

Лекция 4 Волновые свойства частиц

1 Оптико-механическая аналогия. Гипотеза Луи де Бройля, свойства волн де Бройля.

2 Опыты, подтверждающие существование волновых свойств у микрочастиц.

3 Статистическая интерпретация волновой функции.

4 Соотношения неопределенностей Гейзенберга

В конце XIX – начале XX века наряду с многочисленными явлениями, подтверждающими волновую природу света (интерференция, поляризация, дифракция и др.), стали известны эффекты (фотоэффект, эффект Комптона и др.), указывающие на наличие у электромагнитного излучения корпускулярных свойств (лекция 2). Привлекли внимание и опыты с пучками частиц (электронов), в которых были обнаружены эффекты, имеющие сходство с оптическими явлениями волнового характера.

Например, в 1921 году Рамзауэр при исследовании рассеяния электронов на атомах аргона обнаружил, что при уменьшении энергии электрона от нескольких десятков электрон-вольт эффективное сечение σ упругого рассеяния электронов на аргоне растет (рисунок 4.1).

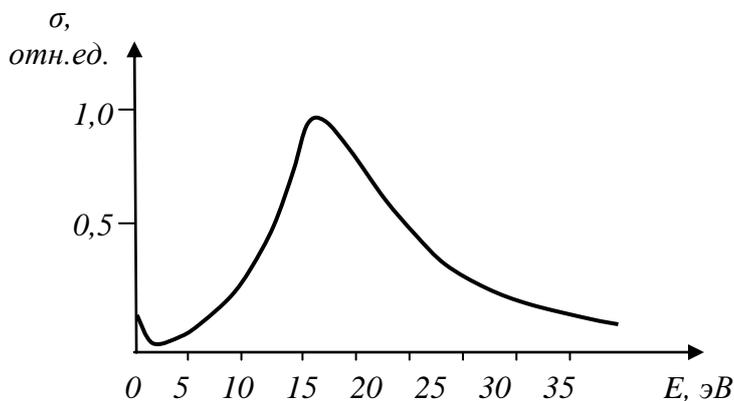


Рисунок 4.1 – Зависимость эффективного сечения рассеяния электронов на атомах аргона от энергии электронов

Но при энергии электрона ~ 16 эВ эффективное сечение рассеяния достигает максимума и при дальнейшем уменьшении энергии электрона уменьшается. При энергии электрона $E \sim 1$ эВ значение σ становится близким к нулю, а затем начинает снова увеличиваться.

Таким образом, создается впечатление, что электроны, энергия которых $E \sim 1$ эВ, не испытывают с атомами аргона столкновений и пролетают через газ без рассеяния. Такое же поведение характерно и для сечения рассеяния электронов на других атомах инертных газов, а также на

молекулах (последнее обнаружено Таунсендом). Этот эффект аналогичен образованию пятна Пуассона при дифракции света на малом экране.

Французский ученый Луи де Бройль в 1924 году высказал идею о том, что частицы вещества обладают и корпускулярными, и волновыми свойствами. При этом он предположил, что частице, свободно движущейся с постоянной скоростью \vec{v} , соответствует плоская монохроматическая волна

$$\Psi = \Psi_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \quad (4.1)$$

где ω и \vec{k} – ее частота и волновой вектор.

Волна (4.2) распространяется в направлении движения частицы ($\vec{k} \parallel \vec{v}$). Такие волны получили название *фазовых волн*, или *волн де Бройля*.

Идея де Бройля заключалась в том, чтобы, основываясь на аналогии между оптикой и механикой, создать новую *волновую механику* и применить ее к атомным явлениям. Попытка приписать электрону, и вообще всем частицам, подобно фотонам, двойственную природу, наделить их волновыми и корпускулярными свойствами, связанными между собой квантом действия, – такая задача представлялась крайне необходимой и плодотворной. «Возникла необходимость создать новую механику волнового характера, которая будет относиться к старой механике как волновая оптика к геометрической оптике», – писал де Бройль в книге «Революция в физике».

Необходимо было вывести соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц. Эти соотношения должны быть релятивистски инвариантными.

Частица массы m , движущаяся со скоростью \vec{v} , имеет энергию

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (4.2)$$

и импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (4.3)$$

а состояние движения частицы характеризуется четырехмерным вектором энергии-импульса $(p_x, p_y, p_z, E/c)$.

С другой стороны, в волновой картине мы используем понятие частоты ω и волнового числа $k = |\vec{k}|$ (или длины волны $\lambda = 2\pi/k$), а соответствующим плоской волне 4-вектором является $(k_x, k_y, k_z, \omega/c)$.

Так как оба приведенных описания являются различными аспектами одного и того же физического объекта, то между ними должна существовать однозначная связь; релятивистски инвариантным соотношением между 4-векторами является

$$\frac{p_x}{k_x} = \frac{p_y}{k_y} = \frac{p_z}{k_z} = \frac{E}{\omega} = \hbar, \quad (4.4)$$

или

$$E = \hbar\omega; \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (4.5)$$

Выражения (4.5) называют *формулами де Бройля*. Длина волны де Бройля определяется, таким образом, формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}, \quad (4.6)$$

где $p = |\vec{p}|$. Именно эта длина волны должна фигурировать в формулах при объяснении эффекта Рамзауэра – Таунсенда и других явлений на основе волновых представлений¹.

С учетом (4.5) формулу (4.1) можно записать в виде плоской волны

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})\right], \quad (4.7)$$

которая соответствует частице, имеющей импульс \vec{p} и энергию E .

Волны де Бройля характеризуются фазовой и групповой скоростями. *Фазовая скорость* определяется из условия постоянства фазы волны (4.7) $Et - \vec{p}\vec{r} = const$ и для релятивистской частицы равна

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}, \quad (4.8)$$

то есть она всегда больше скорости света². *Групповая скорость* волн де Бройля равна скорости движения частицы:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = v. \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) следует связь между фазовой и групповой скоростями волн де Бройля:

$$v_\phi v_{gp} = c^2. \quad (4.10)$$

Экспериментальное подтверждение гипотеза де Бройля получила при исследовании ряда явлений, в частности, при изучении селективного отражения электронов от поверхности металлов американскими физиками К.Д. Дэвиссоном и Л.Х. Джермером, а также независимо от них английским физиком Дж. П. Томсоном в 1927 году.

¹ Для электронов, ускоренных электрическим полем с разностью потенциалов $U=1В$, длина волны де Бройля $\lambda = h/\sqrt{2mE} = h/\sqrt{2meU} = 1,22\text{нм}$; при $U=10\text{кВ}$ $\lambda=0,0122\text{ нм}$. Для молекулы водорода с энергией $E=6\cdot 10^{-7}\text{ Дж}$ (при $T=300\text{ К}$) $\lambda=0,1\text{ нм}$, что по порядку величины совпадает с длиной волны рентгеновского излучения.

² Это не противоречит теории относительности, так как фазовая скорость не характеризует скорости переноса энергии и массы частицы.

В опытах Дэвиссона и Джермера параллельный пучок моноэнергетических электронов из электронно-лучевой трубки T (рисунок 4.2) направляли на никелевую пластинку M . Отраженные электроны улавливались коллектором K , соединенным с гальванометром G . Коллектор мог быть установлен под любым углом θ относительно падающего пучка (но в одной плоскости с ним).

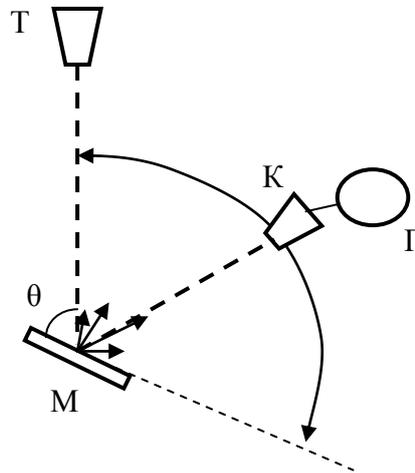


Рисунок 4.2 – Схема опыта Дэвиссона-Джермера

В результате этих опытов было показано, что угловое распределение рассеянных электронов имеет такой же характер, как и распределение рентгеновских лучей, рассеянных кристаллом. При изучении дифракции рентгеновских лучей на кристаллах было установлено, что положение дифракционных максимумов определяется по формуле

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (4.11)$$

где d – постоянная кристаллической решетки, n – порядок дифракции, λ – длина волны рентгеновского излучения.

Дэвиссоном и Джермером была изучена зависимость интенсивности I от ускоряющей разности потенциалов U для пучка электронов, падающих на кристалл при фиксированном угле скольжения θ . Зависимость оказалась типичной для дифракционных явлений (рисунок 4.3, где стрелками отмечено положение максимумов интенсивности, а цифрами обозначен порядок дифракционного максимума).

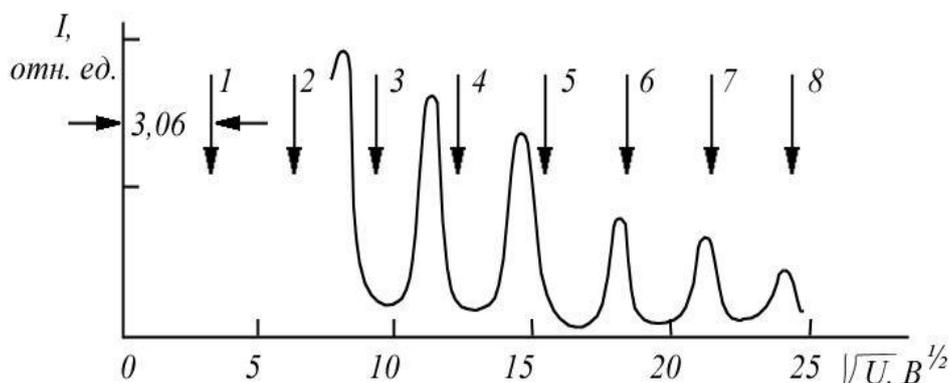


Рисунок 4.3 - Зависимость интенсивности пучка дифрагировавших электронов от ускоряющей разности потенциалов

Первые эксперименты, в которых были обнаружены волновые свойства частиц, производились с электронами. Но в соответствии с гипотезой де Бройля, волновыми свойствами должны обладать и другие более массивные микрочастицы (заряженные и электрически нейтральные): атомы, ионы, молекулы, протоны, нейтроны и т.д.

Так как длина волны де Бройля $\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{m\nu}$ обратно пропорциональна массе частицы m , то при одинаковой скорости движения длина волны де Бройля тяжелых частиц существенно меньше дебройлевской длины волны электрона. Чтобы наблюдать дифракцию тяжелых частиц на кристаллах, необходимо, чтобы их дебройлевская длина волны была сравнима с расстоянием между кристаллографическими плоскостями в кристалле ($\sim 10^{-10}$ м); это условие выполнимо только для медленных частиц.

Первые исследования, в которых наблюдалась дифракция нейтронов на кристаллах, были выполнены в 1936 г. Х. Хальбаном, П. Прайсверком и Д. Митчеллом. На рисунке 4.4 приведены результаты экспериментального исследования дифракции нейтронов на краю непрозрачного экрана. В опыте использовались нейтроны, дебройлевская длина волны которых $\lambda_B = 2$ нм.

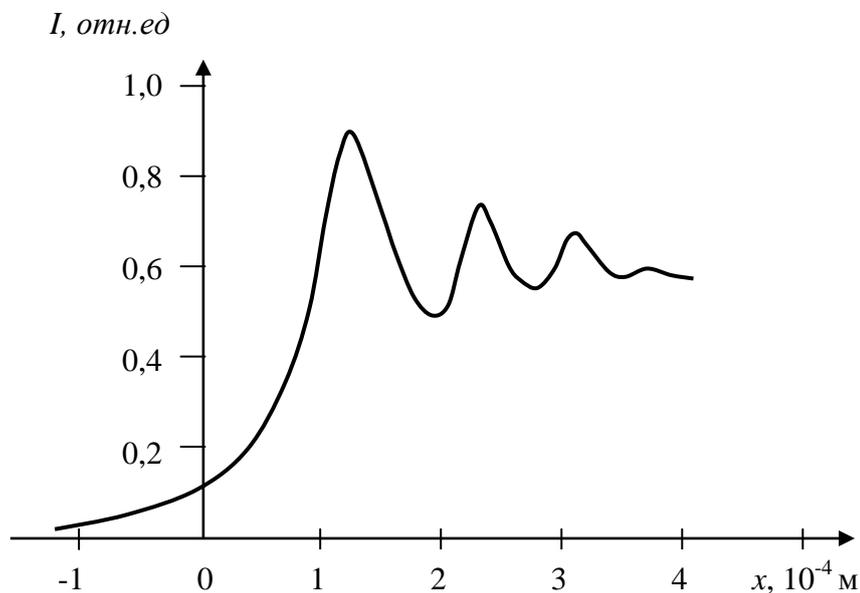


Рисунок 4.4 – Распределение нейтронов, дифрагировавших на краю экрана

Отметим, что рассеяние нейтронов на тяжелых ядрах также сопровождается возникновением типично дифракционного распределения рассеянных нейтронов, аналогичного наблюдаемому в оптике при дифракции света на поглощающем диске или шарике.

После усовершенствования техники эксперимента стала доступной наблюдению дифракция на кристаллах для еще более тяжелых частиц – атомов гелия, молекул водорода и др.

В результате было показано, что гипотеза де Бройля имеет универсальное значение. Все частицы независимо от их природы и внутреннего строения обладают волновыми свойствами.

Каков же физический смысл волн де Бройля и какова их связь с частицами вещества?

В рамках волнового описания движения частицы значительную сложность представил вопрос о ее пространственной локализации. Волны де Бройля (4.1), (4.7) заполняют все пространство и существуют неограниченное время. Свойства этих волн всегда и везде одинаковы: постоянны их амплитуда и частота, неизменны расстояния между волновыми поверхностями и др. С другой стороны, микрочастицы сохраняют свои корпускулярные свойства, то есть обладают определенной массой, локализованной в определенной области пространства. Для того, чтобы выйти из создавшегося положения, частицы стали представлять не монохроматическими волнами де Бройля, а наборами волн с близкими частотами (волновыми числами) – *волновыми пакетами*:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{k}) \exp\{-i[\omega(k)t - \vec{k}\vec{r}]\} d\vec{k}; \quad (4.12)$$

при этом амплитуды $A(\vec{k})$ отличны от нуля лишь для волн с волновыми векторами \vec{k} , заключенными в интервале $(\vec{k}_0 - \Delta\vec{k}; \vec{k}_0 + \Delta\vec{k})$. Поскольку групповая скорость волнового пакета равна скорости движения частицы, то было предложено представить частицу в виде волнового пакета. Но эта идея несостоятельна по следующим причинам. Частица является стабильным образованием и в процессе своего движения как таковая не изменяется. Такими же свойствами должен обладать и волновой пакет, претендующий представлять частицу. Поэтому нужно потребовать, чтобы с течением времени волновой пакет сохранял свою пространственную форму или – по меньшей мере – свою ширину. Однако так как фазовая скорость $v_\phi = E/p$ зависит от импульса частицы, то (даже в вакууме!) должна существовать дисперсия волн де Бройля. В результате фазовые соотношения между волнами пакета нарушаются, и пакет расплывается. Следовательно, частица, представляемая таким пакетом, должна быть нестабильной. Этот вывод противоречит опыту.

Далее было выдвинуто противоположное предположение: частицы первичны, а волны представляют их образования, то есть возникают, подобно звуку в среде, состоящей из частиц. Но такая среда должна быть достаточно плотной, ведь о волнах в среде, состоящей из частиц, имеет смысл говорить только тогда, когда среднее расстояние между частицами очень мало по сравнению с длиной волны. А в экспериментах, в которых

обнаруживаются волновые свойства микрочастиц, это не выполняется. Но даже если преодолеть это затруднение, то всё равно указанная точка зрения должна быть отвергнута. В самом деле, в соответствии с ней волновые свойства присущи системам многих частиц, а не отдельным частицам. Между тем волновые свойства частиц не исчезают и при малых интенсивностях падающих пучков. В опытах В.А. Бибермана, Н.Г. Сушкина и Л.М. Фабриканта, проведенных в 1949 году, применялись столь слабые пучки электронов, что средний промежуток времени между двумя последовательными прохождениями электрона через дифракционную систему (кристалл) было в 30000 (!) раз больше времени, затрачиваемого одним электроном на прохождение всего прибора. При таких условиях взаимодействие между электронами, конечно, не играло никакой роли. Тем не менее, при достаточно длительной экспозиции на фотопленке, помещенной за кристаллом, возникала дифракционная картина, ничем не отличающаяся от картины, получаемой при короткой экспозиции с пучками электронов, интенсивность которых была в 10^7 раз больше. Важно только, чтобы в обоих случаях общее число электронов, попадающих на фотопластинку, было одинаковым. Из этого следует, что и отдельные частицы обладают волновыми свойствами. Тем не менее, экспериментально установлено, что при падении на фотопластинку одной частицы дифракционной картины не возникает, каждый отдельный электрон вызывает почернение фотопластинки на небольшом участке. Всю дифракционную картину можно получить только в результате попадания на пластинку большого числа частиц.

Электрон в рассмотренном опыте полностью сохраняет свою целостность (заряд, массу и другие характеристики). В этом проявляются его корпускулярные свойства. В то же время налицо проявление и волновых свойств. Электрон никогда не попадает на тот участок фотопластинки, где должен быть минимум дифракционной картины. Он может оказаться только вблизи положения дифракционных максимумов. При этом нельзя заранее указать, в каком конкретном направлении полетит данная конкретная частица.

Представление о том, что в поведении микрообъектов проявляются как корпускулярные, так и волновые свойства, закреплено в термине *«корпускулярно-волновой дуализм»* и лежит в основе квантовой теории, где он и получил естественное истолкование.

Борн предложил следующую общепринятую теперь интерпретацию результатов описанных опытов¹: вероятность попадания электрона в некоторую точку на фотопластинке пропорциональна интенсивности соответствующей волны де Бройля, то есть квадрату амплитуды волнового

¹ Известны и другие опыты, в которых проявились волновые свойства микрочастиц, например, опыты Томсона и Тартаковского, Бёрнса, Мелленштадта и Дюкера.

поля в данном месте экрана. Таким образом, предложено *вероятностное (статистическое) толкование* природы волн, связанных с микрочастицами: закономерность распределения микрочастиц в пространстве можно установить только для большого числа частиц; для одной частицы можно определить только вероятность попадания в определенную область.

После знакомства с корпускулярно-волновым дуализмом частиц ясно, что для описания механического состояния микрочастиц непригодны те методы, которые используются в классической физике. В квантовой механике для описания состояния нужно применять новые специфические средства. Важнейшим из них является понятие о *волновой функции, или функции состояния (Ψ -функции)*.

Функция состояния есть математический образ того волнового поля, которое следует связывать с каждой частицей. Так, функцией состояния свободной частицы может быть плоская монохроматическая волна де Бройля (4.1) или (4.7). В общем случае волновая функция зависит от физических условий, в которых находится частица, и от ее параметров. Для микрочастицы, подверженной внешнему воздействию (например, для электрона в поле ядра), зависимость волновой функции от координат и времени может иметь весьма сложный вид.

Далее мы увидим, что посредством волновой функции достигается наиболее полное описание механического состояния микрообъекта. Зная волновую функцию, можно определить, с какой вероятностью будут наблюдаться на опыте возможные значения каждой из измеряемых величин. Функция состояния содержит в неявном виде всю информацию о движении и квантовых свойствах частиц, поэтому говорят, что квантовое состояние полностью описывается волновой функцией.

Согласно статистической интерпретации волн де Бройля, вероятность локализации частицы определяется интенсивностью волны де Бройля, так что вероятность обнаружения частицы в малом объеме dV в окрестности точки \vec{r} в момент времени t равна

$$dW(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV. \quad (4.13)$$

С учетом комплексности функции $\Psi(\vec{r}, t)$ имеем:

$$dW(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)dV, \quad (4.14)$$

где символом $*$ отмечена операция комплексного сопряжения.

Для плоской монохроматической волны де Бройля (4.1)

$$\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0^* \Psi_0 = const,$$

то есть равновероятно обнаружить свободную частицу в любом месте пространства.

Величину

$$\frac{dW}{dV} = \Psi^* \Psi \quad (4.15)$$

называют *плотностью вероятности*. Вероятность найти частицу в момент времени t в конечном объеме V , согласно теореме сложения вероятностей, равна

$$W(V,t) = \int_V dW = \int_V |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV. \quad (4.16)$$

Если в (4.16) произвести интегрирование в бесконечных пределах, то будет получена полная вероятность обнаружения частицы в момент времени t где-нибудь в пространстве. Это – вероятность достоверного события, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1. \quad (4.17)$$

Условие (4.17) называют *условием нормировки*, а Ψ -функцию, удовлетворяющую ему, – *нормированной*.

Подчеркнем еще раз, что для частицы, движущейся в силовом поле, в качестве $\Psi(\vec{r},t)$ выступает функция более сложного вида, чем плоская волна де Бройля (4.1).

Как уже отмечалось, движущейся частице можно поставить в соответствие волновой пакет. В теории волновых процессов доказывается: если пакет локализован в области пространства размерами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то волновые числа k_x, k_y, k_z волн, необходимых для формирования этого пакета, не могут занимать сколь угодно узкие интервалы $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$. Для этих интервалов существуют ограничения, выражаемые неравенствами

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta k_x &\geq 2\pi, \\ \Delta y \Delta k_y &\geq 2\pi, \\ \Delta z \Delta k_z &\geq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Умножая обе части неравенств (4.18) на \hbar , получаем:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Соотношения (4.19) называют *соотношениями неопределённостей Гейзенберга*. В соответствии с этими соотношениями любая физическая система не может находиться в состояниях, в которых координаты ее центра инерции и импульс одновременно принимают вполне определённые, точные значения. Чем меньше неопределённость

координаты, тем больше неопределённость соответствующей проекции импульса. Это утверждение является одним из наиболее важных положений квантовой механики (*принцип неопределённости Гейзенберга*).

Соотношения, аналогичные (4.19), должны выполняться для любой пары так называемых канонически сопряжённых величин. Постоянной Планка h , содержащейся в соотношениях неопределенностей, устанавливается предел в точности одновременного измерения таких величин. При этом неопределенность в измерениях связана не с несовершенством экспериментальной техники, а с объективными (волновыми) свойствами частиц материи.

Другим важным моментом в рассмотрении состояний микрочастиц является воздействие прибора на микрообъект. В процессе измерения физические параметры состояния микросистемы могут измениться; нижний предел этого изменения также устанавливается соотношением неопределенностей.

Ввиду малости \hbar по сравнению с макроскопическими величинами той же размерности действия, соотношения неопределенностей существенны в основном для явлений атомных и меньших масштабов и не проявляются в опытах с макроскопическими телами.

Соотношения неопределенностей, впервые полученные в 1927 году немецким физиком В. Гейзенбергом, явились важным этапом в выяснении закономерностей атомных явлений и построении квантовой механики.

Как следует из статистической интерпретации смысла волновой функции, частица может быть с некоторой вероятностью обнаружена в любой точке пространства, в которой волновая функция отлична от нуля. Поэтому результаты экспериментов по измерению, например, координаты носят вероятностный характер. Это означает, что при проведении серии одинаковых экспериментов над одинаковыми системами (то есть при воспроизведении одинаковых физических условий) получаются каждый раз разные результаты. Однако некоторые значения измеряемой величины будут более вероятными, чем другие, и будут появляться чаще. Чаще всего будут получаться те значения координаты, которые близки к значению, определяющему положение максимума волновой функции. Если максимум выражен четко (волновая функция представляет собой узкий волновой пакет), то частица в основном находится вблизи этого максимума. Тем не менее, некоторый разброс в значениях координаты (неопределенность порядка полуширины максимума) неизбежен. То же относится и к измерению импульса.

Несколько иной смысл имеет соотношение неопределённости для энергии E и времени t :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (4.20)$$

Если система находится в стационарном состоянии, то из соотношения неопределённостей (4.20) следует, что энергию системы даже в этом состоянии можно измерить только с точностью, не превышающей $\hbar/\Delta t$, где Δt – длительность процесса измерения. Соотношение (4.20) справедливо также, если под ΔE понимать неопределённость значения энергии нестационарного состояния замкнутой системы, а под Δt – характерное время, в течение которого существенно меняются средние значения физических величин в этой системе.

Из соотношения неопределённостей (4.20) следуют важные выводы относительно возбужденных состояний атомов, молекул, ядер. Такие состояния нестабильны, и энергии соответствующих им уровней не могут быть строго определёнными, то есть энергетические уровни обладают некоторой *естественной шириной* $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$, где Δt – время жизни возбужденного состояния. Например, при альфа-распаде радиоактивных ядер энергетический разброс испускаемых α -частиц связан с временем жизни τ ядер соотношением¹ $\Delta E \approx \hbar/\tau$.

Из соотношений неопределённостей (4.19) следует вывод о том, что в квантовой механике теряет смысл деление полной энергии E на кинетическую и потенциальную. Действительно, одна из них зависит от импульсов, а другая – от координат. Эти же переменные не могут одновременно иметь определенные значения. Энергия E должна определяться и измеряться лишь как полная энергия, без деления на кинетическую и потенциальную.

Презентации по теме лекции 4:

Волновые свойства частиц

Задачи по теме лекции 4

Лабораторные работы:

Дифракция электронов на кристаллических структурах (теория и задание, компьютерное моделирование)

Эффект Рамзауэра

Видеофрагмент 1 «Дифракция электронов»

Видеофрагмент 2 «Дифракция молекул»

¹ Для основного состояния атома $\Delta t \rightarrow \infty$, а энергия имеет вполне определённое значение, то есть $\Delta E = 0$. Для нестабильной частицы $\Delta t \approx 10^{-20}$ с, и об определенном значении её энергии говорить не приходится. Если время жизни атома в возбуждённом состоянии принять равным $\tau = \Delta t \approx 10^{-8}$ с, то ширина энергетического уровня $\Delta E = \hbar/\Delta t \sim 10^{-26}$ Дж и ширина спектральной линии, возникающей при переходе атома в нормальное состояние, $\Delta \nu \approx \Delta E/h \sim 10^8$ Гц.