Re[ g[1.]] ;
   t2 := Re[g[-1.]] ;
   boo := Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 := Floor[1 - t2]; χ1 := Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 := Floor[-t2]; χ1 := Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 := Floor[-t2]; χ1 := Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 := Floor[1 - t2]; χ1 := Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}];
  ];
```

```
(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
    (*=================================*)
    FunEΓz := Module[{ r, d, α},
      fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
      fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
      d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
      For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) ⅆt;
        d[[k + 1]] = (k + 1.) r}];
      α = Table[1, {k, 1, n + 1}];
      For[j = 1, j ≤ n, j++, α[[j + 1]] = -1/j Sum[(d[[j - k]] α[[k + 1]]), {k, 0, j-1}]];
      Return[α]];
    (*================Funχ0i0================*)
    Funχ0i0 := Module[{α},
      α = FunEΓz;
      Return[α]];
    p = Funχ0i0;
    Return[p]
  ];

(*========== akn ===========*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
    If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
    a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    a[[1]] = 2.^(n-1);
    For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2. k;
      a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
    Return[a]
  ];
```

```
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x},
   ft = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   x = Table[N[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π]], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];  ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
(*================ Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, r, h},
   a = akn[M];
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
   h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
   Return[2 h]];
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
   If[And[j == k, k == 0, χ == 0] || And[j == k, χ == 1], α = 1.,
    If[And[j == k, k ≠ 0, χ == 0], α = 0.5,
     If[And[j == k - 1, χ == 0], α = p[[χ + 2]],
      If[And[k - j ≥ 2, χ == 0],
       α = Hα[k - j - 1, χ, p] + If[k - j - 1 == 1, -0.5, 0],
       α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]]]]];
   Return[α]];
```

```
(*========== Fckα ============*)
Fckα[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, temp, l, j},
    f = fjU[ff, n];
    c = Table[0, {l, 1, n + χ + 1}];
    c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / αjk[n, n, χ, p];
    For[l = 1, l ≤ n, l++,
     temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] αjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
     c[[n + χ - l + 1]] = 1/αjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)];
    Return[c]
   ];
(*============ TClenshawArr ===========*)
TClenshawArr[a_, x_] := Module[{y, b, k, j, na, nx},
    na = Length[a];
    nx = Length[x];
    y = Table[0, {j, 1, nx}];
    For[j = 1, j ≤ nx, j++,
     b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
     For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
      b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x[[j]] b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
     y[[j]] = b[[1]] - x[[j]] b[[2]]];
    Return[y]
   ];
(*============ TClenshaw ===========*)
TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
    na = Length[a];
    b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
    For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
     b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
    y = b[[1]] - x b[[2]];
    Return[y]
   ];
```

```
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]];
(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y]];
(*=============== FXiPlus ================*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
      rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
      Return[rez]];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1.)^-χ1 (x + 1.)^-χ2 re;
   Return[r]];

(* * * * * Example                    * * * * *)
r = -2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
f[x_] = 1/(x - 2.);

Az = Exp[(Log[3] - 1) 2 w];
ut[x_] = Az/(x - 2);
```

```
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 1];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
```

χ1=0 χ2=0 χ=0

```
nnn = 25;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];

ckα = Fckα[nnn, χ, f, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = TClenshawArr[ckα, xx];
zz = uArr[ut, xx];
```

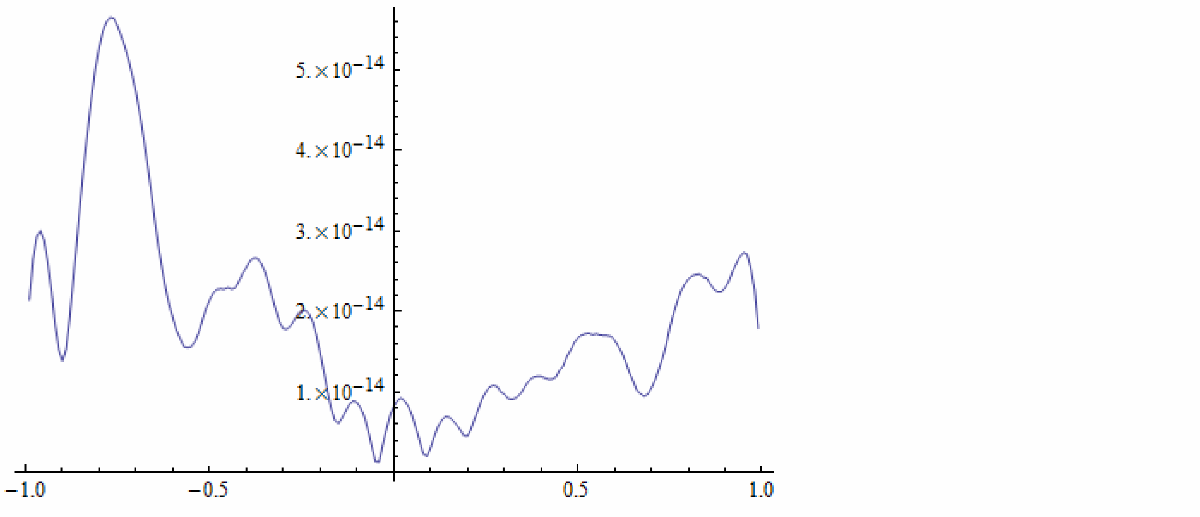
198

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

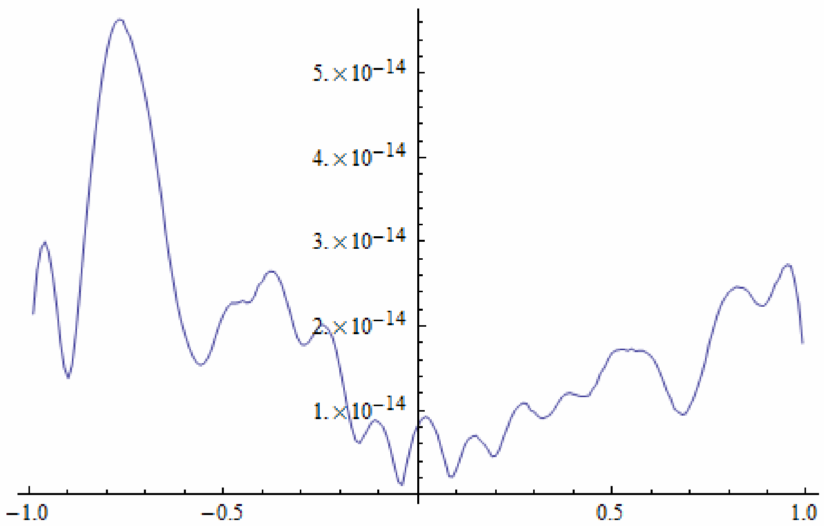
```
Print["eps=", Max[Abs[(yy - zz) / zz]]];
```

eps=5.64811×10^{-14}

```
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[(zz[[i]] - yy[[i]]) / zz[[i]]]}, {i, 1, kk}]]
```



```
un[x_] := TClenshaw[ckα, x];
ϕn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 5 приведены оценки погрешности решения заданного уравнения для разных n.

Таблица 5

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\dfrac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	7,5e-6	1,1e-8	1,4e-11	5,6e-14	5,4e-14

2.3.3. Решение характеристического уравнения в классах с отрицательным индексом

Пусть решение уравнения (2.3.1) ищется в классах $h(-1,1), h(-1), h(1)$ с $\kappa < 0$ и выполняются необходимые и достаточные условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}f(t)t^{j-1}dt = 0, \quad j = \overline{1,|\kappa|}.$$

Приближенное решение в этом случае находится из уравнения

$$A(x)Z(x)u_{n-|\kappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u_{n-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x} = f_n(x) + Q_{|\kappa|-1}(x), |x|<1, \qquad (2.3.24)$$

где $f_n(x)$ – некоторый интерполяционный многочлен, $Q_{|\kappa|-1}(x)$ – некоторый вспомогательный многочлен, позволяющий обеспечить условие разрешимости уравнения (2.3.24).

Коэффициенты $q_0, \ldots, q_{|\kappa|-1}$ вспомогательного многочлена $Q_{|\kappa|-1}(x)$ здесь и далее определяются из условий разрешимости уравнения (2.3.24):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}[f_n(t) + Q_{|\kappa|-1}(t)]t^{j-1}dt = 0, \quad j = \overline{1,|\kappa|}.$$

Интегралы, входящие в левые части последних равенств, вычисляются по формуле

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}[f_n(t) + Q_{|\kappa|-1}(t)]t^{j-1}dt = \operatorname*{Res}_{z=\infty}[X^{-1}(z)(f_n(z) + Q_{|\kappa|-1}(z))z^{j-1}].$$

По аналогии с предыдущим получим вычислительные схемы и в этих классах функций.

Схема 2.3.5. Пусть $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $Q_{|\kappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m U_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x) = \sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}U_{k-|\kappa|}(x), \qquad (2.3.25)$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.25) в (2.3.24), с учетом формулы (2.2.19) получим

$$\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[A(x)Z(x)U_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x}\right]=$$

$$=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[\sigma_0^{(k)}U_0(x)+\sigma_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\sigma_k^{(k)}U_k(x)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)+\sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m U_m(x).$$

Отсюда придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n}\sigma_j^{(k)}c_{k-|\kappa|}=f_j,\quad j=n,n-1,\ldots,|\kappa|, \tag{2.3.26}$$

где коэффициенты $\sigma_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.20).

Из системы (2.3.26) обратным ходом метода Гаусса найдем неизвестные $c_{n-|\kappa|}, c_{n-|\kappa|-1}, \ldots, c_0$:

$$c_{n-|\kappa|}=\frac{f_n}{\sigma_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\kappa|-l}=\frac{1}{\sigma_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l}-\sum_{j=1}^{l} c_{n-|\kappa|-l+j}\sigma_{n-l}^{(n-l+j)}\right],\quad l=1,2,\ldots,n-|\kappa|.$$

Листинг функции, реализующей схему 2.3.5 (файл «Fcksigma.nb»)

Функция Fckσ.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.20) – решение системы (2.3.26): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: Fckσ[n_, κ_, ff_, pp_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.13): p_j, $j=|\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, n+|\kappa|$.

Используемые внешние функции:

σjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\sigma_j^{(k)}$ разложения (2.2.19) по формуле (2.2.20).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]
  ];
(*============ Hσ ================*)
Hσ[M_, χ_, p_] := Module[{b, Hz, M2, r},
   If[M < 1, Return[0]];
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1)/2];
   Hz = Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}];
   Return[Hz]
  ];
(*============ Gσ ================*)
Gσ[M_, χ_, p_] := Module[{q, GM},
   q = Table[0, {k, 1, 3}];
   q[[1]] = If[M == 0, 1, 0];
   q[[2]] = If[M == 1, 0.5, 0];
   q[[3]] = If[M == 0, 0.5, If[M == 2, 0.25, 0]];
   GM = Sum[(q[[r]] p[[-2 χ - r + 2]]), {r, 1, -χ + 1}];
   Return[GM]
  ];
```

```
(*============ σjk ================*)
σjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{σ},
   σ = -Gσ[k + χ + j + 2, χ, p] + If[j == k + χ, Gσ[0, χ, p],
      If[j > k + χ, Gσ[j - k - χ, χ, p], 2 Hσ[k + χ - j, χ, p] + Gσ[k + χ - j, χ, p]]];
   Return[σ]
  ];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, j, k},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++, ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];  ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
(*========== Fckσ ============*)
Fckσ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, l, j},
  f = N[fjU[ff, n]];
  c = Table[0, {l, 0, n + χ}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/σjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] σjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = 1/σjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp)];
  Return[c]
 ]
```

Схема 2.3.6. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $Q_{|\kappa|-1}(x)=\sum\limits_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m T_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x)=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|} T_{k-|\kappa|}(x), \tag{2.3.27}$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.27) в (2.3.24), с учетом формулы (2.2.25) получим

$$\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[A(x)Z(x)T_{k-|\kappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x} \right] =$$

$$= \sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[\mu_0^{(k)}T_0(x) + \mu_1^{(k)}T_1(x) + \ldots + \mu_k^{(k)}T_k(x) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x) + \sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m T_m(x).$$

Отсюда придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \mu_j^{(k)} c_{k-|\kappa|} = f_j, \qquad j = n, n-1, \ldots, |\,\kappa\,|, \tag{2.3.28}$$

где коэффициенты $\mu_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.26).

Из системы (2.3.28) обратным ходом метода Гаусса найдем неизвестные $c_{n-|\kappa|}, c_{n-|\kappa|-1}, \ldots, c_0$:

$$c_{n-|\kappa|} = \frac{f_n}{\mu_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\kappa|-l} = \frac{1}{\mu_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-|\kappa|-l+j}\,\mu_{n-l}^{(n-l+j)} \right],$$

$$l = 1, 2, \ldots, n - |\,\kappa\,|.$$

Листинг функции, реализующей схему 2.3.6 (файл «Fckmu.nb»)

Функция Fckμ.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.22) – решение системы (2.3.28): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: Fckμ[n_, κ_, ff_, pp_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.13): p_j, $j = |\,\kappa\,|, |\,\kappa\,| + 1, \ldots, n + |\,\kappa\,|$.

Используемые внешние функции:

μjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\mu_j^{(k)}$ разложения (2.2.25) по формуле (2.2.26).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*========== bkn ============*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++, mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = -(mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
(*============ Gμ ================*)
Gμ[M_, χ_, p_] := Module[{q, GM, r},
   q = Table[0, {k, 1, 3}];
   q[[1]] = If[M == 0, 1., 0];
   q[[2]] = If[M == 1, 0.5, 0];
   q[[3]] = If[M == 0, 0.5, If[M == 2, 0.25, 0]; ];
```

```
  GM = Sum[(p[[-2 χ - r + 2]] q[[r]]), {r, 1, -χ + 1}];
  Return[GM]
 ];
(*============ Hμ ================*)
Hμ[M_, χ_, p_] := Module[{b, Hz, r, M2},
  b = bkn[M - 1];
  M2 = Floor[(M - 1)/2];
  Hz = Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}];
  Return[Hz]
 ];
(*============ μjk ================*)
μjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{μ, t1, t2, hj},
  hj = If[j == 0, 1, 2];
  t1 = 0.5 Gμ[k + χ + j, χ, p];
  If[k > j - χ,
   t2 = 0.5 Gμ[k + χ - j, χ, p] + Hμ[k + χ - j, χ, p],
   If[k - j == -χ, t2 = 0.5 Gμ[0, χ, p],
    t2 = 0.5 Gμ[-k - χ + j, χ, p]]];
  μ = hj (t1 + t2);
  Return[μ]
 ];
(*========== fjT ============*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
  f = Table[0, {k, 0, n}];
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
  For[j = 1, j ≤ n, j++,
   f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
  Return[f]];
```

```
(*========== Fckμ ============*)
Fckμ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, l, j},
  f = fjT[ff, n];
  c = Table[0, {j, 0, n + χ}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / μjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] μjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = 1 / μjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp);
  ];
  Return[c]
 ]
```

Схема 2.3.7. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $Q_{|\kappa|-1}(x)=\sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m U_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x)=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|} T_{k-|\kappa|}(x), \tag{2.3.29}$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.29) в (2.3.24), с учетом формулы (2.2.21) получим

$$\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|} \left[A(x)Z(x)T_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)T_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x} \right]=$$

$$=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[\delta_0^{(k)}U_0(x)+\delta_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\delta_k^{(k)}U_k(x)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)+\sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m U_m(x).$$

Отсюда придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \delta_j^{(k)} c_{k-|\kappa|} = f_j, \quad j = n, n-1, \ldots, |\kappa|, \tag{2.3.30}$$

где коэффициенты $\delta_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.22).

Из системы (2.3.30) обратным ходом метода Гаусса найдем неизвестные $c_{n-|\kappa|}, c_{n-|\kappa|-1}, \ldots, c_0$:

$$c_{n-|\kappa|} = \frac{f_n}{\delta_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\kappa|-l} = \frac{1}{\delta_{n-l}^{(n-l)}} \left[f_{n-l} - \sum_{j=1}^{l} c_{n-|\kappa|-l+j} \delta_{n-l}^{(n-l+j)} \right],$$

$$l = 1, 2, \ldots, n - |\kappa|.$$

Листинг функции, реализующей схему 2.3.7 (файл «Fckdelta.nb»)

Функция Fckδ.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.29) – решение системы (2.3.30): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: Fckδ[n_, κ_, ff_, pp_].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.13): p_j, $j = |\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, n+|\kappa|$.

Используемые внешние функции:

δjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\delta_j^{(k)}$ разложения (2.2.21) по формуле (2.2.22).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}],
    a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    a[[1]] = 2.^(n-1);
    For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
     mm = n - 1. - 2 k;
     a[[k + 2]] = - (mm * (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
    Return[a]]
  ];
(*============ Hδ ================*)
Hδ[M_, χ_, p_] := Module[{a, M2, HM, r},
   a = akn[M];
   M2 = Floor[M/2];
   HM := Sum[(a[[r + 1]] * p[[M - 2 χ - 2 r + 2]]), {r, 0, M2}];
   Return[HM]];
(*============ Gδ ================*)
Gδ[M_, χ_, p_] := Module[{d, r, GM},
   d = Table[0, {k, 1, 3}];
   d[[1]] = If[M == 1, -0.5, 0];
   d[[2]] = If[M == 2, -0.25, 0];
   d[[3]] = If[Or[M == 1, M == 3], -0.125, 0];
   GM = Sum[(d[[r]] * p[[-2 χ - r + 2]]), {r, 1, -χ+1}];
   Return[GM]
  ];
```

```
(*============ δjk ================*)
δjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{δ},
   δ = -Gδ[k + χ + j + 1, χ, p] + If[j == k + χ - 1, Hδ[0, χ, p],
      If[j < k + χ - 1,
       2 Hδ[k + χ - j - 1, χ, p] + Gδ[k + χ - j - 1, χ, p],
       -Gδ[j - k - χ + 1, χ, p]]];
   Return[δ]];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
(*========== Fckδ ============*)
Fckδ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, j, l},
  f = fjU[ff, n];
  c = Table[0, {j, 0, n + χ}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/δjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] δjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = 1/δjk[n - l, n - l, χ, p] (f[[n - l + 1]] - temp);
  ];
  Return[c]
 ]
```

Схема 2.3.8. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $Q_{|\kappa|-1}(x)=\sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m T_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x)=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|} U_{k-|\kappa|}(x), \qquad (2.3.31)$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Подставляя (2.3.31) в (2.3.24), с учетом формулы (2.2.23) получим

$$\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[A(x)Z(x)U_{k-|\kappa|}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)U_{k-|\kappa|}(t)\frac{dt}{t-x}\right]=$$

$$=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}\left[\beta_0^{(k)}T_0(x)+\beta_1^{(k)}T_1(x)+\ldots+\beta_k^{(k)}T_k(x)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x)+\sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m T_m(x).$$

Отсюда придем к системе

$$\sum_{k=j}^{n} \beta_j^{(k)} c_{k-|\kappa|}=f_j, \qquad j=n, n-1, \ldots, |\kappa|, \qquad (2.3.32)$$

где коэффициенты $\sigma_j^{(k)}$ вычисляются согласно (2.2.24).

Из системы (2.3.32) обратным ходом метода Гаусса найдем неизвестные $c_{n-|\kappa|}, c_{n-|\kappa|-1}, \ldots, c_0$:

$$c_{n-|\kappa|}=\frac{f_n}{\beta_n^{(n)}},$$

$$c_{n-|\kappa|-l}=\frac{1}{\beta_{n-l}^{(n-l)}}\left[f_{n-l}-\sum_{j=1}^{l} c_{n-|\kappa|-l+j}\beta_{n-l}^{(n-l+j)}\right],$$

$$l=1, 2, \ldots, n-|\kappa|.$$

Листинг функции, реализующей схему 2.3.8 (файл «Fck_beta.nb»)

Функция Fckβ.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.3.31) – решение системы (2.3.32): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: Fckβ[$n\_$, $\kappa\_$, $ff\_$, $pp\_$].

Параметры:

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

pp – коэффициенты разложения (1.1.13): p_j, $j = |\kappa|, |\kappa|+1, \ldots, n+|\kappa|$.

Используемые внешние функции:

βjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\beta_j^{(k)}$ разложения (2.2.23) по формуле (2.2.24).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
  If[n ≤ 1, Return[{1.}],
   a = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm * (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]]
  ];
```

```
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
   If[l ≥ Floor[M/2], Return[1]];
   a = akn[M];
   rez = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
   Return[rez]];
(*============ Gβ ================*)
Gβ[M_, χ_, p_] := Module[{l, rez, M2},
   M2 = Floor[(M - χ - 1)/2];
   rez = Sum[(rβ[l, M] p[[M + 2 Abs[χ] - 2 l]]), {l, 1, M2}];
  ];
(*============ Hβ ================*)
Hβ[M_, χ_, p_] := Module[{d1, HM},
   d1 = If[M == 1, -0.5, 0];
   HM = If[χ == -1, 0, 0.5 (p[[-χ + 1]] d1)];
   Return[HM]];
(*============ βjk ================*)
βjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{β, hj},
   hj = If[j == 0, 1, 2];
   If[And[j == k, χ == -1], β = 1,
    If[And[k ≥ j + 1, χ == -1], β = Gβ[k - j, χ, p],
     If[And[j < k - 1, χ = -2],
      β = Hβ[k - 1 + j, χ, p] + Hβ[k - 1 - j, χ, p] +
        Gβ[k - 1 - j, χ, p],
      If[And[j == k - 1, χ = -2],
       β = Hβ[k - 1 + j, χ, p] + 0.5 Gβ[0, χ, p],
       β = Hβ[k - 1 + j, χ, p] - Hβ[1 - k + j, χ, p]] ]]
   ];
   Return[β hj]];
```

```
(*========== fjT ============*)
fjT[fu_, n_] := Module[{ft, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   ft[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]]), {k, 1, n+1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j++,
    ft[[j + 1]] = 2/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n+1}]];
   Return[ft]
  ];
(*========== Fckβ ============*)
Fckβ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, j, l, temp},
  f = fjT[ff, n];
  c = Table[0, {j, 0, n + χ}];
  c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / βjk[n, n, χ, p];
  For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
   temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] βjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
   c[[n + χ - l + 1]] = (f[[n - l + 1]] - temp) / βjk[n - l, n - l, χ, p]];
  Return[c]
 ]
```

2.3.4. Модельные примеры

Приведем результаты численного решения модельных сингулярных интегральных уравнений.

Решение в классах функций с отрицательным индексом

Рассмотрим уравнение (1.1.1)

$$a(x)\phi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}b(t)\phi(t)\frac{dt}{t-x}=f(x),\ -1<x<1,$$

в котором

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}\dfrac{1+E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\end{cases}\qquad E(x)=e^{2\pi i w x},$$

$$b(x)=\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)=\frac{1}{x-2}.$$

Класс $h(-1,1)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(-1,1)$ и $w=\left(-\frac{2}{5}-i\right)$.

Используя результат работы программы Fк для заданных коэффициентов $a(x)$, $b(x)$ и второго класса, получим $\kappa_1=-1, \kappa_2=-1, \kappa=-2$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(-1,1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left[2+x\left(\pi i+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z)=(z^2-1)\,e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x)=\left[a(x)+b(x)\right]X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x)=(x^2-1)\,e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^+(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi iw}, & x=0,\\ \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим уравнение

$$A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=f(x),$$

при

$$f(x)=\frac{X2}{x-2}+x+2,$$

$$X2=3\,e^{2w(1-\ln 3)}=3{,}183324033245894+0{,}6360987615456231i,$$

точным решением которого является функция

$$u(x)=\frac{1}{x-2}.$$

Для численного решения данного уравнения надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z)$. Получим их, используя функцию Fp.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.5–2.3.8, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.8 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\beta_X_O\Xar_M1_M1_beta.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.5 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\sigma_X_O\Xar_M1_M1_sigma.nb**;
- схемы 2.3.6 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\mu_X_O\Xar_M1_M1_mu.nb**;
- схемы 2.3.7 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\delta_X_O\Xar_M1_M1_delta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1,1)$ с использованием схемы 2.3.8

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}]];

(*==============Fp================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
   (*================================*)
   FunEΓz := Module[{ r, d, α, k, j},
     fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
     fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
     d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = N[∫_{-1}^{1} (fg[t] t^k) ⅆt];
       d[[k + 1]] = (k + 1) r}];
     α = Table[1, {k, 1, n + 1}];
     For[j = 1, j ≤ n, j++, α[[j + 1]] = N[-1/j Sum_{k=0}^{j-1} (d[[j - k]] α[[k + 1]])]];
     Return[α]];
```

```
(*===============FunχM1iM1================*)
FunχM1iM1 := Module[{ α, mχ, q, j},
  α = FunEΓz;
  mχ = 2;
  q = Table[0, {k, 1, n + mχ + 1}];
  q[[mχ + 1]] = 1;
  q[[mχ + 2]] = α[[2]];
  For[j = 2, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] - α[[j - 1]]];
  Return[q]];
(*================================*)
p = FunχM1iM1;
Return[p]];

(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
  If[n ≤ 1, Return[{1}]];
  a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
  a[[1]] = 2.^(n-1);
  For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2 k;
   a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
  Return[a]];
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
  If[l ≥ Floor[M/2], Return[1]];
  a = akn[M];
  rez = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
  Return[rez]];
```

```
(*============ Gβ ================*)
Gβ[M_, χ_, p_] := Module[{rez, M2},
    M2 = Floor[(M - χ - 1)/2];
    rez = Sum[(rβ[l, M] p[[M - 2 χ - 2 l]]), {l, 0, M2}];
    Return[rez]];
(*============ Hβ ================*)
Hβ[M_, χ_, p_] := Module[{HM},
    HM = If[M == 1, -0.25, 0];
    Return[HM]
  ];
(*============ βjk ================*)
βjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{β, n, m},
    n = k - 1 + j;
    m = k - 1 - j;
    If[j < k - 1, β = Hβ[n, χ, p] + Hβ[m, χ, p] + Gβ[m, χ, p],
     If[j == k - 1, β = 0.5 p[[Abs[χ] + 2]], β = Hβ[n, χ, p] + 0.25]];
    Return[2 β]];
(*========== fjT ===========*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
    f = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
    f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
    For[j = 1, j ≤ n, j++,
     f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
    Return[f]];
```

```
(*========== Fckβ ============*)
Fckβ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, temp, j, l},
    f = fjT[ff, n];
    c = Table[0, {i, 1, n + χ + 1}];
    c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]] / βjk[n, n, χ, p];
    For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
      temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] βjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
      c[[n + χ - l + 1]] = (f[[n - l + 1]] - temp) / βjk[n - l, n - l, χ, p];];
    Return[c]];

(*============ UClenshaw ===========*)
UClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
    na = Length[a];
    b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
    For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
      b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
    y = b[[1]];
    Return[y]];
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
    x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
    Return[x]];

(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
    len = Length[x];
    y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
    Return[y]];
```

```
(*=============== FXiPlus ==============*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
      rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
      Return[rez]];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^(-χ1) (x + 1)^(-χ2) re;
   Return[r]];

(* * * * * Example           * * * * *)
r = -2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
X2 = 3 Exp[(-Log[3] + 1) 2 w];
f[x_] = X2/(x - 2.) + x + 2;
ut[x_] = 1/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 2];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];

χ1=-1 χ2=-1 χ=-2

nnn = 27;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];
```

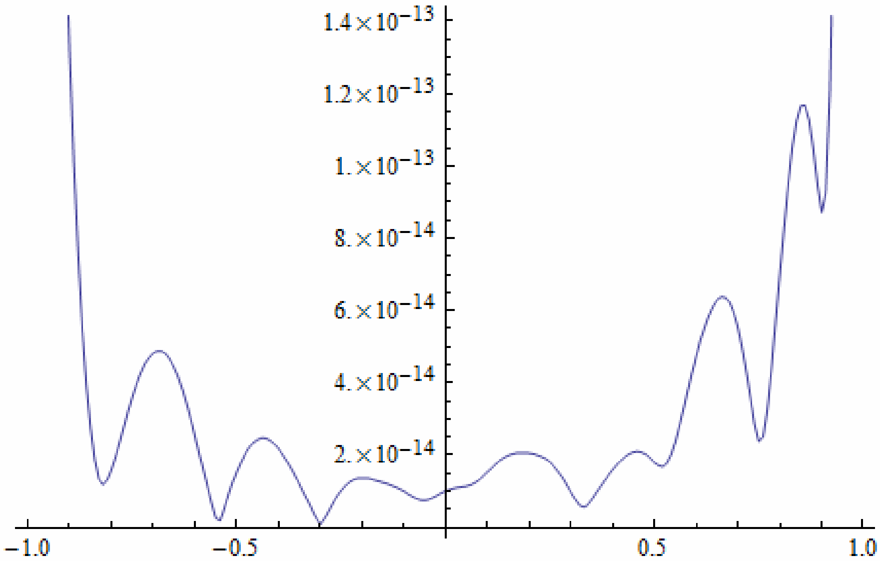
```
ckβ = Fckβ[nnn, χ, f, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = UClenshaw[ckβ, xx];

199

zz = uArr[ut, xx];
```

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

```
Print["eps=", Max[Abs[yy - zz]]];
```

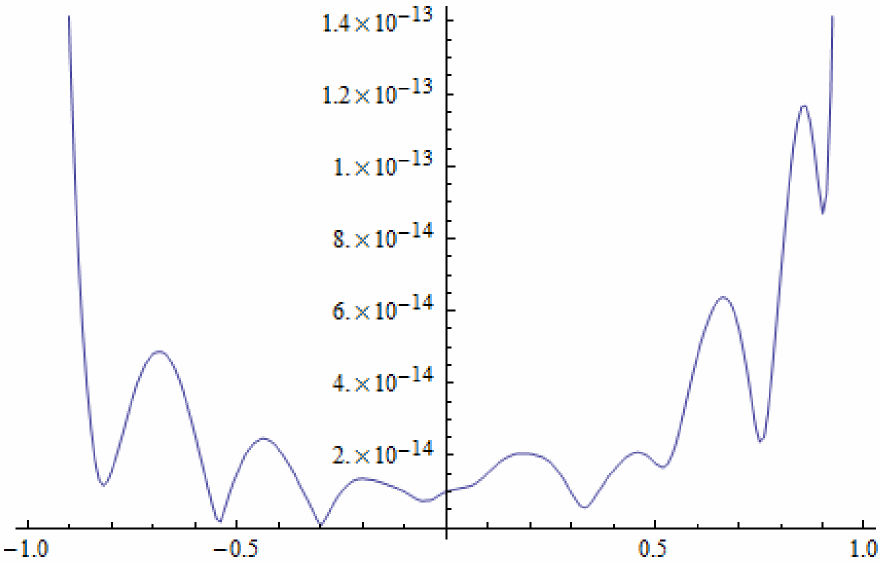
eps=9.59511×10^{-13}

```
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[(zz[[i]] - yy[[i]]) / zz[[i]]]},
  {i, 1, kk}]]
```




```
un[x_] := UClenshaw[ckβ, x];
ϕn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
```

```
ListLinePlot[
 Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 6 приведены оценки погрешности решения заданного уравнения для разных n.

Таблица 6

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\frac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	1,6e-4	3,4e-7	6,4e-10	9,6e-13	1,1e-12

Класс $h(-1)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(-1)$ и $w = \left(-\frac{2}{5} - i\right)$.

Используя результат работы программы Fк для заданных коэффициентов $a(x), b(x)$ и второго класса, получим $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = -1, \kappa = -1$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(-1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

$$\Gamma(z) = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{t - z} dt = \left(-\frac{2}{5} - i\right)\left(2 + z \ln \frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x) = \left(-\frac{2}{5} - i\right)\left[2 + x\left(\pi i + \ln \frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z) = (z+1)\, e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x) = [a(x) + b(x)] X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x) = (x+1)\, e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x) = \frac{Z(x) u(x)}{a^2(x) - b^2(x)} = \frac{X^{+}(x) u(x)}{a(x) - b(x)},$$

где

$$a(x) - b(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i w}, & x = 0, \\ \dfrac{2x}{x+2} \dfrac{E(x)}{1 - E(x)}, & x \neq 0, \end{cases}$$

рассмотрим уравнение

$$A(x) Z(x) u(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} B(t) Z(t) u(t) \frac{dt}{t - x} = f(x),$$

при

$$f(x) = \frac{X2}{x-2} + 1,$$

$$X2 = 3e^{2w(1 - \ln 3)} = 3{,}183324033245894 + 0{,}636098761545623 1i,$$

точным решением которого является функция

$$u(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Для численного решения данного уравнения надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z)$. Получим их, используя функцию Fp.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.5–2.3.8, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.8 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\beta_X_O\Xar_0_M1_beta.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.5 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\sigma_X_O\Xar_0_M1_sigma.nb**;
- схемы 2.3.6 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\mu_X_O\Xar_0_M1_mu.nb**;
- схемы 2.3.7 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\delta_X_O\Xar_0_M1_delta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1)$ с использованием схемы 2.3.8

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}]];
```

```
(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
  (*================================*)
  FunEΓz := Module[{ r, d, α, k, j},
    fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
    fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
    d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = N[∫_{-1}^{1} (fg[t] t^k) ⅆt];
      d[[k + 1]] = (k + 1) r}];
    α = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    α[[1]] = 1.;
    For[j = 1, j ≤ n, j++,
      {α[[j + 1]] = N[-1/j Sum_{k=0}^{j-1} (d[[j - k]] α[[k + 1]])]}];
    Return[α];
  ];
  (*===============Funχ0iM1================*)
  Funχ0iM1 := Module[{ α, mχ, q, j},
    α = FunEΓz;
    mχ = 1;
    q = Table[0, {k, 1, n + mχ + 1}];
    q[[mχ + 1]] = 1;
    For[j = 1, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] + α[[j]]];
    Return[q];
  ];
  (*================================*)
  p = Funχ0iM1;
  Return[p]
];
```

```
(*=========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
   If[l ≥ Floor[M/2], Return[1.]];
   a = akn[M];
   rez = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
   Return[rez]];
(*============ Gβ ================*)
Gβ[M_, χ_, p_] := Module[{rez, M2},
   M2 = Floor[(M - χ - 1)/2];
   rez = Sum[(rβ[l, M] p[[M - 2 χ - 2 l]]), {l, 0, M2}];
   Return[rez]];
(*============ βjk ================*)
βjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{β, hj, n, m},
   If[j == k, β = 0.5, β = Gβ[k - j, χ, p]];
   Return[2 β]];
```

```mathematica
(*========== fjT ===========*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
   f = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j++,
    f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   Return[f]];
(*========== Fckβ ===========*)
Fckβ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, temp, j, l},
   f = fjT[ff, n];
   c = Table[0, {i, 1, n + χ + 1}];
   c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/βjk[n, n, χ, p];
   For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
    temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] βjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
    c[[n + χ - l + 1]] = (f[[n - l + 1]] - temp)/βjk[n - l, n - l, χ, p] ;];
   Return[c]];

(*============ UClenshaw ==========*)
UClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
   na = Length[a];
   b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
   For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
    b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
   y = b[[1]];
   Return[y]];
```

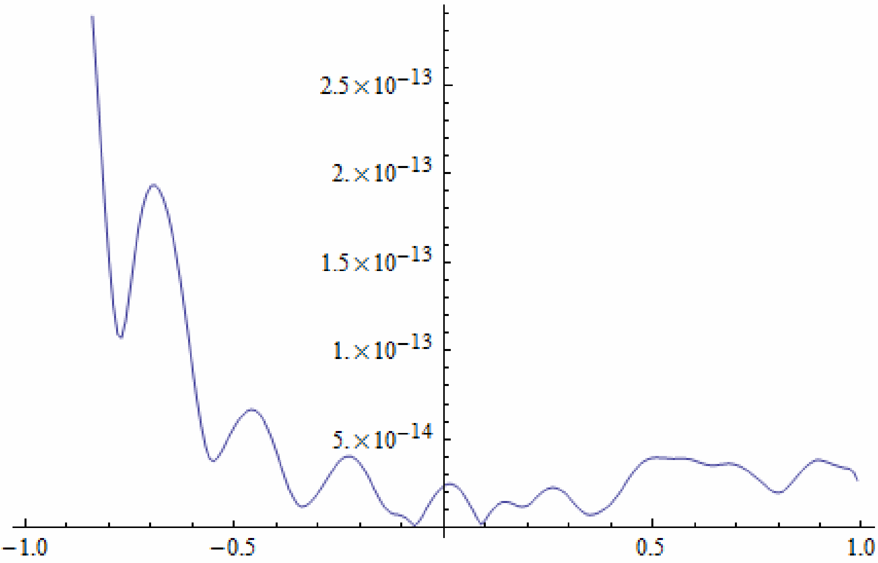
```
(*============ UClenshaw ===========*)
UClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
   na = Length[a];
   b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
   For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
    b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
   y = b[[1]];
   Return[y]];
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]];

(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y]];
(***************** FXiPlus ****************)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
     fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
     fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
     rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
     Return[rez]];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 re;
   Return[r]
  ];

 (* * * * * Example          * * * * *)
 r = -2/5;
 w = r - ⅈ;
 fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
```

```
fD[x_] = (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π i w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
X2 = 3 Exp[(-Log[3] + 1) 2 w];
f[x_] = X2/(x - 2.) + 1;
ut[x_] = 1/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 3];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];

χ1=0 χ2=-1 χ=-1

nnn = 27;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];

ckβ = Fckβ[nnn, χ, f, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = UClenshaw[ckβ, xx];

199

zz = uArr[ut, xx];
```

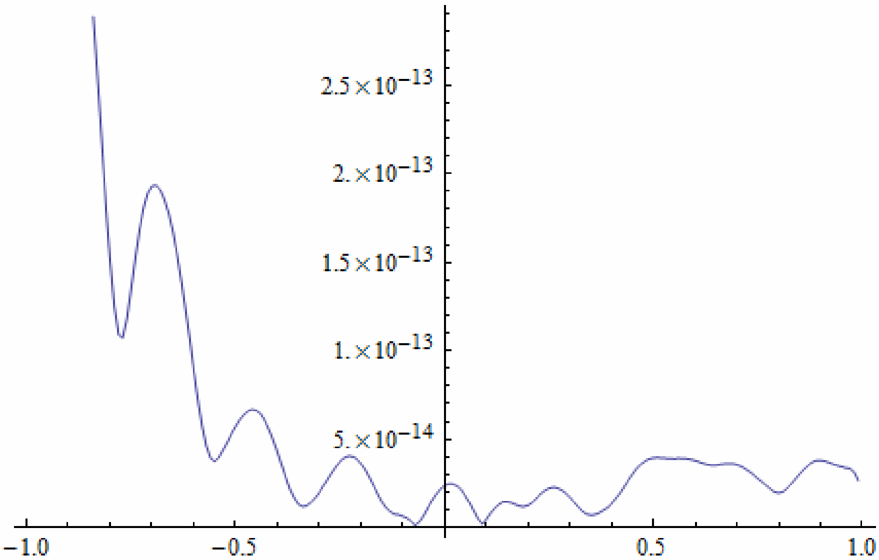
Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

```
Print["eps=", Max[Abs[yy - zz]]];

eps=8.63642×10^-13
```

```
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[(zz[[i]] - yy[[i]]) / zz[[i]]]},
  {i, 1, kk}]]
```




```
un[x_] := UClenshaw[ckβ, x];
φn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
φ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
tt = Table[{xx[[i]], Abs[(φ[xx[[i]]] - φn[xx[[i]]]) / φ[xx[[i]]]]},
   {i, 1, kk}];
ListLinePlot[tt]
```



В табл. 7 приведены оценки погрешности решения заданного уравнения для разных n.

Таблица 7

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\frac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	3,1e-4	6,7e-7	1,3e-9	8,6e-13	2,1e-12

Класс $h(1)$.

Пусть решение данного уравнения принадлежит классу $h(1)$ и $w=\left(-\frac{2}{5}-i\right)$.

Используя результат работы программы Fк для заданных коэффициентов $a(x), b(x)$ и второго класса, получим $\kappa_1=-1, \kappa_2=0, \kappa=-1$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(1)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

Обозначим $g(x)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}$. Тогда $g(x)=wx$ при $w=\left(-\frac{2}{5}-i\right)$.

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=\left(\frac{2}{5}-i\right)\left[2+x\left(\pi i+\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

$$X(z)=(z-1)e^{\Gamma(z)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]X^{+}(x),$$

$$X^{+}(x)=(x-1)\,e^{\Gamma^{+}(x)}.$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

где

$$a(x)-b(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi i w}, & x=0,\\ \dfrac{2x}{x+2}\dfrac{E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\end{cases}$$

рассмотрим уравнение

$$A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}=f(x),$$

при

$$f(x)=\frac{X2}{x-2}+1,$$

$$X2=e^{2w(1-\ln 3)}=1{,}0611080110819646+0{,}21203292051520767i,$$

точным решением которого является функция

$$u(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Для численного решения данного уравнения надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z)$. Получим их, используя функцию Fp.

Используя разработанные выше модули и схемы 2.3.5–2.3.8, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.3.8 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\beta_X_O\Xar_M1_0_beta.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.3.5 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\sigma_X_O\Xar_M1_0_sigma.nb**;
- схемы 2.3.6 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\mu_X_O\Xar_M1_0_mu.nb**;
- схемы 2.3.7 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_X\delta_X_O\Xar_M1_0_delta.nb**.

Программа решения характеристического сингулярного интегрального уравнения в классе $h(1)$ с использованием схемы 2.3.8

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π i) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}]];
```

```
(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{p},
  (*================================*)
  FunEΓz := Module[{r, d, α, k, j},
    fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
    fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
    d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    For[k = 0, k ≤ n, k++, {r = N[∫_{-1}^{1} (fg[t] t^k) ⅆt];
      d[[k + 1]] = (k + 1) r}];
    α = Table[0, {k, 1, n + 1}];
    α[[1]] = 1;
    For[j = 1, j ≤ n, j++,
      {α[[j + 1]] = N[-1/j Sum[(d[[j - k]] α[[k + 1]]), {k, 0, j - 1}]]}];
    Return[α]];
  (*===============FunχM1i0================*)
  FunχM1i0 := Module[{α, mχ, q, j},
    α = FunEΓz;
    mχ = 1;
    q = Table[0, {k, 1, n + mχ + 1}];
    q[[1]] = 0;
    q[[mχ + 1]] = 1;
    For[j = 1, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] - α[[j]]];
    Return[q]];
  (*================================*)
  p = FunχM1i0;
  Return[p]];
```

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
   If[l ≥ Floor[M/2], Return[1]];
   a = akn[M];
   rez = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
   Return[rez]];
(*============ Gβ ================*)
Gβ[M_, χ_, p_] := Module[{rez, M2},
   M2 = Floor[(M - χ - 1)/2];
   rez = Sum[(rβ[l, M] p[[M - 2 χ - 2 l]]), {l, 0, M2}];
   Return[rez]];
(*============ βjk ================*)
βjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{β, hj, n, m},
   If[j == k, β = 0.5, β = Gβ[k - j, χ, p]];
   Return[2 β]];
```

```
(*========== fjT ============*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
   f = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j++, f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   Return[f]];
(*========== Fckβ ============*)
Fckβ[n_, χ_, ff_, p_] := Module[{f, c, temp, j, l},
   f = fjT[ff, n];
   c = Table[0, {i, 1, n + χ + 1}];
   c[[n + χ + 1]] = f[[n + 1]]/βjk[n, n, χ, p];
   For[l = 1, l ≤ n + χ, l++,
    temp = Sum[(c[[n + χ - l + j + 1]] βjk[n - l, n - l + j, χ, p]), {j, 1, l}];
    c[[n + χ - l + 1]] = (f[[n - l + 1]] - temp)/βjk[n - l, n - l, χ, p];];
   Return[c]];

(*============ UClenshaw ===========*)
UClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
   na = Length[a];
   b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
   For[k = na - 1, k ≥ 0, k--, b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
   y = b[[1]];
   Return[y]];
```

```
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]];

(*============ uArr ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y]];
(*=============== FXiPlus =============*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
     fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx]) / (a[xx] + b[xx])];
     fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
     rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
     Return[rez];];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^(-χ1) (x + 1)^(-χ2) re;
   Return[r]];

(* * * * * Example Klass h(1) * * * * *)
(*          Function              * * * * *)
r = -2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] = Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] = (1. + fE[x]) / (1 - fE[x]);
fa[x_] = If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] = x/(x + 2.);
X2 = Exp[(-Log[3] + 1) 2 w];
f[x_] = X2/(x - 2.) + 1;
```

```
ut[x_] = 1/(x - 2);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 4];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
```

```
χ1=-1 χ2=0 χ=-1
```

```
nnn = 25;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2, 2 nnn + χ];

ckβ = Fckβ[nnn, χ, f, pp];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
yy = UClenshaw[ckβ, xx];
```

```
199
```

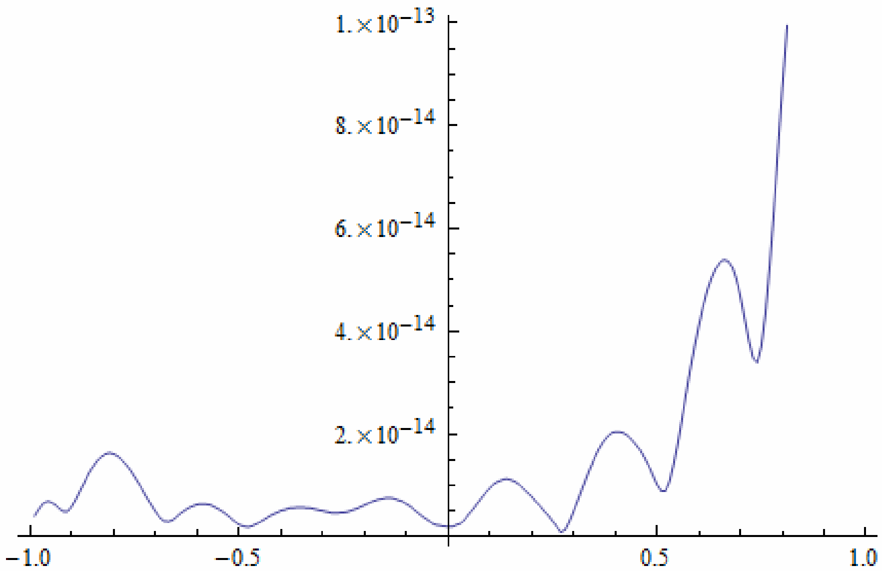
```
zz = uArr[ut, xx];
```

Погрешность приближенного решения в точках из отрезка [-1; 1]

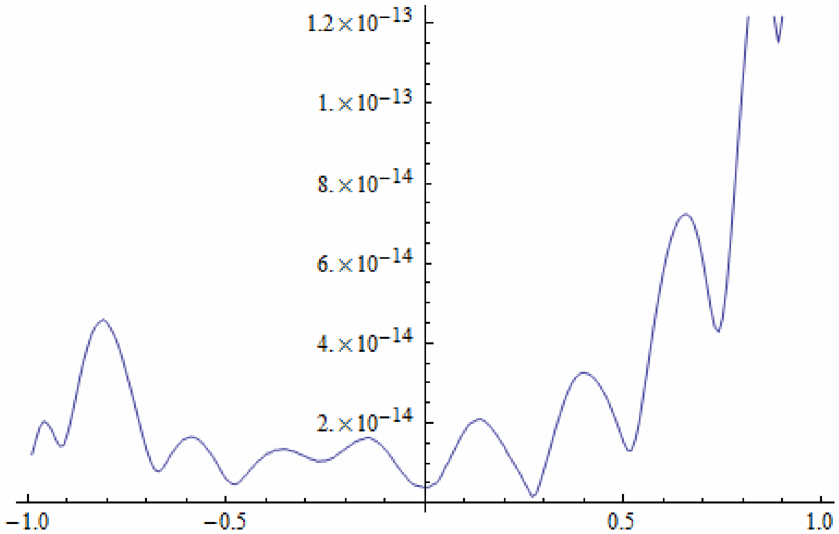
```
Print["eps=", Max[Abs[yy - zz]]];
```

$eps=1.04391\times10^{-12}$

```
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[zz[[i]] - yy[[i]]]}, {i, 1, kk}]]
```




```
un[x_] := UClenshaw[ckβ, x];
ϕn[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) un[x];
ϕ[x_] := FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, x] / (fa[x] - fb[x]) ut[x];
ListLinePlot[Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
  {i, 1, kk}]]
```



В табл. 8 приведены оценки погрешности решения заданного уравнения для разных n.

Таблица 8

n	10	15	20	25	30
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\dfrac{\varphi(x)-\varphi_n(x)}{\varphi(x)}\right\rvert$	1,0e-4	2,2e-7	4,2e-10	1,0e-12	9,3e-13

2.4. Приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения

При построении приближенного решения полного сингулярного интегрального уравнения (1.1.1) использованы полученные алгоритмы для приближенного решения характеристического уравнения.

Предварительно рассмотрим два следующих способа интерполирования функций двух переменных, полученных из формул (2.3.2), (2.3.3):

$$k_{n,n}(x,\, t) = \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} T_j(t),$$

$$\sigma_{mj} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) k(x_l,\, x_r),$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2 & i > 0, \end{cases}$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{2.4.1}$$

и

$$k_{n,n}(x,t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} T_j(t),$$

$$\sigma_{mj} = \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} (T_m(x_l) - \nu_m T_{m+2}(x_l)) k(x_l, x_r),$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases}$$

$$\nu_m = \begin{cases} 1, & 0 \le m \le n-2, \\ 0 & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{2.4.2}$$

которые используются при построении вычислительных схем.

Листинг функции, реализующей схему 2.4.1 (файл «sigma_mj_TT.nb»)

Функция σmjTT.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $\sigma_{m,j}$, $m=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$, по формуле (2.4.1).

Прототип: σmjTT[$fk\_,n\_$].

Параметры:

n – степень многочлена $k_{n,n}$,

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $\sigma_{m,j}$, $m=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$, по формуле (2.4.1).

Реализация в Mathematica

```
(*========= σmjTT ===========*)
σmjTT[fk_, n_] := Module[{x, T, σ, m, k, j, r, l, S, s, δm, δj},
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
  σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
  For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
   For[k = 1, k ≤ n + 1, k++, T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
  For[m = 0, m ≤ n, m++,
   δm = If[m == 0, 1., 2.];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    δj = If[j == 0, 1., 2.];
    S = 0;
    For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
     s = 0;
     For[l = 1, l ≤ n + 1, l++, s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] T[[m + 1, l]]];
     S = S + s T[[j + 1, r]]];
    σ[[m + 1, j + 1]] = (δm δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
  Return[σ]];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.2 (файл «sigma_mj_UT.nb»)

Функция σmjUT.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $\sigma_{m,j}$, $m=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$, по формуле (2.4.2).

Прототип: σmjUT[$fk\_,n\_$].

Параметры:

n – степень многочлена $k_{n,n}$,

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $\sigma_{m,j}$, $m=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$, по формуле (2.4.2).

Реализация в Mathematica

```
(*========= σmjUT ===========*)
σmjUT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, υm, δj},
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
  σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
  For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
   For[k = 1, k ≤ n + 1, k++, T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
  For[m = 0, m ≤ n, m++,
   υm = If[Or[m == n, m == n - 1], 0, 1];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    δj = If[j == 0, 1., 2.];  S = 0;
    For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
     s = 0;
     For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
      s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] (T[[m + 1, l]] - υm T[[ m + 3, l]])];
     S = S + s T[[j + 1, r]]];
    σ[[m + 1, j + 1]] = (δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
  Return[σ]];
```

2.4.1. Решение полного уравнения в классах с неотрицательным индексом

Пусть индекс κ характеристического оператора K^0 неотрицателен. Приближенное решение задачи (2.1.5) найдем как решение задачи

$$K^0(u_{n+\kappa}(x);x)+k(u_{n+\kappa}(x);x)=f_n(x),\quad -1<x<1,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u_{n+\kappa}(t)t^{j-1}dt=\alpha_j,\qquad j=1,\ldots,\kappa, \tag{2.4.3}$$

где

$$K^0\big(u_{n+\kappa}(x);x\big)=A(x)Z(x)u_{n+\kappa}(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\,u_{n+\kappa}(t)\frac{dt}{t-x},$$

$$k\big(u_{n+\kappa}(x);x\big)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}k_{n,n}(x,t)\,u_{n+\kappa}(t)dt,$$

$f_n(x), k_{n,n}(x,t)$ и $u_{n+\kappa}(x)$ – некоторые многочлены, которые будем однозначно определять при построении вычислительных схем, α_j – заданные числа.

Сначала рассмотрим упрощение оператора $k(u_{n+\kappa}(x);x)$ в (2.4.3), так как для характеристического оператора $K^0(u_{n+\kappa}(x);x)$ будем использовать предыдущие результаты.

В оператор $k(u_{n+\kappa}(x);x)$ подставим, например, (2.4.1) и возьмем

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_kU_k(x).$$

Получим следующее:

$$k\big(u_{n+\kappa}(x);x\big)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)\,u_{n+\kappa}(t)dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_j(t)\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_kU_k(t)dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_j(t)U_k(t)dt=\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{k=0}^{n+\kappa}c_k\Omega_{mk},$$

$$\Omega_{mk}=\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_k(t)T_j(t)dt.$$

Далее можно использовать соотношения

$$2T_n(x)U_m(x) = U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x),$$

$$2T_n(x)T_m(x) = T_{m-n}(x) + T_{m+n}(x)$$

и упростить Ω_{mk}.

Здесь мы столкнулись с вычислением интеграла вида

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_M(t)dt,$$

где $P_M(x)$ – некоторый многочлен степени $M \ge 0$.

Укажем способ его вычисления для нашего случая, когда $b(x)$ – рациональная функция.

Правило 1. В целях вычисления данного интеграла обратимся к вспомогательному

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{X(\varsigma)-X(0)}{b(\varsigma)}P_M(\varsigma)d\varsigma = \operatorname*{R}es_{z=\infty}\left[\frac{X(z)-X(0)}{b(z)}P_M(z)\right], \quad M = 0,1,\ldots,$$

где Λ, замкнутый контур, окружающий отрезок $[-1,1]$ с положительным направлением по движению часовой стрелки. Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,1]$, придем к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{X^+(t)-X(0)}{b(t)}P_M(t)dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{X^-(t)-X(0)}{b(t)}P_M(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(-2)}{b(t)}\frac{b(t)Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_M(t)dt = -\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_M(t)dt =$$

$$= \operatorname*{R}es_{z=\infty}\left[\frac{\mathrm{X}(z)-X(0)}{b(z)}P_M(z)\right].$$

Для вычисления вычета нужно далее получить разложение входящих сюда функций, выполнить перемножение рядов и определить вычет.

Построим далее следующие вычислительные схемы.

Схема 2.4.1. Пусть $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $k_{n,n}(x,t) =$ $= \sum_{m=0}^{n} U_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.2), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x) = \sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k U_k(x), \tag{2.4.4}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \rho_m^{(k)} c_{k+\kappa} + \sum_{k=0}^{n+\kappa} \Omega_{mk} c_k = f_m, \qquad m = n, n-1, \ldots, 0,$$

$$\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} I_{kj} c_k = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, \kappa, \tag{2.4.5}$$

где f_m определены в (2.3.3), коэффициенты $\rho_j^{(k)}$ определены в (2.2.14),

$$\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} U_k(t) T_j(t) dt,$$

$$I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)}, \tag{2.4.6}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2), коэффициенты Ω_{mk} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk} из (2.4.6) (файл «Omega_UTU_P.nb»)

Функция ΩUTUP.
Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk} из (2.4.6).
Прототип: $\Omega\mathrm{UTUP}[fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_]$.
Параметры:
fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,
n – количество коэффициентов,
κ – индекс задачи линейного сопряжения,
$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,
pp – коэффициенты разложения (1.1.12): $p_j,\ j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.
Возвращаемое значение: коэффициенты Ω_{mk} из (2.4.6).

Реализация в Mathematica

```
(*========= bkn ===========*)
bkn[n_] := Module[{mm},
    If[n == 0 , Return[{1.}]];
    b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    b[[1]] = 2.^n;
    For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
     mm = n + 1. - 2 k;
     b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
    Return[b]
   ];
(*========= σmjUT ===========*)
σmjUT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, υm, δj},
    x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
    T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
    σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
    For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
     For[k = 1, k ≤ n + 1, k++,
      T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
    For[m = 0, m ≤ n, m++,
     υm = If[Or[m == n, m == n - 1], 0, 1];
     For[j = 0, j ≤ n, j++,
      δj = If[j == 0, 1., 2.];
      S = 0;
      For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
       s = 0;
       For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
        s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] (T[[m + 1, l]] - υm T[[ m + 3, l]])];
       S = S + s T[[j + 1, r]]];
      σ[[m + 1, j + 1]] = (δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
    Return[σ]];
```

```
(*========= ΩUTUP ===========*)
ΩUTUP[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, z0, Ω},
   (*================================*)
   FI2[M_] := Module[{b, mm, k1, m2, kk, hh, S, s},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
(*================================*)
r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
σ = σmjUT[fk, n];
For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
 r2[[m + 1]] = FI2[m]];
For[m = 0, m ≤ n, m++,
 For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
  ss = 0;
  For[j = 0, j ≤ n, j++,
   z0 = r2[[k + j + 1]];
   z = z0;
   If[k ≥ j, z = z0 + r2[[k - j + 1]]];
   If[k < j - 1, z = z0 - r2[[-k + j - 1]]];
   ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z];
  Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2]];
Return[Ω]];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.1 (файл «Fckrho_P.nb»)

Функция FckρP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.4) – решение системы (2.4.5): $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: FckρP[$ff\_, n\_, \kappa\_, \alpha j\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \ldots, \kappa$,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.6), полученных по модулю ΩUTUP, описанному выше.

Используемые внешние функции:

ρjk$[j, k, p, \kappa]$ – вычисляет коэффициент $\rho_j^{(k)}$ разложения (2.2.13) по формуле (2.2.14).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== bkn ===========*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = -(mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
(*============ Hρ ================*)
Hρ[M_, χ_, p_] := Module[{δ, b, M2, r, h},
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1 + (1 - χ) δ)/2];
   h = If[M == 0, 0, Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}]];
   Return[h]];
```

```
(*============ ρjk ================*)
ρjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{ρ},
   If[χ == 0, ρ = 2 Hρ[k - j, χ, p] +
      If[k - j == 0, 1, 0], ρ  = 2 Hρ[k + χ - j, χ, p]];
   Return[ρ]];
(*========== Ikjρ ============*)
Ikjρ[k_, j_, χ_, p_] := Module[{b, z, M2},
   b = bkn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] b[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
```

```
(******************* FckρP ************)
FckρP[ff_, n_, χ_, αj_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
   (*====================================*)
   aSyst := Module[{aM, m, j, k},
     aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {j, 1, n + χ + 1}];
     For[m = 0, m ≤ n, m++,
      For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + 1, k + 1]] = Ω[[m + 1, k + 1]]];
      For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + 1, k + 1]] = aM[[m + 1, k + 1]] + ρjk[m, k - χ, χ, p]];
     ];
     For[j = 1, j ≤ χ, j++,
      For[k = χ - j, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[n + j + 1, k + 1]] = Ikjρ[k, j, χ, p]]
     ];
     Return[aM]
    ];
   (*====================================*)
   bSyst := Module[{bM, m, j, f},
     bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
     f = fjU[ff, n];
     For[m = 0, m ≤ n, m++,
      bM[[m + 1]] = f[[m + 1]]
     ];
     For[j = 1, j ≤ χ, j++,
      bM[[n + j + 1]] = αj[[j]]
     ];
     Return[bM]
    ];
   (*====================================*)
   aS = aSyst;
   bS = bSyst;
   rez = LinearSolve[aS, bS];
   Return[rez]
  ];
```

Схема 2.4.2. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $k_{n,n}(x,t)=$ $=\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.1), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k T_k(x), \tag{2.4.7}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$, имеет вид

$$\begin{gathered}\sum_{k=m}^{n}\gamma_m^{(k)}c_{k+\kappa}+\sum_{k=0}^{n+\kappa}\Omega_{mk}c_k=f_m, \qquad m=n, n-1, \ldots, 0,\\ \sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} I_{kj}c_k=\alpha_j, \qquad j=1, \ldots, \kappa,\end{gathered} \tag{2.4.8}$$

где f_m определены в (2.3.2), коэффициенты $\gamma_j^{(k)}$ определены в (2.2.16),

$$\begin{gathered}\Omega_{mk}=\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_k(t)T_j(t)dt,\\ I_{kj}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m}a_m^{(k)},\end{gathered} \tag{2.4.9}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1), коэффициенты Ω_{mk} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk} из (2.4.9) (файл «OmegaTTTP.nb»)

Функция ΩTTTP.

Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk} из (2.4.9).

Прототип: ΩTTTP[$fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_$].

Параметры:

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0, *pp* – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = к, к+1, \ldots, n+к$.

Возвращаемое значение: коэффициенты Ω_{mk} из (2.4.9).

Реализация в Mathematica

```
(*========= akn ===========*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0., {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm * (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
(*========= σmjTT ===========*)
σmjTT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, δm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++, T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    δm = If[m == 0, 1., 2.];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.]; S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++, s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++, s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] T[[m + 1, l]]];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δm δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
   Return[σ]
  ];
```

```
(*========= ΩTTTP ===========*)
ΩTTTP[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, ss, z, Ω},
   (*================================*)
   FI2[M_] := Module[{a, mm, k1, m2, kk, hh, S, s},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
 (*================================*)
 r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
 Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
 σ = σmjTT[fk, n];
 For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
  r2[[m + 1]] = FI2[m]];
 For[m = 0, m ≤ n, m++,
  For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
   ss = 0;
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    z = r2[[k + j + 1]] + r2[[Abs[k - j] + 1]];
    ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
   ];
   Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2]];
 Return[Ω]
];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.2 (файл «Fckgamma_P.nb»)

Функция FckγP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.7) – решение системы (2.4.8): $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: FckγP[$ff\_, n\_, \kappa\_, \alpha j\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,
αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \ldots, \kappa$,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,
pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.9), полученных по модулю ΩTTTP, описанному выше.

Используемые внешние функции:

γjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\gamma_j^{(k)}$ разложения (2.2.15) по формуле (2.2.16).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== bkn ============*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
(*============ Hγ ================*)
Hγ[M_, χ_, p_] := Module[{b, M2, h, δ, r},
   δ = If[χ == 0, 0, 1];
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1 + (1 - χ) δ)/2];
   h = If[M == 0, 0, Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}]];
   Return[h]];
```

```
(*============= γjk =================*)
γjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{γ},
   hj := If[j == 0, 1., 2.];
   q1[M_] := If[M == 0, 1., 0];
   If[χ == 0, γ = 0.5 (q1[k - j] + q1[k + j]) + Hγ[k - j, χ, p],
    γ = Hγ[k + χ - j, χ, p]];
   Return[hj γ]];
(*=========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*========== Ikjγ ============*)
Ikjγ[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
   a = akn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
(*=========== fjT ============*)
fjT[fu_, n_] := Module[{ft, x, j, k},
  ft = Table[0, {j, 1, n + 1}];
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  ft[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
  For[j = 1, j ≤ n, j++, ft[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
  Return[ft]];
```

```
(******************* FckγP ************)
FckγP[ff_, n_, χ_, αj_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
  (*===================================*)
  aSyst := Module[{aM, m, j, k},
    aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {j, 1, n + χ + 1}];
    For[m = 0, m ≤ n, m++,
     For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[m + 1, k + 1]] = Ω[[m + 1, k + 1]]];
     For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[m + 1, k + 1]] = aM[[m + 1, k + 1]] + γjk[m, k - χ, χ, p]];];
    For[j = 1, j ≤ χ, j++,
     For[k = χ - j, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[n + j + 1, k + 1]] = Ikjγ[k, j, χ, p]]];
    Return[aM]
   ];
  (*===================================*)
  bSyst := Module[{bM, m, j, f},
    bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
    f = fjT[ff, n];
    For[m = 0, m ≤ n, m++,
     bM[[m + 1]] = f[[m + 1]]];
    For[j = 1, j ≤ χ, j++,
     bM[[n + j + 1]] = αj[[j]]];
    Return[bM]
   ];
  (*===================================*)
  aS = aSyst;
  bS = bSyst;
  rez = LinearSolve[aS, bS];
  Return[rez]
 ];
```

Схема 2.4.3. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $k_{n,n}(x,t)=$ $=\sum\limits_{m=0}^{n} T_m(x)\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.1), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k U_k(x), \tag{2.4.10}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$, имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{n} \eta_m^{(k)} c_{k+\kappa} + \sum_{k=0}^{n+\kappa} \Omega_{mk} c_k = f_m, \qquad m = n, n-1, \ldots, 0, \\ &\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} I_{kj} c_k = \alpha_j, \qquad j = 1, \ldots, \kappa, \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

где f_m определены в (2.3.2), коэффициенты $\eta_j^{(k)}$ определены в (2.2.18),

$$\begin{aligned} &\Omega_{mk} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} U_k(t) T_j(t) dt, \\ &I_{kj} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m} b_m^{(k)}, \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1), коэффициенты Ω_{mk} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk} из (2.4.12) (файл «Omega_TTU_P.nb»)

Функция ΩTTUP.
Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk} из (2.4.12).
Прототип: ΩTTUP[$fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_$].
Параметры:
fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,
n – количество коэффициентов,
κ – индекс задачи линейного сопряжения,
$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,
pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.
Возвращаемое значение: коэффициенты из (2.4.12).

Реализация в Mathematica

```
(*========= bkn ===========*)
bkn[n_] := Module[{mm},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++, mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
(*========= σmjTT ===========*)
σmjTT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, δm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++, T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    δm = If[m == 0, 1., 2.];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.]; S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++, s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
       s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] T[[m + 1, l]]];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δm δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
   Return[σ]];
(*========= ΩTTUP ===========*)
ΩTTUP[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, z0, Ω},
   (*================================*)
   FI2[M_] := Module[{b, mm, k1, m2, kk, hh, S, s = 0},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
(*=================================*)
r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
 r2[[m + 1]] = FI2[m]
];
σ = σmjTT[fk, n];
For[m = 0, m ≤ n, m++,
 For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
  ss = 0;
  For[j = 0, j ≤ n, j++,
   z0 = r2[[k + j + 1]];
   z = z0;
   If[k ≥ j, z = z0 + r2[[k - j + 1]]];
   If[k < j - 1, z = z0 - r2[[-k + j - 1]]];
   ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z
  ];
  Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2
 ]
];
Return[Ω]
];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.3
(файл «Fcketa_P.nb»)

Функция FckηP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.10) – решение системы (2.4.11): $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: FckηP[$ff\_, n\_, \kappa\_, \alpha j\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,
κ – индекс задачи линейного сопряжения,
αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \ldots, \kappa$,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,
pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.12), полученных по модулю ΩTTUP, описанному выше.

Используемые внешние функции:

ηjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\eta_j^{(k)}$ разложения (2.2.17) по формуле (2.2.18).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
```

```
(*============ frη ================*)
frη[l_, M_] := Module[{a, r, m},
    If[l ≥ Floor[M/2], Return[1.]];
    a = akn[M];
    r = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
    Return[r]
  ];
(*============ ηjk ================*)
ηjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{η, hj, kj, l},
    hj = If[j == 0, 1, 2];
    kj = Floor[(k - j)/2];
    η = Sum[(frη[l, k + χ - j + 1] p[[k + χ - j - 2 l + 1]]), {l, 0, kj}];
    Return[η hj]
  ];
(*========== bkn ============*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
    If[n == 0 , Return[{1.}]];
    b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    b[[1]] = 2.^n;
    For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
     mm = n + 1. - 2 k;
     b[[k + 1]] = -(mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
    Return[b]];
```

```
(*========== Ikjη ============*)
Ikjη[k_, j_, χ_, p_] := Module[{b, z, M2, m},
   b = bkn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] b[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]];
(*========== fjT ============*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x, k, j},
   f = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
   For[j = 1, j ≤ n, j++,
    f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   Return[f]];
(****************** Fckηp ************)
FckηP[ff_, n_, χ_, αj_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
   (*==================================*)
   aSyst := Module[{aM, m, j, k},
     aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {j, 1, n + χ + 1}];
     For[m = 0, m ≤ n, m++,
      For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + 1, k + 1]] = Ω[[m + 1, k + 1]]];
      For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + 1, k + 1]] = aM[[m + 1, k + 1]] + ηjk[m, k - χ, χ, p]];
     ];
     For[j = 1, j ≤ χ, j++,
      For[k = χ - j, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[n + j + 1, k + 1]] = Ikjη[k, j, χ, p]]];
     Return[aM]
    ];
```

```
(*===================================*)
bSyst := Module[{bM, m, j, f},
  bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
  f = fjT[ff, n];
  For[m = 0, m ≤ n, m++,
   bM[[m + 1]] = f[[m + 1]]];
  For[j = 1, j ≤ χ, j++,
   bM[[n + j + 1]] = αj[[j]]];
  Return[bM]
 ];
(*===================================*)
aS = aSyst;
bS = bSyst;
rez = LinearSolve[aS, bS];
Return[rez]
];
```

Схема 2.4.4. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $k_{n,n}(x,t)=$ $=\sum_{m=0}^{n} U_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.2), $u_{n+\kappa}(x)$ ищется в виде

$$u_{n+\kappa}(x)=\sum_{k=0}^{n+\kappa} c_k T_k(x), \tag{2.4.13}$$

где c_k – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения $c_0, c_1, \dots, c_{n+\kappa}$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n}\alpha_m^{(k)}c_{k+\kappa}+\sum_{k=0}^{n+\kappa}\Omega_{mk}c_k=f_m, \qquad m=n, n-1, \dots, 0,$$

$$\sum_{k=\kappa-j}^{n+\kappa} I_{kj}c_k=\alpha_j, \qquad j=1,\dots,\kappa, \tag{2.4.14}$$

где f_m определены в (2.3.3), коэффициенты $\alpha_j^{(k)}$ определены в (2.2.12),

$$\Omega_{mk}=\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_k(t)T_j(t)dt,$$

$$I_{kj}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\kappa+j}{2}\right]} p_{k+j-2m}a_m^{(k)}, \tag{2.4.15}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2), коэффициенты Ω_{mk} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk} из (2.4.15)
(файл «Omega_UTT_P.nb»)

Функция ΩUTTP.
Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk} из (2.4.15).
Прототип: ΩUTTP[$fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_$].
Параметры:
fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,
n – количество коэффициентов,
κ – индекс задачи линейного сопряжения,
$X0$ – значение функции $X^{+}(x)$ в точке 0,
pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.
Возвращаемое значение: коэффициенты из (2.4.15).

Реализация в Mathematica

```
(*========= akn ===========*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0., {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++, mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
```

```
(*========= σmjUT ===========*)
σmjUT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, υm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++,
     T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]
    ]
   ];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    υm = If[Or[m == n, m == n - 1], 0, 1];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.];
     S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
      s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
       s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] (T[[m + 1, l]] - υm T[[ m + 3, l]])];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δj S)/((n + 1) (n + 1)) ];
   ];
   Return[σ]
  ];
(*=========== ΩUTTP ===============*)
ΩUTTP[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, Ω},
   (*====================================*)
   FI2[M_] := Module[{a, mm, k1, m2, kk, hh, S, s = 0},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
(*==================================*)
r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
 r2[[m + 1]] = FI2[m]];
σ = σmjUT[fk, n];
For[m = 0, m ≤ n, m++,
 For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
  ss = 0;
  For[j = 0, j ≤ n, j++,
   z = r2[[k + j + 1]] + r2[[Abs[k - j] + 1]];
   ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
  ];
  Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2;
 ]
];
Return[Ω]
];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.4 (файл «Fck_alpha_P.nb»)

Функция FckαP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.13) – решение системы (2.4.14): $c_0, c_1, \dots, c_{n+\kappa}$.

Прототип: $\text{Fck}\alpha\text{P}[ff\_, n\_, \kappa\_, \alpha j\_, X0\_, pp\_, \Omega\_]$.

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

αj – массив, содержащий значения α_j, $j = 1, \dots, \kappa$,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \dots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.15), полученных по модулю ΩUTTP, описанному выше.

Используемые внешние функции:

αjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\alpha_j^{(k)}$ разложения (2.2.11) по формуле (2.2.12).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n+\kappa}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
  If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
  a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
  a[[1]] = 2.^(n-1);
  For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
   mm = n - 1. - 2. k;
   a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
  Return[a]
 ];
(*=============== Hα ===============*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, h, r},
  a = akn[M];
  δ = If[χ == 0, 0, 1];
  M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
  h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
  Return[2 h]
 ];
```

```
(*============ αjk ================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
   If[And[j == k, k == 0, χ == 0] || And[j == k, χ == 1], α = 1,
    If[And[j == k, k ≠ 0, χ == 0], α = 0.5,
     If[And[j == k - 1, χ == 0], α = p[[χ + 2]],
      If[And[k - j ≥ 2, χ == 0],
       α = Hα[k - j - 1, χ, p] + If[k - j == 2, -0.5, 0],
       α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p]]]]];
   Return[α]
  ];
(*========== Ikjα ============*)
Ikjα[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
   a = akn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]
  ];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]];
```

```
(**************** FckαP ****************)
FckαP[ff_, n_, χ_, αj_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
  (*=====================================*)
  aSyst := Module[{aM, m, j, k},
    aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {j, 1, n + χ + 1}];
    For[m = 0, m ≤ n, m++,
     For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[m + 1, k + 1]] = Ω[[m + 1, k + 1]]];
     For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[m + 1, k + 1]] = aM[[m + 1, k + 1]] + αjk[m, k - χ, χ, p]];
    ];
    For[j = 1, j ≤ χ, j++,
     For[k = χ - j, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[n + j + 1, k + 1]] = Ikjα[k, j, χ, p]]];
    Return[aM]
   ];
  (*=====================================*)
  bSyst := Module[{bM, m, j, f},
    bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
    f = fjU[ff, n];
    For[m = 0, m ≤ n, m++,
     bM[[m + 1]] = f[[m + 1]]];
    For[j = 1, j ≤ χ, j++,
     bM[[n + j + 1]] = αj[[j]]];
    Return[bM]
   ];
  (*=====================================*)
  aS = aSyst;
  bS = bSyst;
  rez = LinearSolve[aS, bS];
  Return[rez]
 ];
```

2.4.2. Модельные примеры

Приведем результаты численного решения модельных полных сингулярных интегральных уравнений.

Решение в классах функций с неотрицательным индексом

Рассмотрим уравнение (1.1.1)

$$a(x)\phi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}b(t)\phi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k(x,t)\phi(t)dt=f(x),\ -1<x<1, \quad (2.4.16)$$

в котором

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}\dfrac{1+E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2\pi i\,(\frac{2}{5}-i)}, & x=0,\end{cases}\qquad E(x)=\exp\left[2\pi i\left(\frac{2}{5}-i\right)x\right],$$

$$b(x)=\frac{x}{x+2},\quad f(x)=\frac{2}{x-2},\quad k(x,t)=\frac{\mathrm{b}^*}{(x-2)(t+2)},$$

$$b^*=\frac{2}{\dfrac{X0}{X2}-1}=0{,}14468449705137537-0{,}26172888244714 64i,$$

$$X0=-e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)}=0{,}92615181699834+2{,}023678639573446i,$$

$$X2=3\ e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)}=129686{,}33740041449-231097{,}0508981945i.$$

Пусть $\phi(x)$ – решение уравнения (2.4.16), принадлежащее классу $h(0)$.

Используя результат работы программы Fк для заданного первого класса и данных коэффициентов $a(x), b(x)$, получим $\kappa_1=1$, $\kappa_2=1$, $\kappa=2$.

Вычислим $X(z)$ – каноническую функцию класса $h(0)$ задачи линейного сопряжения (1.1.5).

Как и ранее, обозначим $g(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}$. Тогда после элементарных упрощений получим $g(x)=wx$, $\quad w=\dfrac{2}{5}-i.$

$$\Gamma(z)=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-z}dt=g(1)\left(2+z\ln\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$\Gamma^{+}(x)=2g(1)+g(x)\left(\ln\frac{1-x}{1+x}+\pi i\right),$$

$$X(z)=\left(z-1\right)^{-\kappa_1}\left(z+1\right)^{-\kappa_2}e^{\Gamma(z)},$$

$$X^{+}(x)=(x-1)^{-\kappa_1}(x+1)^{-\kappa_2}e^{\Gamma^{+}(x)},$$

$$Z(x)=[a(x)+b(x)]\,X^{+}(x).$$

Полагая

$$\phi(x)=\frac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}=\frac{X^{+}(x)u(x)}{a(x)-b(x)},$$

рассмотрим задачу

$$A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)k(x,t)}{a^2(t)-b^2(t)}u(t)dt=f(x),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)u(t)t^{j-1}dt=2^{j-1},\quad j=1,2,\ -1<x<1, \tag{2.4.17}$$

решением которой является функция

$$u(x)=\frac{A^{*}}{x-2},$$

$$A^{*}=\frac{1}{X(2)}=3e^{\left(\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)}=3{,}183324033245894-0{,}636098761545623 1i.$$

Для численного решения задачи (2.4.17) надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z): p_{\kappa}, p_{\kappa+1},\ldots,\ \kappa\geq 0.$ Получим их, используя функцию Fp.

Вычисление функции $X^{+}(x)$ проведем, применяя модуль FXiPlus (листинг (2.3.18)).

Используя разработанные выше модули и схемы 2.4.1–2.4.4, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.4.4 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_P\alpha_P_P\Poln_P1_P1_alpha_Res.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.4.1 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_P\rho_P_P\Poln_P1_P1_rho_Res.nb**;
- схемы 2.4.2 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_P\gamma_P_P\Poln_P1_P1_gamma_Res.nb**;
- схемы 2.4.3 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NO_P\eta_P_P\Poln_P1_P1_eta_Res.nb**.

Программа решения полного сингулярного интегрального уравнения в классе $h(0)$ с использованием схемы 2.4.4

```
(*============= Fχ ==================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}];
  ];

(*============= Fp ==================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
   (*====================================*)
   FunEГz := Module[{ r, d, α},
     fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
     fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
     d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     For[k = 0, k ≤ n, k++,
      r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) ⅆt; d[[k + 1]] = (k + 1.) r];
     α = Table[1, {k, 1, n + 1}];
     For[j = 1, j ≤ n, j++, α[[j + 1]] = -1/j Sum[(d[[j - k]] α[[k + 1]]), {k, 0, j - 1}]];
     Return[α]];
```

```
(*================ FunχP1iP1 ================*)
FunχP1iP1 := Module[{ α, χ},
   α = FunEΓz;
   χ = 2;
   q = Table[0, {k, 1, n + χ + 1}];
   q[[χ + 1]] = 1.;
   For[k = 1, k ≤ n, k++,
    q[[χ + k + 1]] = Sum[(If[Mod[m, 2] == 1, 0, 1] α[[k - m + 1]]), {m, 0, k}]];
   Return[q];
  ];
 p = FunχP1iP1;
 Return[p]
];

(*========== FXi ============*)
FXi[a_, b_, χ1_, χ2_, z_] := Module[{re, r},
  Γz := Module[{rez, fG, fg},
    fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
    fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
    rez = fg[1.] (2 + z Log[(z - 1.)/(z + 1.)]);
    Return[rez]
   ];
  re = Exp[Γz];
  r = (z - 1)^-χ1 (z + 1)^-χ2 re;
  Return[r]];
```

```
(*============ FXiPlus ===============*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
      rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
      Return[rez];
    ];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 re;
   Return[r]];
(*========== Zab ============*)
Zab[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{rez},
   rez = FXiPlus[a, b, χ1, χ2, x]/(a[x] - b[x]);
   Return[rez]];

(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
```

```
(*================ Hα ================*)
Hα[M_, χ_, p_] := Module[{a, δ, M2, r, h},
    a = akn[M];
    δ = If[χ == 0, 0, 1];
    M2 = Floor[(M + (1 - χ) δ)/2];
    h = Sum[(a[[r + 1]] p[[M + 2 - 2 r]]), {r, 0, M2}];
    Return[2 h];
  ];
(*============ αjk =================*)
αjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{α},
    α = Hα[k + χ - j - 1, χ, p];
    Return[α]
  ];
(*========= σmjUT ===========*)
σmjUT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, υm, δj},
    x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
    T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
    σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
    For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
     For[k = 1, k ≤ n + 1, k++, T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
    For[m = 0, m ≤ n, m++,
     υm = If[Or[m == n, m == n - 1], 0, 1];
     For[j = 0, j ≤ n, j++,
      δj = If[j == 0, 1., 2.]; S = 0;
      For[r = 1, r ≤ n + 1, r++, s = 0;
       For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
        s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] (T[[m + 1, l]] - υm T[[ m + 3, l]])];
       S = S + s T[[j + 1, r]]];
      σ[[m + 1, j + 1]] = (δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
    Return[σ]];
```

```
(*============ ΩUTTP =================*)
ΩUTTP[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, Ω},
   (*====================================*)
   FI2[M_] := Module[{a, mm, k1, m2, kk, hh, S, s},
     a = akn[M];
     If[M < χ - 1, S = 0,
      {mm = Min[M, M + 1 - χ]; kk = Floor[mm / 2];
       S = Sum[(a[[k1 + 1]] p[[ M + 1 - 2 k1 + 1]]), {k1, 0, kk}]}];
     m2 = Floor[M/2];
     If[M == 2 m2, s = -X0 a[[m2 + 1]], s = 0];
     If[M < χ, Return[S + 2 s]];
     hh = Floor[(M - χ)/2];
     s = s + Sum[a[[k1 + 1]] p[[ M - 2 k1 + 1]], {k1, 0, hh}];
     Return[2 s + S]
    ];
  (*======================================*)
  r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
  Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
  For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++, r2[[m + 1]] = FI2[m]];
  σ = σmjUT[fk, n];
  For[m = 0, m ≤ n, m++,
   For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
    ss = 0;
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     z = r2[[k + j + 1]] + r2[[Abs[k - j] + 1]];
     ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z];
    Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2
   ]];
  Return[Ω]
 ];
```

```
(*========== Ikjα ===========*)
Ikjα[k_, j_, χ_, p_] := Module[{a, z, M2, m},
   a = akn[k];
   M2 = Floor[(k - χ + j)/2];
   z = Sum[(p[[k + 1 + j - 2 m]] a[[m + 1]]), {m, 0, M2}];
   Return[z]
  ];
(*========== fjU ===========*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x},
   ft = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   G = Table[0, {i, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    G[[j + 1]] = 1./(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]
    ];
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]
    ];
   Return[ft]
  ];
```

```
(*========== FckαP ============*)
FckαP[ff_, n_, χ_, αj_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
   (*=======================================*)
   aSyst := Module[{aM, m, j, k},
     aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {j, 1, n + χ + 1}];
     For[m = 0, m ≤ n, m++,
      For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + 1, k + 1]] = Ω[[m + 1, k + 1]]];
      For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + 1, k + 1]] = aM[[m + 1, k + 1]] + αjk[m, k - χ, χ, p]]];
     For[j = 1, j ≤ χ, j++,
      For[k = χ - j, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[n + j + 1, k + 1]] = Ikjα[k, j, χ, p]]];
     Return[aM]];
   (*=======================================*)
   bSyst := Module[{bM, m, j, f},
     bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
     f = fjU[ff, n];
     For[m = 0, m ≤ n, m++,
      bM[[m + 1]] = f[[m + 1]]];
     For[j = 1, j ≤ χ, j++,
      bM[[n + j + 1]] = αj[[j]]];
     Return[bM]
    ];
   (*=======================================*)
   aS = aSyst;
   bS = bSyst;
   rez = LinearSolve[aS, bS];
   Return[rez]
  ];

 (*============ TClenshaw ===========*)
 TClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
    na = Length[a];
    b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
    For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
     b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
    y = b[[1]] - x b[[2]];
    Return[y]
   ];
```

```
(*============ xArr ===========*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]
  ];

(*============ unα ===========*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y];
  ];

(* * * * * Example Klass h(0) * * * * *)
r = 2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] := Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] := (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] := If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] := x/(x + 2.);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 1];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
αj = Table[-2^(j-1), {j, 1, χ}];
fxar[x_] := 1/(x - 2.);
fr[x_] := 1/(x - 2.);
f[x_] := fxar[x] + fr[x];
cz = 1/FXi[fa, fb, χ1, χ2, 2];
ut[x_] := cz/(x - 2);
X0 = FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, 0];
X2 = FXi[fa, fb, χ1, χ2, 2];
    bz = 2/(X0 / X2 - 1);
    fk[x_, t_] = 1/(x - 2) * bz/(t + 2);
```

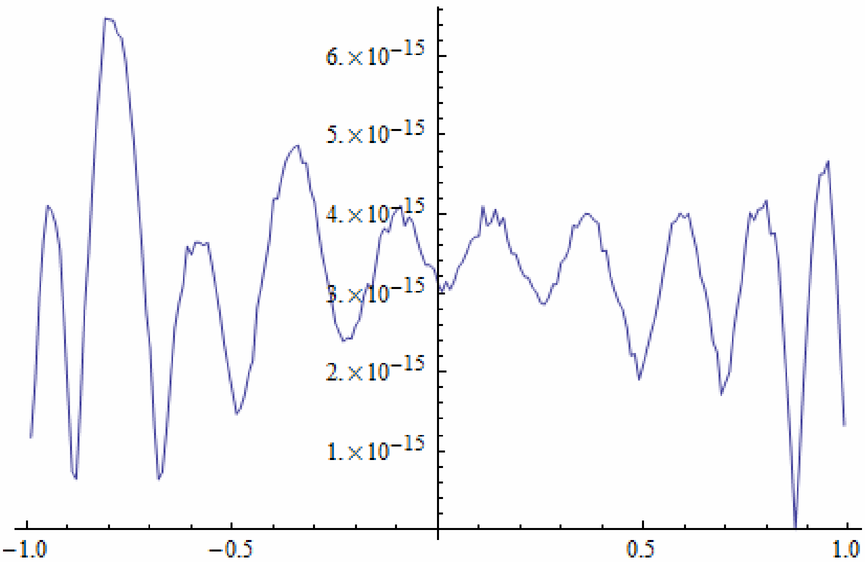
```
un[x_] := TClenshaw[ckα, x];
ϕn[x_] := Zab[fa, fb, χ1, χ2, x] un[x];
ϕ[x_] := Zab[fa, fb, χ1, χ2, x] ut[x];
```

χ1=1 χ2=1 χ=2

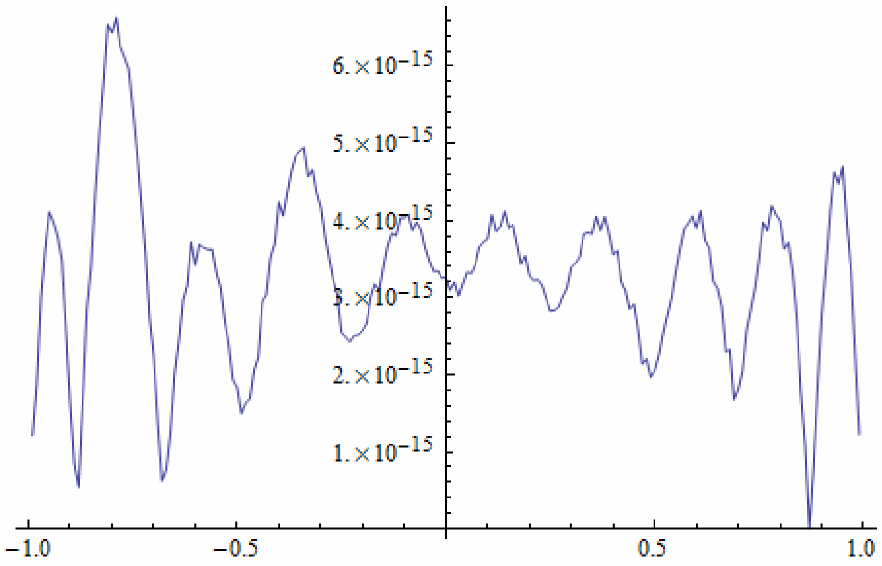
```
nnn = 25;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2,  2 nnn + χ];
Ω = ΩUTTP[fk, nnn, χ, X0, pp];

ckα = FckαP[f, nnn, χ, αj, X0, pp, Ω];

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];
```

199

```
tab1 = Table[{xx[[i]], Abs[(un[xx[[i]]] - ut[xx[[i]]]) / ut[xx[[i]]]]},
    {i, 1, kk}];
ListLinePlot[tab1]
```



```
tab2 = Table[{xx[[i]], Abs[(φ[xx[[i]]] - φn[xx[[i]]]) / φ[xx[[i]]]]},
   {i, 1, kk}];
ListLinePlot[tab2]
Quit[];
```



2.4.3. Решение полного уравнения в классах с отрицательным индексом

Приближенное решение в случае $\kappa < 0$ находится из уравнения

$$A(x)Z(x)u_{n-|\kappa|}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} B(t)Z(t)\frac{u_{n-|\kappa|}(t)}{t-x}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)k_{n,n}(x,t)}{a^2(t)-b^2(t)}u_{n-|\kappa|}(t)dt = f_n(x) + Q^*_{|\kappa|-1}(x), \quad -1<x<1,$$

где $f_n(x), u_{n-|\kappa|}(x), k_{n,n}(x,t)$ – интерполяционные многочлены, $Q^*_{|\kappa|-1}(x)$ – некоторый многочлен с неопределенными коэффициентами $q^*_0, q^*_1, \ldots, q^*_{|\kappa|-1}$, которые определяются так, чтобы обеспечивались условия разрешимости данного уравнения:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{Z(t)}\left(f_n(t) + Q^*_{|\kappa|-1}(t) - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(\tau)k_{n,n}(t,\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}u_{n-|\kappa|}(\tau)d\tau\right)t^{j-1}dt = 0,$$

$$j = 1,\ldots,|\kappa|.$$

Схема 2.4.5. Пусть $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $k_{n,n}(x,t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.2), $Q_{|\kappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m U_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x) = \sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}U_{k-|\kappa|}(x), \tag{2.4.18}$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения c_k, $k = 0,1,\ldots,n-|\kappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n}\sigma_m^{(k)}c_{k-|\kappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\kappa|}\Omega^*_{mk}c_k = f_m,$$

$$m = n, n-1,\ldots,|\kappa|, \tag{2.4.19}$$

где f_m определены в (2.3.3), коэффициенты $\sigma_j^{(k)}$ определены в (2.2.20),

$$\Omega^*_{mk} = \sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_k(t)T_j(t)dt, \tag{2.4.20}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2), коэффициенты Ω^*_{mk} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Заметим, что здесь и далее не все уравнения, вытекающие из системы, используются для нахождения c_j.

Листинг функции Ω^*_{mk} из (2.4.20) (файл «Omega_UTU_M.nb»)

Функция ΩUTUM.

Назначение: вычисляет коэффициенты Ω^*_{mk} из (2.4.20).

Прототип: ΩUTUM[$fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_$].

Параметры:

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.

Возвращаемое значение: коэффициенты Ω^*_{mk} из (2.4.20).

Реализация в Mathematica

```
(*========= bkn ===========*)
bkn[n_] := Module[{mm},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) * b[[k]]];
   Return[b]
  ];
```

```
(*========= σmjUT ===========*)
σmjUT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, υm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++,
     T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]
    ]
   ];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    υm = If[Or[m == n, m == n - 1], 0, 1];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.];
     S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
      s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
       s = s + fk[x[[l]], x[[r]]]
           (T[[m + 1, l]] - υm T[[ m + 3, l]])];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δj S)/((n + 1) (n + 1)) ];
   ];
   Return[σ]
  ];
 (*========= ΩUTUM ===========*)
 ΩUTUM[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, z0, Ω},
    (*================================*)
    FI2[M_] := Module[{b, m2, kk, S, s, s0},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
(*=================================*)
r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
σ = σmjUT[fk, n];
For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
 r2[[m + 1]] = FI2[m]];
For[m = 0, m ≤ n, m++,
 For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
  ss = 0;
  For[j = 0, j ≤ n, j++,
   z0 = r2[[k + j + 1]];
   z = z0;
   If[k ≥ j, z = z0 + r2[[k - j + 1]]];
   If[k < j - 1, z = z0 - r2[[-k + j - 2 + 1]]];
   ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
  ];
  Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2;]
];
Return[Ω]
];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.5
(файл «Fcksigma_P.nb»)

Функция FckσP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.18) – решение системы (2.4.19): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: FckσP[$ff\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.20), полученных по модулю ΩUTUM, описанному выше.

Используемые внешние функции:

σjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\sigma_j^{(k)}$ разложения (2.2.19) по формуле (2.2.20).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = -(mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]
  ];
(*============ Hσ ================*)
Hσ[M_, χ_, p_] := Module[{b, Hz, M2, r},
   b = bkn[M - 1];
   M2 = Floor[(M - 1)/2];
   Hz = Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}];
   Return[Hz]
  ];
```

```
(*============ Gσ ================*)
Gσ[M_, χ_, p_] := Module[{q, GM, r},
   q = Table[0, {k, 1, 3}];
   q[[1]] = If[M == 0, 1, 0];
   q[[2]] = If[M == 1, 0.5, 0];
   q[[3]] = If[M == 0, 0.5, If[M == 2, 0.25, 0]];
```

$$GM = \sum_{r=1}^{-\chi+1} (q[[r]]\ p[[-2\chi - r + 2]]);$$

```
   Return[GM]];
(*============ σjk ================*)
σjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{σ},
   σ = -Gσ[k + χ + j + 2, χ, p] + If[j == k + χ, Gσ[0, χ, p],
     If[j > k + χ, Gσ[j - k - χ, χ, p],
      2 Hσ[k + χ - j, χ, p] + Gσ[k + χ - j, χ, p]]];
   Return[σ]
  ];
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, n_] := Module[{ft, G, x, j, k},
   ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
```

$$x = \text{Table}\left[\text{Cos}\left[\frac{2k - 1.}{2n + 2}\pi\right], \{k, 1, n + 1\}\right];$$

```
   G = Table[0, {k, 1, n + 1}];
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
```

$$G[[j + 1]] = \frac{1.}{n + 1}\sum_{k=1}^{n+1}(fu[x[[k]]]\ \text{ChebyshevT}[j, x[[k]]])\Big];$$

```
   For[j = 0, j ≤ n - 2, j++,
    ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[n]] = G[[n]];
   ft[[n + 1]] = G[[n + 1]];
   Return[ft]
  ];
```

```
(******************* FckσP ************)
FckσP[ff_, n_, χ_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
  (*===================================*)
  aSyst := Module[{aM, aM0, m, k},
    aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
    aM0 = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
    For[m = -χ, m ≤ n, m++,
     For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
      aM0[[m + χ + 1, k + 1]] = σjk[m, k - χ, χ, p]
     ];
     For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[m + χ + 1, k + 1]] = aM0[[m + χ + 1, k + 1]] + Ω[[m + 1, k + 1]]];
    ];
    Return[aM]
   ];
  bSyst := Module[{bM, m, f},
    bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
    f = fjT[ff, n];
    For[m = -χ, m ≤ n, m++,
     bM[[m + 1 + χ]] = f[[m + 1]]];
    Return[bM]
   ];
  aS = aSyst;
  bS = bSyst;
  rez = LinearSolve[aS, bS];
  Return[rez]
 ];
```

Схема 2.4.6. Пусть $f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $k_{n,n}(x,t)=$ $=\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.1), $Q_{|\kappa|-1}(x)=\sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m T_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x)=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}T_{k-|\kappa|}(x), \qquad (2.4.21)$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения c_k, $k = 0, 1, \ldots, n - |\kappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \mu_m^{(k)} \quad c_{k-|\kappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\kappa|} \Omega_{mk}^{*} c_k = f_m,$$
$$m = n, n-1, \ldots, |\kappa|, \tag{2.4.22}$$

где f_m определены в (2.3.2), коэффициенты $\mu_j^{(k)}$ определены в (2.2.26),

$$\Omega_{mk}^{*} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} T_k(t) T_j(t) dt, \tag{2.4.23}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1), коэффициенты Ω_{mk}^{*} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk}^{*} из (2.4.23) (файл «Omega_TTT_M.nb»)

Функция ΩTTTM.

Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk}^{*} из (2.4.23).

Прототип: $\Omega\mathrm{TTTM}[fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_]$.

Параметры:

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^{+}(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$.

Возвращаемое значение: коэффициенты Ω_{mk}^{*} из (2.4.23).

Реализация в Mathematica

```
(*========= akn ===========*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0., {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm * (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
(*========= σmjTT ===========*)
σmjTT[fk_, n_] := Module[{x, T, σ, m, k, j, r, l, S, s, δm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++,
     T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    δm = If[m == 0, 1., 2.];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.];
     S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
      s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
       s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] T[[m + 1, l]]];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δm δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
   Return[σ]];
```

```
(*========= ΩTTTM ===========*)
ΩTTTM[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, Ω},
  (*================================*)
  FI2[M_] := Module[{a, m2, kk, S, s, s0},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
 (*================================*)
 r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
 Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
 σ = σmjTT[fk, n];
 For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
  r2[[m + 1]] = FI2[m]];
 For[m = 0, m ≤ n, m++,
  For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
   ss = 0;
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    z = r2[[k + j + 1]] + r2[[Abs[k - j] + 1]];
    ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
   ];
   Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2;]
 ];
 Return[Ω]
];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.6 (файл «Fckmu_P.nb»)

Функция FckμP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.21) – решение системы (2.4.22): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: FckμP[$ff\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^{+}(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.23), полученных по модулю ΩТТТМ, описанному выше.

Используемые внешние функции:

μjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\mu_j^{(k)}$ разложения (2.2.25) по формуле (2.2.26).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*========== bkn ============*)
bkn[n_] := Module[{b, mm, k},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
    mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = -(mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) b[[k]]];
   Return[b]];
```

```
(*============ Gμ ================*)
Gμ[M_, χ_, p_] := Module[{q, GM, r},
    q = Table[0, {k, 1, 3}];
    q[[1]] = If[M == 0, 1., 0];
    q[[2]] = If[M == 1, 0.5, 0];
    q[[3]] = If[M == 0, 0.5, If[M == 2, 0.25, 0]; ];
    GM = Sum[(p[[-2 χ - r + 2]] q[[r]]), {r, 1, -χ+1}];
    Return[GM]];
(*============ Hμ ================*)
Hμ[M_, χ_, p_] := Module[{b, Hz, r, M2},
    b = bkn[M - 1];
    M2 = Floor[(M - 1)/2];
    Hz = Sum[(b[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 1]]), {r, 0, M2}];
    Return[Hz]
   ];
(*============ μjk ================*)
μjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{μ, t1, t2, hj},
    hj = If[j == 0, 1, 2];
    t1 = 0.5 Gμ[k + χ + j, χ, p];
    If[k > j - χ,
     t2 = 0.5 Gμ[k + χ - j, χ, p] + Hμ[k + χ - j, χ, p],
     If[k - j == -χ, t2 = 0.5 Gμ[0, χ, p],
      t2 = 0.5 Gμ[-k - χ + j, χ, p]]];
    μ = hj (t1 + t2);
    Return[μ]
   ];
(*========== fjT ============*)
fjT[fu_, n_] := Module[{ft, x, j, k},
    ft = Table[0, {j, 1, n + 1}];
    x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
    ft[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]]), {k, 1, n+1}];
```

```
  For[j = 1, j ≤ n, j++,
                   n+1
               2.
   ft[[j + 1]] = ——— ∑ (fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]])];
              n + 1 k=1
  Return[ft]
 ];
(****************** FckμP ************)
FckμP[ff_, n_, χ_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
  (*===================================*)
  aSyst := Module[{aM, aM0, m, k},
    aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
    aM0 = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
    For[m = -χ, m ≤ n, m++,
     For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
      aM0[[m + χ + 1, k + 1]] = μjk[m, k - χ, χ, p]
     ];
     For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
      aM[[m + χ + 1, k + 1]] = aM0[[m + χ + 1, k + 1]] +
        Ω[[m + 1, k + 1]]];
    ];
    Return[aM]
   ];
  bSyst := Module[{bM, m, f},
    bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
    f = fjT[ff, n];
    For[m = -χ, m ≤ n, m++,
     bM[[m + 1 + χ]] = f[[m + 1]]];
    Return[bM]
   ];
  (*===================================*)
  aS = aSyst;
  bS = bSyst;
  rez = LinearSolve[aS, bS];
  Return[rez]
 ];
```

Схема 2.4.7. Пусть $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x)$ определяется в (2.3.3), $k_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} T_j(t)$ определяется в (2.4.2), $Q_{|\kappa|-1}(x) = \sum_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m U_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x) = \sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|} T_{k-|\kappa|}(x), \tag{2.4.24}$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения c_k, $k = 0, 1, \dots, n - |\kappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n} \delta_m^{(k)} c_{k-|\kappa|} + \sum_{k=0}^{n-|\kappa|} \Omega_{mk}^{*} c_k = f_m,$$
$$m = n, n-1, \dots, |\kappa|, \tag{2.4.25}$$

где f_m определены в (2.3.3), коэффициенты $\delta_j^{(k)}$ определены в (2.2.22),

$$\Omega_{mk}^{*} = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{mj} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{Z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} T_k(t) T_j(t) dt, \tag{2.4.26}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.2), коэффициенты Ω_{mk}^{*} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk}^{*} из (2.4.26) (файл «Omega_UTT_M.nb»)

Функция ΩUTTM.

Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk}^{*} из (2.4.26).

Прототип: $\Omega\mathrm{UTTM}[fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_]$.

Параметры:

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x, t)$,

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^{+}(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \dots, n+\kappa$.

Возвращаемое значение: коэффициенты Ω_{mk}^{*} из (2.4.26).

Реализация в Mathematica

```
(*========= akn ===========*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0., {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]
  ];
(*========= σmjUT ===========*)
σmjUT[fk_, n_] := Module[{x, T, m, k, j, r, l, S, s, υm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++, T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    υm = If[Or[m == n, m == n - 1], 0, 1];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.];
     S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
      s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
       s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] (T[[m + 1, l]] - υm T[[ m + 3, l]])];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
   Return[σ]];
```

```
(*========= ΩUTTM ===========*)
ΩUTTM[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, z0, Ω},
  (*================================*)
  FI2[M_] := Module[{a, m2, kk, S, s, s0},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}T_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
 (*================================*)
 r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
 Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
 σ = σmjUT[fk, n];
 For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
  r2[[m + 1]] = FI2[m]];
 For[m = 0, m ≤ n, m++,
  For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
   ss = 0;
   For[j = 0, j ≤ n, j++,
    z0 = r2[[k + j + 1]];
    z = z0;
    If[k ≥ j, z = z0 + r2[[k - j + 1]]];
    If[k < j - 1, z = z0 - r2[[-k + j - 1]]];
    ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
   ];
   Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2;]
 ];
 Return[Ω]
];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.7
(файл «Fckdelta_P.nb»)

Функция FckδP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.24) – решение системы (2.4.25): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: FckδP[$ff\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^+(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.26), полученных по модулю ΩUTTM, описанному выше.

Используемые внешние функции:

δjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\delta_j^{(k)}$ разложения (2.2.21) по формуле (2.2.22).

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
  If[n ≤ 1, Return[{1.}],
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]]
  ];
```

```
(*============ Hδ ================*)
Hδ[M_, χ_, p_] := Module[{a, M2, HM, r},
    a = akn[M];
    M2 = Floor[M/2];
    HM = Sum[(a[[r + 1]] p[[M - 2 χ - 2 r + 2]]), {r, 0, M2}];
    Return[HM]];
(*============ Gδ ================*)
Gδ[M_, χ_, p_] := Module[{d, r, GM},
    d = Table[0, {k, 1, 3}];
    d[[1]] = If[M == 1, -0.5, 0];
    d[[2]] = If[M == 2, -0.25, 0];
    d[[3]] = If[Or[M == 1, M == 3], -0.125, 0];
    GM = Sum[(d[[r]] p[[-2 χ - r + 2]]), {r, 1, -χ+1}];
    Return[GM]];
(*============ δjk ================*)
δjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{δ},
    δ = -Gδ[k + χ + j + 1, χ, p] + If[j == k + χ - 1, Hδ[0, χ, p],
        If[j < k + χ - 1,
         2 Hδ[k + χ - j - 1, χ, p] + Gδ[k + χ - j - 1, χ, p],
         -Gδ[j - k - χ + 1, χ, p]]];
    Return[δ]];
```

```
(*========== fjU ============*)
fjU[fu_, m_] := Module[{ft, G, x, k, j},
   ft = Table[0, {k, 1, m + 1}];
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 m + 2) π], {k, 1, m + 1}];
   G = Table[0, {k, 1, m + 1}];
   For[j = 0, j ≤ m, j++, G[[j + 1]] = 1./(m + 1) Sum[(fu[x[[k]]] * ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, m+1}]];
   For[j = 0, j ≤ m - 2, j++, ft[[j + 1]] = G[[j + 1]] - G[[j + 3]]];
   ft[[m]] = G[[m]];
   ft[[m + 1]] = G[[m + 1]];
   Return[ft]];
```

```
(******************* FckδP ************)
FckδP[ff_, n_, χ_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
   (*=======================*)
   aSyst := Module[{aM, aM0, m, k},
     aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
     aM0 = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
     For[m = -χ, m ≤ n, m++,
      For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
       aM0[[m + χ + 1, k + 1]] = δjk[m, k - χ, χ, p]
      ];
      For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + χ + 1, k + 1]] = aM0[[m + χ + 1, k + 1]] + Ω[[m + 1, k + 1]]];
     ];
     Return[aM]
    ];
   (*=======================*)
   bSyst := Module[{bM, m, f},
     bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
     f = fjU[ff, n];
     For[m = -χ, m ≤ n, m++,
      bM[[m + 1 + χ]] = f[[m + 1]]];
     Return[bM]
    ];
   (*=======================*)
   aS = aSyst;
   bS = bSyst;
   rez = LinearSolve[aS, bS];
   Return[rez]
  ];
```

Схема 2.4.8. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{j=0}^{n} f_j T_j(x)$ определяется в (2.3.2), $k_{n,n}(x,t)=$ $=\sum\limits_{m=0}^{n} T_m(x)\sum\limits_{j=0}^{n}\sigma_{mj}T_j(t)$ определяется в (2.4.1), $Q_{|\kappa|-1}(x)=\sum\limits_{m=0}^{|\kappa|-1} q_m T_m(x)$, $u_{n-|\kappa|}(x)$ ищется в виде

$$u_{n-|\kappa|}(x)=\sum_{k=|\kappa|}^{n} c_{k-|\kappa|}U_{k-|\kappa|}(x), \tag{2.4.27}$$

где $c_{k-|\kappa|}$ – числа, подлежащие определению.

Система уравнений для определения c_k, $k=0,1,\ldots,n-|\kappa|$, имеет вид

$$\sum_{k=m}^{n}\beta_m^{(k)}c_{k-|\kappa|}+\sum_{k=0}^{n-|\kappa|}\Omega_{mk}^{*}c_k=f_m,$$
$$m=n,n-1,\ldots,|\kappa|, \tag{2.4.28}$$

где f_m определены в (2.3.2), коэффициенты $\beta_j^{(k)}$ определены в (2.2.24),

$$\Omega_{mk}^{*}=\sum_{j=0}^{n}\sigma_{mj}\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_k(t)T_j(t)dt, \tag{2.4.29}$$

коэффициенты σ_{mj} определены в (2.4.1), коэффициенты Ω_{mk}^{*} вычисляются в соответствии с правилом 1.

Листинг функции Ω_{mk}^{*} из (2.4.29) (файл «Omega_TTU_M.nb»)

Функция ΩTTUM.

Назначение: вычисляет коэффициенты Ω_{mk}^{*} из (2.4.29).

Прототип: ΩTTUM[$fk\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_$].

Параметры:

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $k(x,t)$,

n – количество коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^{+}(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j=\kappa,\kappa+1,\ldots,n+\kappa$.

Возвращаемое значение: коэффициенты Ω_{mk}^{*} из (2.4.29).

Реализация в Mathematica

```
(*========= bkn ===========*)
bkn[n_] := Module[{mm},
   If[n == 0 , Return[{1.}]];
   b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   b[[1]] = 2.^n;
   For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++, mm = n + 1. - 2 k;
    b[[k + 1]] = - (mm (mm + 1))/(4. k (mm + k)) * b[[k]]];
   Return[b]];
(*========= σmjTT ===========*)
σmjTT[fk_, n_] := Module[{x, T, σ, m, k, j, r, l, S, s, δm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++,
     T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]]];
   For[m = 0, m ≤ n, m++,
    δm = If[m == 0, 1., 2.];
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     δj = If[j == 0, 1., 2.];
     S = 0;
     For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
      s = 0;
      For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
       s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] T[[m + 1, l]]];
      S = S + s T[[j + 1, r]]];
     σ[[m + 1, j + 1]] = (δm δj S)/((n + 1) (n + 1)) ]];
   Return[σ]];
```

```
(*========= ΩTTUM ===========*)
ΩTTUM[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, z0, Ω},
   (*================================*)
  FI2[M_] := Module[{b, m2, kk, S, s, s0},
```

Здесь программируется алгоритм вычисления интеграла $\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}U_M(t)dt$ согласно правилу 1.

```
  (*================================*)
  r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
  Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
  σ = σmjTT[fk, n];
  For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
   r2[[m + 1]] = FI2[m]];
  For[m = 0, m ≤ n, m++,
   For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
    ss = 0;
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     z0 = r2[[k + j + 1]];
     z = z0;
     If[k ≥ j, z = z0 + r2[[k - j + 1]]];
     If[k < j - 1, z = z0 - r2[[-k + j - 1]]];
     ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
    ];
    Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2;]
  ];
  Return[Ω]
 ];
```

Листинг функции, реализующей схему 2.4.8 (файл «Fck_beta_P.nb»)

Функция FckβP.

Назначение: вычисляет коэффициенты из (2.4.27) – решение системы (2.4.28): $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Прототип: FckβP[$ff\_, n\_, \kappa\_, X0\_, pp\_, \Omega\_$].

Параметры:

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$,

n – для количества коэффициентов,

κ – индекс задачи линейного сопряжения,

$X0$ – значение функции $X^{+}(x)$ в точке 0,

pp – коэффициенты разложения (1.1.12): p_j, $j = \kappa, \kappa+1, \ldots, n+\kappa$,

Ω – список коэффициентов из (2.4.29), полученных по модулю ΩTTUM, описанному выше.

Используемые внешние функции:

βjk[j, k, p, κ] – вычисляет коэффициент $\beta_j^{(k)}$ разложения (2.2.23) по формуле (2.2.24).

Возвращаемое значение: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-|\kappa|}$.

Реализация в Mathematica

```
(*============ akn ================*)
akn[n_] := Module[{a, mm, k},
  If[n ≤ 1, Return[{1.}],
   a = Table[0, {k, 0, Floor[n/2]}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = - (mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]]
  ];
```

```
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
   If[l ≥ Floor[M/2], Return[1.]];
   a = akn[M];
   rez = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
   Return[rez]];
(*============ Gβ ================*)
Gβ[M_, χ_, p_] := Module[{l, rez, M2},
   M2 = Floor[(M - χ - 1)/2];
   rez = Sum[(rβ[l, M] p[[M + 2 Abs[χ] - 2 l]]), {l, 1, M2}]];
(*============ Hβ ================*)
Hβ[M_, χ_, p_] := Module[{d1, HM},
   d1 = If[M == 1, -0.5, 0];
   HM = If[χ == -1, 0, 0.5 (p[[-χ + 1]] d1)];
   Return[HM]
  ];
(*============ βjk ================*)
βjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{β, hj},
   hj = If[j == 0, 1, 2];
   If[And[j == k, χ == -1], β = 1,
    If[And[k ≥ j + 1, χ == -1], β = Gβ[k - j, χ, p],
     If[And[j < k - 1, χ = -2],
      β = Hβ[k - 1 + j, χ, p] + Hβ[k - 1 - j, χ, p] +
        Gβ[k - 1 - j, χ, p],
      If[And[j == k - 1, χ = -2],
       β = Hβ[k - 1 + j, χ, p] + 0.5 Gβ[0, χ, p],
       β = Hβ[k - 1 + j, χ, p] - Hβ[1 - k + j, χ, p]] ]]];
   Return[β hj]
  ];
```

```
(*========== fjT ===========*)
fjT[fu_, n_] := Module[{ft, x, k, j},
  ft = Table[0, {k, 1, n + 1}];
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  ft[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
  For[j = 1, j ≤ n, j++, ft[[j + 1]] = 2/(n + 1) Sum[(fu[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
  Return[ft]];
(****************** FckβP ***********)
FckβP[ff_, n_, χ_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
   (*==================================*)
   aSyst := Module[{aM, aM0, m, k},
     aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
     aM0 = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
     For[m = -χ, m ≤ n, m++,
      For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
       aM0[[m + χ + 1, k + 1]] = βjk[m, k - χ, χ, p]];
      For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + χ + 1, k + 1]] = aM0[[m + χ + 1, k + 1]] + Ω[[m + 1, k + 1]]]];
     Return[aM]
    ];
   (*==================================*)
   bSyst := Module[{bM, m, f},
     bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
     f = fjT[ff, n];
     For[m = -χ, m ≤ n, m++,
      bM[[m + 1 + χ]] = f[[m + 1]]];
     Return[bM]
    ];
   (*==================================*)
   aS = aSyst;
   bS = bSyst;
   rez = LinearSolve[aS, bS];
   Return[rez]
  ];
```

2.4.4. Модельные примеры

Приведем результаты численного решения модельных полных сингулярных интегральных уравнений.

Решение в классах функций с отрицательным индексом

Рассмотрим уравнение (1.1.1)

$$a(x)\phi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}b(t)\phi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k(x,t)\phi(t)dt=f(x),\ -1<x<1, \qquad (2.4.30)$$

в котором

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}\dfrac{1+E(x)}{1-E(x)}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2\pi i(-\frac{2}{5}-i)}, & x=0,\end{cases}\qquad E(x)=\exp\left[2\pi i\left(-\frac{2}{5}-i\right)x\right],$$

$$b(x)=\frac{x}{x+2},$$

$$k(x,t)=\frac{1}{(x-2)(t+2)},$$

$$X0=-e^{-\frac{4}{5}-2i}=0{,}18698682698638644+0{,}40857367087003627i,$$

$$X2=3\,e^{\left(-\frac{4}{5}-2i\right)(\ln 3-1)}=3{,}1833240332458956+0{,}6360987615456248i,$$

$$f(x)=x+2+\frac{1}{x-2}\left(2+\frac{X2+X0}{2}\right)=$$

$$=\frac{x^2-(0{,}3148445698838589-0{,}5223362162078305 5i)}{x-2}.$$

Решением этого уравнения в классе $h(-1,1)$ является функция

$$u(x)=\frac{1}{x-2}.$$

Для численного решения уравнения (2.4.30) надо иметь коэффициенты разложения (1.1.12) функции $X(z):p_{|\kappa|},p_{|\kappa|+1},\ldots,\ \kappa<0$. Получим их, используя функцию Fp.

Вычисление функции $X^{+}(x)$ проведем, применяя модуль FXiPlus (листинг (2.3.18)).

Используя разработанные выше модули и схемы 2.4.5–2.4.8, получим следующие программы.

Листинг программы решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с использованием схемы 2.4.8 (файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_P\beta_P_O\Poln_M1_M1_beta_Res.nb**) размещен ниже.

Листинги программ с использованием других схем размещены в соответствующих файлах:

- схемы 2.4.5 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_P\sigma_P_O\Poln_M1_M1_sigma_Res.nb;**
- схемы 2.4.6 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_P\mu_P_O\Poln_M1_M1_mu_Res.nb;**
- схемы 2.4.7 – файл **…\Module_Mathematica\Examples\NP_P\delta_P_O\Poln_M1_M1_delta_Res.nb**.

Программа решения полного сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1,1)$ с использованием схемы 2.4.8

```
(*============ Fχ ================*)
Fχ[a_, b_, klass_] := Module[{t1, t2, boo, χ1, χ2, G, g},
   G[x_] = Simplify[(a[x] - b[x])/(a[x] + b[x])];
   g[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[G[x]];
   t1 = Re[ g[1.]] ;
   t2 = Re[g[-1.]] ;
   boo = Abs[t1] < 10^-16 || Abs[t2] < 10^-16;
   If[boo, Return[{"Not", "Not", "Not"}]];
   If[klass == 1, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
    If[klass == 2, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[t1]},
     If[klass == 3, {χ2 = Floor[-t2]; χ1 = Floor[1 + t1]},
      If[klass == 4, {χ2 = Floor[1 - t2]; χ1 = Floor[t1]}, None]]]];
   Return[{ χ1, χ2, χ1 + χ2}];
  ];

(*============ Fp ================*)
Fp[a_, b_, χ1_, χ2_, n_] := Module[{ p},
   (*================================*)
   FunEΓz := Module[{ r, d, α},
     fG[x_] = (a[x] - b[x])/(a[x] + b[x]);
     fg[x_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[x]];
     d = Table[0, {k, 1, n + 1}];
     For[k = 0, k ≤ n, k++, r = ∫_{-1}^{1} (N[fg[t]] t^k) ⅆt; d[[k + 1]] = (k + 1.) r];
     α = Table[1, {k, 1, n + 1}];
     For[j = 1, j ≤ n, j++, α[[j + 1]] = -1/j Sum_{k=0}^{j-1} (d[[j - k]] α[[k + 1]])];
     Return[α]];
```

```
  (*===============FunχM1iM1================*)
  FunχM1iM1 := Module[{ α, mχ, q, j},
    α = FunEΓz;
    mχ = 2;
    q = Table[0, {k, 1, n + mχ + 1}];
    q[[mχ + 1]] = 1;
    q[[mχ + 2]] = α[[2]];
    For[j = 2, j ≤ n, j++, q[[mχ + j + 1]] = α[[j + 1]] - α[[j - 1]]];
    Return[q]];
  (*================================*)
  p = FunχM1iM1;
  Return[p]
 ];
(*============= FXiPlus ==============*)
FXiPlus[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{re, r},
   ΓPlus := Module[{rez, fG, fg},
     fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
     fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
     rez = 2 fg[1.] + fg[x] (Log[(1. - x)/(1. + x)] + π ⅈ);
     Return[rez]
    ];
   re = Exp[ΓPlus];
   r = (x - 1)^-χ1 (x + 1)^-χ2 re;
   Return[r]
  ];
(*========== Zab ============*)
Zab[a_, b_, χ1_, χ2_, x_] := Module[{rez},
   rez = FXiPlus[a, b, χ1, χ2, x]/(a[x] - b[x]);
   Return[rez]
  ];
```

```
(*========== FXi ============*)
FXi[a_, b_, χ1_, χ2_, z_] := Module[{re, r},
   Γz := Module[{rez, fG, fg},
      fG[xx_] = Simplify[(a[xx] - b[xx])/(a[xx] + b[xx])];
      fg[xx_] = 1/(2. π ⅈ) Log[fG[xx]];
      rez = fg[1.] (2 + z Log[(z - 1.)/(z + 1.)]);
      Return[rez]
     ];
   re = Exp[Γz];
   r = (z - 1)^-χ1 (z + 1)^-χ2 re;
   Return[r]
  ];
(*========== akn ============*)
akn[n_] := Module[{a, mm},
   If[n ≤ 1, Return[{1.}]];
   a = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
   a[[1]] = 2.^(n-1);
   For[k = 0, k ≤ Floor[(n - 2)/2], k++,
    mm = n - 1. - 2 k;
    a[[k + 2]] = -(mm (mm + 1))/(4. (k + 1) (mm + k)) a[[k + 1]]];
   Return[a]];
(*============ rβ ================*)
rβ[l_, M_] := Module[{a, rez, m},
   If[l ≥ Floor[M/2], Return[1.]];
   a = akn[M];
   rez = Sum[a[[m + 1]], {m, 0, l}];
   Return[rez]];
```

```
(*============= Gβ =================*)
Gβ[M_, χ_, p_] := Module[{rez, M2, l},
   M2 = Floor[(M - χ - 1)/2];
   rez = Sum[(rβ[l, M] p[[M - 2 χ - 2 l]]), {l, 0, M2}];
   Return[rez]
  ];
(*============= Hβ =================*)
Hβ[M_, χ_, p_] := Module[{HM},
   HM = If[M == 1, -0.25, 0];
   Return[HM]
  ];
(*============= βjk =================*)
βjk[j_, k_, χ_, p_] := Module[{β, hj, n, m},
   n = k - 1 + j;
   m = k - 1 - j;
   If[j < k - 1, β = Hβ[n, χ, p] + Hβ[m, χ, p] + Gβ[m, χ, p],
    If[j == k - 1, β = 0.5 p[[Abs[χ] + 2]], β = Hβ[n, χ, p] + 0.25]];
   Return[2 β]
  ];
(*========== σmjTT ===========*)
σmjTT[fk_, n_] := Module[{x, T, σ, m, k, j, r, l, S, s, δm, δj},
   x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
   T = Table[0, {m, 1, n + 3}, {k, 1, n + 1}];
   σ = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1}];
   For[m = 0, m ≤ n + 2, m++,
    For[k = 1, k ≤ n + 1, k++,
     T[[m + 1, k]] = ChebyshevT[m, x[[k]]]
     ]
    ];
 For[m = 0, m ≤ n, m++,
  δm = If[m == 0, 1., 2.];
  For[j = 0, j ≤ n, j++,
   δj = If[j == 0, 1., 2.];
   S = 0;
```

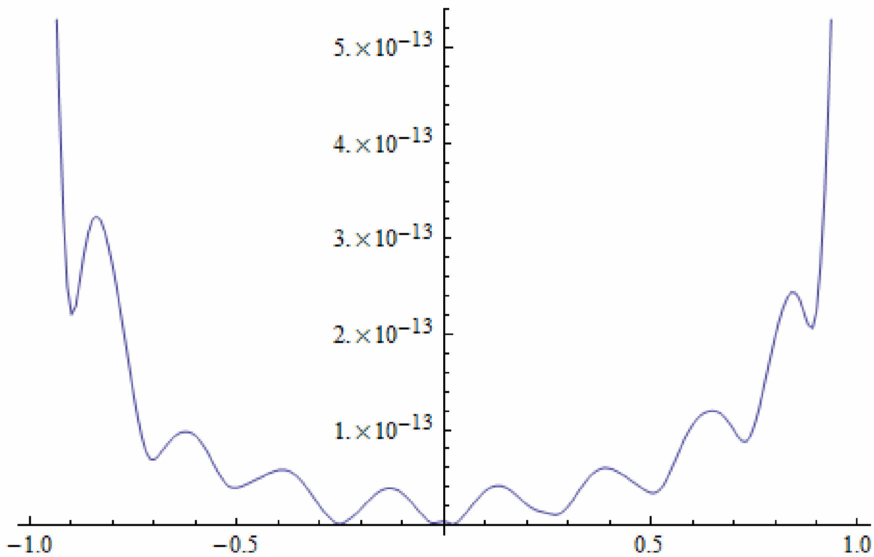
```
      For[r = 1, r ≤ n + 1, r++,
       s = 0;
       For[l = 1, l ≤ n + 1, l++,
        s = s + fk[x[[l]], x[[r]]] T[[m + 1, l]]
       ];
       S = S + s T[[j + 1, r]]
      ];
                            δm δj S
      σ[[m + 1, j + 1]] = ─────────────────
                          (n + 1) (n + 1)
     ];
    ];
    Return[σ]
   ];
(*============ bkn ================*)
bkn[n_] := Module[{mm},
    If[n == 0 , Return[{1.}]];
    b = Table[0, {k, 1, Floor[n/2] + 1}];
    b[[1]] = 2.^n;
    For[k = 1, k ≤ Floor[n/2], k++,
     mm = n + 1. - 2 k;
                       mm (mm + 1)
     b[[k + 1]] = - ─────────────── b[[k]]];
                     4. k (mm + k)
    Return[b]
   ];
(*========= ΩTTUM ===========*)
ΩTTUM[fk_, n_, χ_, X0_, p_] := Module[{σ, r2, m, k, j, ss, z, z0, Ω},
    (*================================*)
    FI2[M_] := Module[{b, m2, kk, S, s, s0},
      b = bkn[M];
m2 = Floor[M/2];
     m2
S =  Σ   (b[[kk + 1]] p[[M + 1 - 2 χ - 2 kk + 1]]);
    kk=0
      m2
s0 =  Σ   (b[[kk + 1]] p[[M - 2 χ - 2 kk + 1]]);
     kk=0
```

```
    If[2 m2 == M, s = s0 - X0 b[[m2 + 1]], s = s0];
    Return[2 s + S]];
  (*=================================*)
  r2 = Table[0, {m, 1, 2 n + 1 + χ}];
  Ω = Table[0, {m, 1, n + 1}, {k, 1, n + 1 + χ}];
  σ = σmjTT[fk, n];
  For[m = 0, m ≤ 2 n + χ, m++,
   r2[[m + 1]] = FI2[m]];
  For[m = 0, m ≤ n, m++,
   For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
    ss = 0;
    For[j = 0, j ≤ n, j++,
     z0 = r2[[k + j + 1]];
     z = z0;
     If[k ≥ j, z = z0 + r2[[k - j + 1]]];
     If[k < j - 1, z = z0 - r2[[-k + j - 1]]];
     ss = ss + σ[[m + 1, j + 1]] z;
    ];
    Ω[[m + 1, k + 1]] = ss/2;]
  ];
  Return[Ω]
 ];
(*========== fjT ===========*)
fjT[ff_, n_] := Module[{f, x},
  f = Table[0, {k, 0, n}];
  x = Table[Cos[(2 k - 1.)/(2 n + 2) π], {k, 1, n + 1}];
  f[[1]] = 1/(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]]), {k, 1, n + 1}];
  For[j = 1, j ≤ n, j++,
   f[[j + 1]] = 2./(n + 1) Sum[(ff[x[[k]]] ChebyshevT[j, x[[k]]]), {k, 1, n + 1}]];
  Return[f]
 ];
```

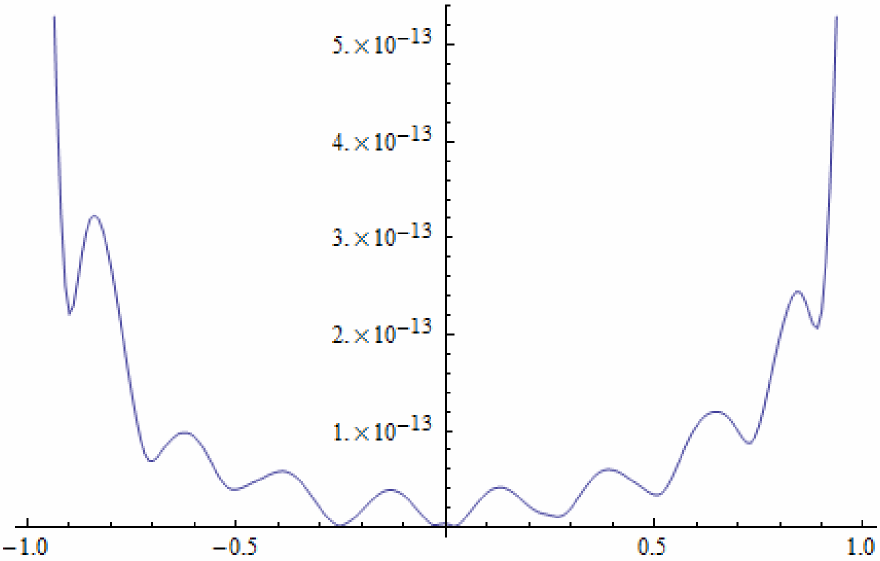
```
(******************* FckβP ************)
FckβP[ff_, n_, χ_, X0_, p_, Ω_] := Module[{aS, bS, rez},
   (*==================================*)
   aSyst := Module[{aM, aM0, m, k},
     aM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
     aM0 = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}, {k, 1, n + χ + 1}];
     For[m = -χ, m ≤ n, m++,
      For[k = m + χ, k ≤ n + χ, k++,
       aM0[[m + χ + 1, k + 1]] = βjk[m, k - χ, χ, p]
      ];
      For[k = 0, k ≤ n + χ, k++,
       aM[[m + χ + 1, k + 1]] = aM0[[m + χ + 1, k + 1]] + Ω[[m + 1, k + 1]]];
     ];
     Return[aM]
    ];
   (*==================================*)
   bSyst := Module[{bM, m, f},
     bM = Table[0, {m, 1, n + χ + 1}];
     f = fjT[ff, n];
     For[m = -χ, m ≤ n, m++,
      bM[[m + 1 + χ]] = f[[m + 1]]];
     Return[bM]
    ];
   (*==================================*)
   aS = aSyst;
   bS = bSyst;
   rez = LinearSolve[aS, bS];
   Return[rez]
  ];

(*============ UClenshaw ===========*)
UClenshaw[a_, x_] := Module[{y, b, k, na},
   na = Length[a];
   b = Table[0, {k, 1, na + 3}];
   For[k = na - 1, k ≥ 0, k--,
    b[[k + 1]] = a[[k + 1]] + 2 x b[[k + 2]] - b[[k + 3]]];
   y = b[[1]];
   Return[y]
  ];
```

```
(*============= xArr ============*)
xArr[a0_, h_, n_] := Module[{x, k},
   x = Table[a0 + (k - 1) h, {k, 1, n}];
   Return[x]
  ];

(*============= unα ============*)
uArr[fu_, x_] := Module[{y, len, k},
   len = Length[x];
   y = Table[fu[x[[k]]], {k, 1, len}];
   Return[y];
  ];

(* * * * * Example                * * * * *)
r = -2/5;
w = r - ⅈ;
fE[x_] := Exp[2. π ⅈ w x];
fD[x_] := (1. + fE[x])/(1 - fE[x]);
fa[x_] := If[x == 0, -1./(2 π ⅈ w), x/(x + 2.) fD[x]];
fb[x_] := x/(x + 2.);
{χ1, χ2, χ} = Fχ[fa, fb, 2];
Print["χ1=", χ1, " χ2=", χ2, " χ=", χ];
Χ0 = FXiPlus[fa, fb, χ1, χ2, 0];
Χ2 = FXi[fa, fb, χ1, χ2, 2];
bz = 2 - (Χ2 - Χ0)/2;
fxar[x_] := Χ2/(x - 2.) + x + 2;
fr[x_] := bz/(x - 2.);
f[x_] = fxar[x] + fr[x];
ut[x_] := 1/(x - 2);
fk[x_, t_] = 1/(x - 2) * 1/(t + 2);
un[x_] := UClenshaw[ckβ, x];
ϕn[x_] := Zab[fa, fb, χ1, χ2, x] un[x];
ϕ[x_] := Zab[fa, fb, χ1, χ2, x] ut[x];
```

```
χ1=-1  χ2=-1  χ=-2

nnn = 25;
pp = Fp[fa, fb, χ1, χ2,  2 nnn - 2 χ];
(*Print["pp=",pp];*)
sig = σmjTT[fk, nnn];
(*Print["sig=",sig];*)
Ω = ΩTTUM[fk, nnn, χ, X0, pp];
(*Print["Ω=",Ω];*)

ckβ = FckβP[f, nnn, χ, X0, pp, Ω];
(*Print["ckβ=",ckβ];*)

a0 = -0.99;
hh = 0.01;
b0 = 0.99;
kk = Floor[(b0 - a0)/hh] + 1;
Print[kk];
xx = xArr[a0, hh, kk];

199

tab1 = Table[{xx[[i]], Abs[(un[xx[[i]]] - ut[xx[[i]]]) / ut[xx[[i]]]]},
    {i, 1, kk}];
ListLinePlot[tab1]
```



```
tab2 = Table[{xx[[i]], Abs[(ϕ[xx[[i]]] - ϕn[xx[[i]]]) / ϕ[xx[[i]]]]},
   {i, 1, kk}];
ListLinePlot[tab2]
Quit[];
```



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bisplinghof*, *R. L.* Aeroelasticity / R. L. Bisplinghof, H. Ashley, R. L. Halfman. Mineola : Dover Publications, 1996.

2. *Borja*, *M.* Uber die numerische Behandlung der Tragflachengleichung / M. Borja, H. Brakhage // Z. angew. Math. und Mech. 1967. Vol. 47: Sonderhelf. P. 102–103.

3. *Elliott*, *D.* The approximate solution of singular integral equations / D. Elliott // Solutions methods of integral equations. Theory and Appl. New York ; London, 1979. Vol. 18. P. 83–107.

4. *Golberg*, *M. A.* The numerical solution of Cauchy singular integral equations with constant coefficients / M. A. Golberg // J. Integr. Equat. 1985. Vol. 9, № 1. P. 127–151.

5. *Prossdorf*, *S.* Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silbermann. Berlin : Akad. Verl, 1991.

6. *Smarzewski*, *R.* Orthogonal approximate solution of Cauchy-type singular integral equations / R. Smarzewski, M. A. Sheshko, G. A. Rasolko // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). 2003. Vol. 3, № 2. P. 330–356.

7. *Tricomi*, *F. G.* On the finite Hilbert transformation / F. G. Tricomi // Quart. J. Math., 1951. Vol. 2, № 2. P. 199–211.

8. *Wojcik*, *P.* Solution of a class of the first kind singular integral equation with multiplicative Cauchy kernel / P. Wojcik, M. A. Sheshko, D. Pylak, P. Karczmarek // Annales universitatis Marie Curie-Skladowska, Lublin, Polonia, 2012. Vol. 66, № 2. P. 93–105.

9. *Бейтмен*, *Г.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М., 1966. Т. 2.

10. *Васильев*, *Н. И.* Применение полиномов Чебышева в численном анализе / Н. И. Васильев, Ю. А. Клоков, А. Я. Шкерстена. Рига, 1984.

11. *Векуа*, *Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа. М., 1970.

12. *Габдулхаев*, *Б. Г.* Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений / Б. Г. Габдулхаев // Итоги науки и техники. Сер.: Мат. анализ, 1980. Т. 18. С. 251–307.

13. *Габдулхаев*, *Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б. Г. Габдулхаев. Казань, 1980.

14. *Габдулхаев*, *Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б. Г. Габдулхаев. Казань, 1994.

15. *Гахов*, *Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы *n* пар функций / Ф. Д. Гахов// Успехи мат. наук, 1952. Т. 7, № 4. С. 3–54.

16. *Гахов*, *Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. М. : Наука, 1977.

17. *Голубев*, *В. В.* Лекции по теории крыла / В. В. Голубев. М. ; Л. : Гостехиздат, 1949.

18. *Джишкариани*, *А. В.* К решению сингулярных интегральных уравнений приближенными проекционными методами / А. В. Джишкариани // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 5. С. 1149–1162.

19. *Золоторевский*, *Ф. Д.* Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования / Ф. Д. Золоторевский. Кишинев, 1991.

20. *Ланс*, *Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж. Н. Ланс. М. : Изд-во иностр. лит., 1962.

21. *Лифанов*, *И. К.* О формулах обращения многомерных сингулярных интегралов / И. К. Лифанов // Докл. АН СССР, 1979. Т. 249, № 6. С. 1306–1309.

22. *Лифанов*, *И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. М., 1995.

23. *Мусхелишвили*, *Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. М. : Наука, 1966.

24. *Мусхелишвили*, *Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. М., 1968.

25. *Панасюк*, *В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. Киев : Наук. думка, 1968.

26. *Панасюк*, *В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. Киев : Наук. думка, 1976.

27. *Панасюк*, *В. В.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук. Киев : Наук. думка, 1984.

28. *Пашковский*, *С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. М. : Наука, 1983.

29. *Полянин*, *А. Д.* Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. М. : Физматлит, 2003.

30. *Попов*, *Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. М., 1982.

31. *Расолько*, *Г. А.* Прямой метод решения интегральных уравнений первого рода с мультипликативными ядрами Коши / Г. А. Расолько // Дифференц. уравнения. 1987.

32. *Расолько*, *Г. А.* Интегральные уравнения первого рода, содержащие интегралы с кратными ядрами Коши / Г. А. Расолько // Весн. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1988, № 5. С. 22–27.

33. *Расолько*, *Г. А.* Прямые методы решения некоторых сингулярных интегральных уравнений : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Г. А. Расолько. Минск, 1990.

34. *Расолько*, *Г. А.* О решении одного уравнения, содержащего кратные интегралы с ядрами Коши / Г. А. Расолько, М. А. Шешко // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1092–1097.

35. *Расолько*, *Г. А.* Прямой метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши при помощи многочленов Чебышева / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2003. № 2. С. 52–58.

36. *Расолько*, *Г. А.* Применение многочленов Чебышева в прямом методе решения векторного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши / Г. А. Расолько // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 5. С. 19–24.

37. *Расолько*, *Г. А.* Численное решение характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши с использованием многочленов Чебышева второго рода / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 26–34.

38. *Расолько*, *Г. А.* Разложение по многочленам Чебышева второго рода сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши / Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 2. С. 46–51.

39. *Расолько*, *Г. А.* Применение многочленов Чебышева при численном решении сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью в классе ограниченных функций / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 24–30.

40. *Расолько*, *Г. А.* Разложение сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши по многочленам Чебышева / Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 5. С. 10–14.

41. *Расолько*, *Г. А.* К разложению одного сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши по многочленам Чебышева / Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси : материалы 5-й Междунар. конф. “AMADE”. 2010. Т. 1. С. 105–109.

42. *Расолько*, *Г. А.* Решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 25–31.

43. *Расолько*, *Г. А.* Метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 22–26.

44. *Расолько*, *Г. А.* Квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью на концах отрезка / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 27–31.

45. *Расолько*, *Г. А.* Приближенное решение интегрального уравнения первого рода с двукратным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 1. С. 100–104.

46. *Расолько*, *Г. А.* Приближенное решение интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 27–31.

47. *Расолько*, *Г. А.* Численное решение интегрального уравнения первого рода с двукратным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 2. С. 103–107.

48. *Расолько*, *Г. А.* К решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 27–31.

49. *Расолько*, *Г. А.* К приближенному решению интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Весн. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 9–14.

50. *Расолько*, *Г. А.* Приближенное решение одного интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2014. Т. 22, № 2. С. 74–83.

51. *Расолько, Г. А*. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс] / Г. А. Расолько. Минск : БГУ, 2015. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/118113

52. *Расолько, Г. А*. Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода : в 2 ч. Ч. 1 : Алгоритмы в MathCad [Электронный ресурс] / Г. А. Расолько. Минск : БГУ, 2015. Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/148189

53. *Сегё, Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сегё. М. : Физматгиз, 1962.

54. *Шешко*, *М. А.* О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла / М. А. Шешко // Изв. вузов. Математика. 1976. № 12. С. 108–118.

55. *Шешко*, *М. А.* О сходимости квадратурного процесса для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью / М. А. Шешко, Т. С. Якименко // Изв. вузов. Математика. 1979. № 6. С. 82–84.

56. *Шешко*, *М. А.* Обращение многомерного интеграла типа Коши / М. А. Шешко // Докл. АН БССР, 1980. Т. 24, № 10. С. 888–891.

57. *Шешко*, *М. А.* Устойчивые алгоритмы приближенного решения краевой задачи Римана для аналитических функций / М. А. Шешко // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 3. С. 209–212.

58. *Шешко*, *М. А.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с произвольным индексом / М. А. Шешко // Весн. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1986. № 5. С. 20–24.

59. *Шешко*, *М. А.* О точных и приближенных формулах обращения кратного интеграла с ядрами Коши / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 911–915.

60. *Шешко*, *М. А.* Прямой метод решения системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши / М. А. Шешко // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 9. С. 1278–1287.

61. *Шешко*, *М. А.* О точном и приближенном решениях системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта / М. А. Шешко, Д. С. Шуляев // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 9. С. 1231–1239.

62. *Шешко*, *М. А.* Разложение сингулярного характеристического интегрального оператора с ядром Коши по многочленам Чебышева / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, № 5. С. 41–44.

63. *Шешко*, *М. А.* Применение многочленов Чебышева при приближенном решении сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 112–118.

64. *Шешко*, *М. А.* Разложение векторного сингулярного характеристического интегрального оператора с ядром Коши по многочленам Чебышева / М. А. Шешко, Г. А. Расолько // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 4. С. 48–51.

65. *Шешко*, *М. А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение / М. А. Шешко. Люблин, 2003.

РАСОЛЬКО Галина Алексеевна

Закончила Белорусский государственный университет по специальности “Прикладная математика”. Кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Область научных интересов: разработка теории и приложений численных методов для решения специализированных классов интегральных уравнений, приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и Гильберта, методика использования информационных технологий в курсах вузовской математики.

Научное издание

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

В двух частях

Часть 2

АЛГОРИТМЫ В MATHEMATICA

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*

Дизайн обложки *О. В. Гасюк*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *Н. И. Бондарчик*
Корректор *Е. В. Гордейко*

Электронный ресурс 8,4 Мб.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.