Белорусский государственный университет

УДК 517.977

Лавринович
Леонид Иванович

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВОЗМУЩЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2016

Научная работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель –	**Калинин Анатолий Иосифович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета.
Официальные оппоненты:	**Костюкова Ольга Ивановна,** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела математической теории систем ГНУ «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»; **Астровский Анатолий Иванович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики УО «Белорусский государственный экономический университет.
Оппонирующая организация –	УО «Белорусский государственный технологический университет».

Защита состоится «17» июня 2016 г. в 14 00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030 г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря (017) 209-57-09. .

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «__» мая 2016 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.А. Еровенко

ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем, зачастую модели существенно упрощаются (понижается порядок дифференциальных уравнений, исчезают сложные члены и т.п.), если положить эти параметры равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к коррекции решений более простых задач оптимального управления.

В частности, выигрыш от применения асимптотических методов к задачам оптимизации квазилинейных систем, содержащих малые параметры при нелинейностях, состоит, прежде всего, в том, что вместо исходных по существу нелинейных задач решаются задачи оптимизации линейных динамических систем. При применении асимптотических методов к задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, которые содержат малые параметры при части производных, исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи с большим числом фазовых переменных. Кроме того, при применении асимптотического подхода удается избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

Настоящая диссертация посвящена построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению задач минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных и сингулярно возмущенных линейных систем. При этом рассматриваются переходные процессы, т.е. правый конец траекторий закреплен.

Проведенные исследования опираются на фундаментальный результат теории оптимальных процессов – принцип максимума Л.С. Понтрягина[1] и асимптотические методы теории дифференциальных уравнений.

Сингулярно возмущенные линейно-квадратичные задачи оптимального управления рассматривались ранее многими авторами (А.Б. Васильева, В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев, V. Dragan, A.H. Haddad, A. Halanay, R.A. Jackel, P.V. Kokotovic, C.F. Kung, R.E. O'Malley, R.R. Wilde и др.), однако в их работах ограничения на траектории не накладывались, что значительно упрощает исследование задачи. Что касается задачи минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы, то она методом малого параметра исследуется впервые.

[1] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] – М.: Наука, 1983. –392 с.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Работа выполнена на кафедре методов оптимального управления Белорусского государственного университета. Тема диссертации соответствует приоритетному направлению «12.1. Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011 – 2015 годы.

Исследования проводились в рамках НИР «Позиционное решение задач оптимального управления и наблюдения» (№ госрегистрации 20120334), выполнявшейся в 2011 – 2015 гг. по плану Минобразования РБ, и темы «Численные и асимптотические методы решения задач управления и наблюдения в условиях неопределенности» (№ госрегистрации 20111259), выполнявшейся в 2011 – 2015 гг. в рамках государственной программы научных исследований «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития (Конвергенция 1.3.02)», подпрограммы «Математические методы».

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка и обоснование алгоритмов приближенного (в асимптотическом смысле) решения задач минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях возмущенных динамических систем.

Объектом исследования являются задачи оптимизации переходных процессов в квазилинейных и сингулярно возмущенных линейных системах.

Предметом исследования являются асимптотические свойства оптимальных управлений в рассматриваемых задачах.

Научная новизна

В диссертации доказаны теоремы об асимптотических свойствах оптимальных управлений в задачах минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных и сингулярно возмущенных линейных динамических систем. На их основе разработаны алгоритмы построения асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решениям этих задач. Показано, как можно использовать построенные асимптотические приближения для нахождения оптимальных управлений при заданных значениях малого параметра. Построено приближенное (в асимптотическом смысле) решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса путем ее сведения к задаче оптимизации сингулярно возмущенной системы.

Все разработанные алгоритмы и предваряющие их результаты качественного анализа являются новыми, поскольку рассматриваемые в диссертации задачи ранее методом малого параметра не исследовались. В то же время они развивают известные результаты, полученные другими авторами для линейно-квадратичных задач оптимального управления без ограничений на траектории.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты:

– алгоритмы построения асимптотических приближений к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи в задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы;

– теорема о существовании, единственности и асимптотических свойствах оптимального управления в указанной выше задаче;

– алгоритмы построения асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решениям задач минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях линейных сингулярно возмущенных систем;

– теоремы об асимптотических свойствах оптимальных управлений в рассмотренных сингулярно возмущенных задачах;

– процедура построения приближенного (в асимптотическом смысле) решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса.

Личный вклад соискателя ученой степени

Результаты, представленные в диссертации, получены лично соискателем под руководством научного руководителя, который поставил рассматриваемые задачи и предложил методику их исследования.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты и отдельные положения работы докладывались на: XV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения 2013) (Гродно, 13-16 мая 2013 г.)]; Международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова (Одесса, Украина, 15-22 июня 2013 г.); Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (1918-1969) (Минск, 1-5 октября 2013 г.); XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения 2014) (Новополоцк, 20-22 мая 2014 г.); Международной конференции «Динамика систем и процессы управления» посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, Россия, 15 – 20 сентября 2014 г.); 79-й научно-технической конференции профессорско-преподаватель-ского состава, научных сотрудников и аспирантов БГТУ (с международным участием) (Минск, 2-6 февраля 2015 г.); XVI Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП-2015), посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова (Смоленск, 15–17 мая 2015 г.); Международной научно-технической конференции «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов» (Минск, 22–24 октября 2015 г.); Международной математической конференции «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7–10 декабря 2015г.).

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах, в том числе в 5 статьях в научных журналах в соответствии с требованиями пункта 18 Положения о присуждении ученых званий в республике Беларусь, общим объемом 3,6 авторских листа, а также в 3 статьях в сборниках материалов научных конференций и в 7 тезисах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части из четырех глав, заключения, библиографического списка. Полный объем диссертации составляет 87 страниц. В работе имеются 4 таблицы, занимающие 1 страницу. Библиографический список содержит 148 наименований, включая собственные публикации автора.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **главе 1** указывается, какие классы возмущенных задач оптимального управления рассматриваются в работе, уточняется, что понимается под асимптотическими приближениями к их решениям (раздел 1.1), приводится аналитический обзор литературы по теме диссертации (раздел 1.2), описывается методика исследования (раздел 1.3).

В диссертации рассматриваются возмущенные задачи оптимального управления с интегральным критерием качества и фиксированным правым концом траекторий, которые символически могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = f\left(x,u,t,\mu\right),\; x\left(t_*\right) = x_*, \tag{1}$$

$$x\left(t^*\right) = 0, \tag{2}$$

$$J(u) = \int\limits_{t_*}^{t^*} f_0\left(x,u,t,\mu\right)dt \to \min, \tag{3}$$

где μ – малый положительный параметр $\left(0 < \mu < \mu_0\right)$, x – n-вектор фазового состояния системы, u – r-вектор управления, t_*, t^* – заданные моменты времени $\left(t_* < t^*\right)$.

Управление $u(t,\mu)$, $t \in \left[t_*,t^*\right]$, с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым в этой задаче, если для порожденной им траектории системы (1) выполняется терминальное ограничение (2). Допустимое управление, на котором критерий качества (3) принимает наименьшее значение, называется оптимальным. Для определенности будем считать управления непрерывными справа в любой момент времени. Под оптимальным управлением типа обратной связи (оптимальной обратной связью) понимают такую вектор-функцию $u^0(x,t,\mu)$, что для любого начального состояния системы (x_*,t_*), $t_* < t^*$, имеет место $u^0(x_*,t_*,\mu) = u^0(t_*,\mu)$, где $u^0(t,\mu)$, $t \in \left[t_*,t^*\right]$, – оптимальное управление в задаче (1) – (3).

Определение 1.1. *Управление* $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in \left[t_*,t^*\right]$, *с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка* ($N = 0,1,2,\ldots$) *в задаче* (1) – (3)*, если оно отклоняется по критерию качества* (3) *от оптимального управления на величину* $O\left(\mu^{N+1}\right)$*, а порожденная им траектория* $x\left(t,\mu\right)$*,* $t \in \left[t_*,t^*\right]$*, удовлетворяет терминальному ограничению* (2) *с точностью того же порядка малости.*

Определение 1.2. *Вектор-функцию* $u^{(N)}(x,t,\mu)$ *назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния* (x_*,t_*), $t_* < t^*$, *имеет место* $u^{(N)}(x_*,t_*,\mu) = u^{(N)}(t_*,\mu)$, *где* $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in \left[t_*,t^*\right]$, *– асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче* (1) – (3).

Построение оптимальной обратной связи принято называть синтезом оптимальной системы. По аналогии построение асимптотически субоптимальной обратной связи назовем асимптотически субоптимальным синтезом. Проблема синтеза является центральной в теории оптимальных процессов.

Применяемый в диссертации подход к исследованию рассмотренных задач является модификацией методики, предложенной А.И. Калининым[2]. В ее основе лежит идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Суть модификации состоит в следующем. Для многих задач оптимального управления можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов можно составить систему конечных уравнений. Назовем эти уравнения, как и их корни, определяющими. Формируются они путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя соответствующие асимптотические методы (в регулярно возмущенных задачах – классическую технику Пуанкаре, а в сингулярно возмущенных – метод пограничных функций[3]), можно разложить левые части определяющих уравнений по степеням малого параметра, а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику определяющих элементов. Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложений определяющих элементов. В случае регулярных возмущений ими будут определяющие элементы в невозмущенной задаче, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$. Если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то старшими коэффициентами разложений, как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности.

Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов. Заметим, что идея использования конечномерной параметризации решения в асимптотическом анализе восходит к Ван-дер-Полю, который применял ее при исследовании колебательных режимов.

Глава 2 посвящена построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе.

---

[2] Калинин, А.И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А.И. Калинин. – Минск: Экоперспектива, 2000. – 183 с.

[3] Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 242 с.

В разделе 2.1 в классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*,$$
$$x(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} \left(x^{\mathrm{T}} Q(t) x + u^{\mathrm{T}} P(t) u \right) dt \to \min, \tag{4}$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени, x – n-вектор фазового состояния системы, $f(x,t)$, $t \in T$, – нелинейная вектор-функция, $Q(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

Результаты, приведенные для этой задачи, справедливы и для отрицательных значений μ, если только они достаточно малы по модулю. Поэтому будем считать областью изменения малого параметра, некоторую окрестность нуля $|\mu| < \mu_0$.

Предположение 2.1. *Элементы матриц* $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in R^n$, $t \in T$, *принадлежат классу* C^p, $p \geq 1$.

В разделах 2.2 – 2.4 излагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N $(N < p)$ можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка (в смысле определения 1.1) в задаче (4).

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$ и, в отличие от нее, является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2.2. *Базовая задача имеет решение, которое является нормальной экстремалью.*

Последнее означает, что принцип максимума в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi + Q(t)x^0(t)$, что выполняется условие

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u^0(t) - \frac{1}{2}u^{0^{\mathrm{T}}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in R^r}\left(\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u \right), \; t \in T.$$

Предположение 2.3. *Оптимальному управлению в базовой задаче соответствует в силу сформулированного принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.*

Пусть $\nu_0 = \psi^0(t_*)$, а $x(t,\nu,\mu), \psi(t,\nu,\mu)$, $t \in T$, – решение начальной задачи

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi,\ x(t_*) = x_*,$$
$$\dot{\psi} = Q(t)x - \left(A(t) + \mu \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right)^{\mathrm{T}} \psi,\ \psi(t_*) = \nu, t \in T.$$

В разделе 2.3 доказана теорема, на которую опирается алгоритм построения асимптотики решения рассмотренной задачи.

Теорема 2.1. *При выполнении предположений 2.1 – 2.3 в задаче* (4) *с достаточно малым* (*по модулю*) μ *существует единственное оптимальное управление, которое представимо в виде* $u^0(t,\mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t,\nu(\mu),\mu),\ \ t \in T$. *Начальное значение* $\nu(\mu)$ *вектора сопряженных переменных удовлетворяет системе определяющих уравнений*

$$x\left(t^*,\nu,\mu\right) = 0, \qquad (5)$$

причем $\nu(\mu) \in C^p,\ \nu(0) = \nu_0$.

Суть алгоритма построения асимптотически субоптимальных управлений состоит в построении полиномов Тейлора вектора определяющих элементов $\nu(\mu)$ с помощью асимптотического разложения корней системы определяющих уравнений (5) по описанной выше схеме.

Асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение базовой задачи. При построении асимптотических приближений более высокого порядка вычисления помимо решения базовой задачи сводятся к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений и нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

В разделе 2.4 показано, как можно использовать построенные асимптотические приближения для нахождения оптимального управления в задаче (4) с заданным значением μ.

В разделе 2.5 получены формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядков (см. определение 1.2)

Результаты второй главы апробированы на задаче торможения вращений твердого тела, близкого к сферически симметричному (раздел 2.6).

Глава 3 посвящена исследованию задачи управления линейной сингулярно возмущенной системой с минимальными энергетическими затратами.

В разделе 3.1 в классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассматривается следующая сингулярно возмущенная линейно-квадратичная задача:

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u,\ y(t_*) = y_*,\ y\left(t^*\right) = 0,$$
$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u,\ z(t_*) = z_*,\ z\left(t^*\right) = 0, \tag{6}$$
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P(t) u dt \to \min,$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени, y – n-вектор медленных переменных, z – m-вектор быстрых переменных, $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

Предположение 3.1. *Действительные части всех собственных значений матрицы* $A_4(t)$, $t \in T$, *отрицательны.*

Предположение 3.2. *Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.*

В разделах 3.2 – 3.5 излагается и обосновывается алгоритм, который позволяет для заданного числа N построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка (в смысле определения 1.1) в задаче (6).

Первый этап построения асимптотически субоптимальных управлений состоит в решении вырожденной задачи

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u,\ y(t_*) = y_*,\ y(t^*) = 0,$$
$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P(t) u dt \to \min, \tag{7}$$

где

$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t),\ B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t). \tag{8}$$

В дальнейшем эту задачу будем называть первой базовой.

Предположение 3.3. *Динамическая система в задаче* (7) *является вполне управляемой.*

При таком предположении первая базовая задача имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $y^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные управление и траектория в задаче (7), тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A_0^{\mathrm{T}}(t)\psi$, что выполняется условие

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B_0(t)u^0(t) - \frac{1}{2}u^{0^{\mathrm{T}}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in R^r}\left(\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B_0(t)u - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right),\ t \in T.$$

Из этого условия непосредственно следует $u^0(t) = P^{-1}(t)B_0^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t)$, $t \in T$.

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса:

$$\begin{aligned}&\frac{dz}{ds}=A_4(t^*)z+B_2(t^*)u,\ z(0)=A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*),\\&z(-\infty)=0,\ J_2(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}u^{\mathrm{T}}P(t^*)u\,ds\to\min,\end{aligned}\tag{9}$$

которую будем называть второй базовой.

Предположение 3.4. *Выполнено условие управляемости*

$$rank\left(B_2(t^*),\,A_4(t^*)B_2(t^*),\ldots,A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)\right)=m.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда в свою очередь следует, что задача (9) имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. В этом случае принцип максимума может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^*(s)$, $z^*(s)$, $s\le 0$, – оптимальные управление и траектория в задаче (9), тогда существует такое решение $\Pi\psi(s)$, $s\le 0$, сопряженной системы $d\Pi\psi/ds=-A_4^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi\psi$, что для любого $s\le 0$ выполняется условие

$$\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s)B_2(t^*)u^*(s)-\frac{1}{2}u^{*\mathrm{T}}(s)P(t^*)u^*(s)=\max_{u\in R^r}\left(\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s)B_2(t^*)u-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t^*)u\right).$$

Отсюда непосредственно следует $u^*(s)=P^{-1}(t^*)B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi\psi(s)$, $s\le 0$.

Замечание 3.1. Подчеркнем, что единственная информация о решении второй базовой задачи, которая используется при построении асимптотически субоптимальных управлений, – это начальное значение $\Pi\psi(0)$ вектора сопряженных переменных. Нет необходимости строить оптимальное управление $u^*(s)$, $s\le 0$, что впрочем, и невозможно, если задача решается численно.

После решения базовых задач строится вектор

$$\nu_0=\sigma_0-\left(A_2(t^*)A_4^{-1}(t^*)\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0,\quad \lambda_0=\psi^0(t^*),\ \ \sigma_0=\Pi\psi(0).\tag{10}$$

При выполнении предположений 3.1, 3.3, 3.4 задача (6) имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. В разделе 3.4 доказана теорема об асимптотических свойствах оптимального управления в этой задаче.

Теорема 3.1. *При выполнении предположений 3.1–3.4 решению задачи* (6) *с достаточно малым* μ *соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных* $\left(\psi_1^0(t,\mu),\psi_2^0(t,\mu)\right)$, $t\in T$. *Величины* $\lambda(\mu)=\psi_1^0(t^*,\mu)$, $\nu(\mu)=\psi_2^0(t^*,\mu)$, *являющиеся определяющими элементами задачи* (6), *допускают асимптотические разложения*

$$\lambda(\mu)\sim\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k,\ \nu(\mu)\sim\nu_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k,\tag{11}$$

в которых ν_0 *задается формулой* (10), *а* λ_0, σ_0 *– начальные значения сопряженных переменных соответственно в первой и второй базовых задачах.*

Суть алгоритма построения асимптотически субоптимальных управлений в задаче (6) состоит в нахождении коэффициентов разложений (11) с помощью описанной выше методики. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t,\mu) &= P^{-1}(t)\Big(B_0^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\Pi\psi\Big(\big(t-t^*\big)/\mu\Big)\Big) = \\ &= u^0(t) + u^*\Big(\big(t-t^*\big)/\mu\Big), t \in T. \end{aligned} \tag{12}$$

и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Заметим, что это управление не зависит от начального состояния z_* вектора быстрых переменных и при малых μ будет существенно отличаться от решения $u^0(t)$, $t \in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности момента t^*. Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

Замечание 3.2. При построении асимптотически субоптимального управления заданного порядка N достаточно найти асимптотические приближения для определяющих элементов $\lambda(\mu)$, $\nu(\mu)$ с точностью порядка μ^{N+1}. Это можно сделать при ослабленном предположении 3.2, а именно, достаточно потребовать, чтобы элементы матриц, формирующих задачу (6), имели непрерывные производные до порядка $N+2$ включительно.

Построенные приближения можно использовать для нахождения оптимального управления в задаче (6) при заданном значении малого параметра. Для этого в разделе 3.5 предложена соответствующая вычислительная процедура.

В разделе 3.6 получена формула для асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка. Эта обратная связь, которая линейна по y, не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

Результаты, полученные в третьей главе, апробированы на задаче оптимальной переориентации динамически симметричного твердого тела, вращающегося вокруг оси симметрии (раздел 3.7).

Глава 4 посвящена построению асимптотики решения линейно-квадратичных задач оптимального управления с сингулярными возмущениями и с большой длительностью процесса.

В разделе 4.1 в классе r-мерных управляющих воздействий рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u,\ y(t_*) = y_*,\ y(t^*) = 0,\\
&\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u,\ z(t_*) = z_*,\ \ z(t^*) = 0,\\
&J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}\left(y^{\mathrm{T}}M(t)y + \mu z^{\mathrm{T}}L(t)z + u^{\mathrm{T}}P(t)u\right)dt \to \min,
\end{aligned} \tag{13}$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени $\left(t_* < t^*\right)$, y – n-вектор медленных переменных, z – m-вектор быстрых переменных, $M(t)$, $L(t)$ – неотрицательно-определенные симметрические матрицы, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$. Считаются выполненными предположения 3.1, 3.2.

Задача (13) отличается от задачи (6) только наличием фазовых переменных в критерии качества. Это несущественное, на первый взгляд, обобщение значительно усложняет ее исследование с помощью описанной выше методики. Дело в том, что сопряженная система в данном случае содержит фазовые переменные, и, как следствие, для асимптотического разложения определяющих уравнений приходится применять метод пограничных функций не к начальной, а к краевой задаче для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, что приводит к более сложным в значительной степени вычислениям. Вместе с тем главы 3 и 4 имеют много общего, поскольку в них рассматриваются близкие по сути задачи.

В разделах 4.2 – 4.5 предлагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (13) (см. определение 1.1).

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения вырожденной задачи

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u,\ y(t_*) = y_*,\ y(t^*) = 0,\\
&J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}\left(y^{\mathrm{T}}M(t)y + u^{\mathrm{T}}P(t)u\right)dt \to \min,
\end{aligned} \tag{14}$$

где по-прежнему матрицы $A_0(t)$ и $B_0(t)$ задаются формулами (8). В дальнейшем задачу (14) будем называть *первой базовой*.

Предположение 4.1. *Динамическая система в задаче (14) является вполне управляемой.*

Предположение 4.2. *Оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных.*

При сделанных предположениях задача (14) имеет единственное решение. Оптимальное управление в ней, как и в задаче (7), допускает представление

$u^0(t)=P^{-1}(t)B_0^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t),\ t\in T,$ но теперь вектор сопряженных переменных $\psi^0(t),\ t\in T$, является решением системы уравнений $\dot\psi=-A_0^{\mathrm{T}}(t)\psi+M(t)y^0(t),$ в которой присутствует оптимальная траектория $y^0(t),\ t\in T.$

На втором этапе построения асимптотически субоптимальных управлений решается вторая базовая задача, которая ничем не отличается от задачи (9). Считается выполненным предположение 3.4. Тогда вторая базовая задача имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. Пусть как и прежде $u^*(s),\ z^*(s),\ s\le 0,$ – оптимальные управление и траектория во второй базовой задаче, $\Pi\psi(s),\ s\le 0$, соответствующий им вектор сопряженных переменных. После решения базовых задач формируется вектор

$$\nu_0=\sigma_0-\left(A_2\left(t^*\right)A_4^{-1}\left(t^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\zeta_0,\quad \zeta_0=\psi^0(t^*),\ \sigma_0=\Pi\psi(0). \tag{15}$$

Пусть

$$F(t,t_*)=\begin{pmatrix} F_{11}(t,t_*) & F_{12}(t,t_*)\\ F_{21}(t,t_*) & F_{22}(t,t_*)\end{pmatrix},\ t\in T,$$

– матрица с блоками размеров ($n\times n$), которая является решением начальной задачи $\dot F=\bar A(t)F$, $F(t_*)=E_{2n}$, где

$$\bar A(t)=\begin{pmatrix} A_0(t) & B_0(t)P^{-1}(t)B_0^{\mathrm{T}}(t)\\ M(t) & -A_0^{\mathrm{T}}(t)\end{pmatrix},$$

а E_{2n} – единичная матрица.

Предположение 4.3. *Имеет место* $\det F_{22}(t^*,t_*)\ne 0$.

При выполнении предположений 3.1, 3.4, 4.1 задача (13) имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. Сформулируем утверждение, доказанное в разделе 4.4.

Теорема 4.1. *При выполнении предположений 3.1, 3.2, 3.4, 4.1 – 4.3 оптимальному управлению в задаче* (13) *с достаточно малым* μ *соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных* $\left(\psi_1^0(t,\mu),\psi_2^0(t,\mu)\right),\ t\in T$. *Величины,* $\zeta(\mu)=\psi_1^0(t^*,\mu)$, $\nu(\mu)=\psi_2^0(t^*,\mu)$ *допускают асимптотические разложения*

$$\zeta(\mu)\sim\zeta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\zeta_k,\ \nu(\mu)\sim\nu_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k, \tag{16}$$

в которых ν_0 *задается формулой* (15), а ζ_0, σ_0 *– начальные значения сопряженных переменных соответственно в задачах* (9), (14).

Суть алгоритма построения асимптотики решения задачи (13) состоит в нахождении коэффициентов асимптотических рядов (16) с помощью изложенной выше методики. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка как и в предыдущей сингулярно возмущенной задаче имеет вид (12) и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Для построения асимптотических приближений более высокого порядка помимо решения базовых задач нужно интегрировать системы линейных дифференциальных уравнений и находить корни невырожденных линейных алгебраических систем. Построить асимптотически субоптимальное управление заданного порядка N можно при ослабленном предположении 3.2, потребовав, чтобы элементы матриц, формирующих задачу (13), принадлежали классу C^{N+2}.

В разделе 4.5 показано, как можно использовать построенные асимптотические приближения для нахождения оптимального управления в задаче (13) с заданным значением μ.

В разделе 4.6 получена формула для линейной по медленным переменным асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка в задаче (13). Как и в задаче (6), эта связь не зависит от быстрых переменных.

В разделе 4.8 в классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассматривается следующая задача оптимального управления линейной стационарной системой:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x(0) = x_0, \tag{17}$$

$$x(T/\mu) = x_1, \; J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{T/\mu} \left(x^{\mathrm{T}} M x + u^{\mathrm{T}} P u\right) dt \to \min, \tag{18}$$

где μ – малый положительный параметр, T – положительное число, x – n-вектор фазовых переменных, M – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, а P – положительно-определенная симметрическая матрица.

Предположение 4.4. *Динамическая система в задаче (17), (18) является вполне управляемой.*

Определение 4.1. *Управление* $u(t,\mu)$, $t \in T$, *с кусочно-непрерывными компонентами назовем асимптотически субоптимальным в задаче* (17) – (18), *если для любого натурального числа N имеет место*

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{J\left(u(\cdot,\mu)\right) - J\left(u^0(\cdot,\mu)\right)}{\mu^N} = 0, \; \lim_{\mu \to 0} \frac{x(T/\mu,\mu) - x_1}{\mu^N} = 0,$$

где $u^0(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, *оптимальное управление, а* $x(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, *траектория системы* (17), *порожденная управлением* $u(t,\mu)$, $t \in [0, T/\mu]$.

Заметим, что данное определение означает, что управление $u(t,\mu)$, $t \in T$, является асимптотически субоптимальным управлением любого порядка (в смысле определения 1.1).

Предположение 4.5 *Матрица*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & BP^{-1}B^{\mathrm{T}} \\ M & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

является условно устойчивой, т.е. действительные части ее собственных значений отличны от нуля, причем число положительных частей равно числу отрицательных.

Введем в рассмотрение задачи оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

$$\begin{gathered} \frac{d\mathrm{Q}_0 z}{dt} = A\mathrm{Q}_0 z + Bv,\, \mathrm{Q}_0 z(0) = x_0,\, \mathrm{Q}_0 z(\infty) = 0, \\ J_1(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\Big(\big(\mathrm{Q}_0 z\big)^{\mathrm{T}} M\mathrm{Q}_0 z + v^{\mathrm{T}}Pv\Big)dt \to \min, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \frac{d\Pi_0 z}{ds} = A\Pi_0 z + Bv,\, \Pi_0 z(0) = x_1,\, \Pi_0 z(-\infty) = 0, \\ J_2(v) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\Big(\big(\Pi_0 z\big)^{\mathrm{T}} M\Pi_0 z + v^{\mathrm{T}}Pv\Big)ds \to \min. \end{gathered} \tag{20}$$

При выполнении сделанных предположений они однозначно разрешимы, и пусть $v_1(t)$, $t \geq 0$, $v_2(s)$, $s \leq 0$, – оптимальные управления в этих задачах.

Задача (17), (18) по сути является задачей оптимизации сингулярно возмущенной системы, в чем можно убедиться с помощью перехода к “медленному времени” $\tau = \mu t$. Применение метода пограничных функций к краевой задаче принципа максимума приводит к следующему утверждению, доказанному в разделе 4.8.

Теорема 4.2. *При выполнении предположений 4.4, 4.5 управление*

$$u_0(t,\mu) = v_1(t) + v_2\big(t - T/\mu\big),\; t \in [0, T/\mu], \tag{21}$$

является асимптотически субоптимальным управлением в задаче (17) – (18).

Заметим, что это асимптотическое приближение, как и решение задачи имеет ярко выраженный магистральный характер . Управление (21) существенно отличается от нуля лишь в начале и конце процесса. Эти участки в терминах теории сингулярных возмущений есть ничто иное, как левый и правый пограничные слои.

Задачу с конкретной длительностью процесса T_0 можно погрузить в семейство задач (17) – (18) различными способами, выбирая T и μ так, чтобы $T/\mu = T_0$. Как видно из формулы (21), построенное асимптотическое приближение не зависит от способа погружения.

Результаты, полученные в четвертой главе, апробированы на задачах управления движением материальной точки малой массы по горизонтальной плоскости с учетом силы сопротивления среды (разделы 4.7, 4.8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

К основным результатам работы относятся:

1. Алгоритмы построения асимптотических приближений к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейных систем [1, 9, 10].
2. Алгоритмы построения асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решениям сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления. [2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15].
3. Теоремы о существовании, единственности и асимптотических свойствах решений указанных выше возмущенных задач [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13].
4. Процедура построения приближенного (в асимптотическом смысле) решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса. [3, 14].

Построенные с помощью предложенных алгоритмов асимптотические приближения можно использовать для нахождения оптимальных управлений в рассмотренных задачах при заданном значении малого параметра. Для этого предложены соответствующие вычислительные процедуры.

Полученные в диссертации результаты апробированы на задачах оптимального управления вращениями твердого тела и движением материальной точки малой массы.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Разработанные в диссертации алгоритмы могут найти непосредственное применение при решении прикладных задач оптимизации динамических систем, содержащих малые параметры. В первую очередь это относится к задачам управления механическими системами. Примеры таких задач приведены в диссертации. Результаты качественного анализа, на которые опираются алгоритмы, имеют и самостоятельное значение. В частности, они будут полезны при построении численных процедур оптимизации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Калинин, А.И. Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 2. – С. 3–12.
2. Калинин, А.И. Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Журнал вычислительной мататематики и мататематической физики. – 2015. – Т. 55, № 2. – С. 194 – 206.
3. Лавринович, Л.И. Применение метода возмущений к линейно-квадратичной задаче оптимального управления с большой длительностью процесса / Л.И. Лавринович // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. – 2015. – № 2. – С. 83–88.
4. Калинин, А.И. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 2. – С. 31–34.
5. Kalinin, A.I. Application of the small parameter method to the singularly perturbed linear-quadratic optimal control problem /A.I. Kalinin, L.I. Lavrinovich // Automation and Remote Control. – 2016. – Vol. 77, № 5. – P. 751–763.

Материалы конференций

6. Калинин, А.И. Построение асимптотических приближений к решению возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Материалы XVI Междунар. науч. конф. «Системы компьютерной математики и их приложения», посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова, Смоленск, 15–17 мая 2015 г. / СмолГУ. – Смоленск: Издательство СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 165–167.
7. Лавринович, Л.И. Асимптотика решения задачи об управлении линейной сингулярно возмущенной системой с минимальными энергетическими затратами / Л.И. Лавринович // Материалы Междунар. научно-техн. конф. «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов», Минск, 22–24 октября 2015 г. / БГТУ. – Минск, 2015. – С. 194–197.
8. Калинин, А.И. Применение метода малого параметра для решения задачи об управлении линейной сингулярно возмущенной системой с минимальными энергетическими затратами / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Материалы междунар. математической конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным

дифференциальным уравнениям». Минск, 7–10 декабря 2015г. / БГУ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2015. – Ч. 2. – С. 21–23.

Тезисы докладов

9. Калинин, А.И. Асимптотика решения задачи минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Еругинские чтения 2013: Тезисы докладов XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 13–16 мая 2013 г. в 2 частях / ГрГУ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2013. – Ч. 1. – С. 78–79.

10. Лавринович, Л.И. Асимптотически субоптимальный синтез в задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы / Л.И. Лавринович // Тезисы докладов Междунар. летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова, Одесса, 15-22 июня 2013 г. / ОНУ. – Одесса: Издательство «Астропринт», 2013. – С. 75.

11. Лавринович, Л.И. Асимптотика решения задачи минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях линейной сингулярно возмущенной системы / Л.И. Лавринович // Тезисы докладов Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (1918-1969), Минск, 1–5 октября 2013 г. / БГУ. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 166–167.

12. Калинин, А.И. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Еругинские чтения 2014: Тезисы докладов XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. в 2 частях. / ПГУ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2014. – Ч. 1. – С. 90–91.

13. Калинин, А.И. Асимптотически субоптимальный синтез в сингулярно возмущенной задаче оптимального управления / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Тезисы докладов Междунар. конф. «Динамика систем и процессы управления», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г. / УрФУ. – Екатеринбург, 2014. – С. 96–97.

14. Лавринович, Л.И. Асимптотика решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса / Л.И. Лавринович // Физико-математические науки: Тезисы докладов 79-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 2–6 февраля 2015 г. [Электронный ресурс] / БГТУ. – Минск: 2015. – С. 34. – Режим доступа:

www.belstu.by/Portals/0/userfiles/37/6-Fiz---mat-nauki.pdf. – Дата доступа: 01.04.2015.

15. Калинин, А. И. Построение асимптотических приближений к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / А.И. Калинин, Л.И. Лавринович // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, 9–11 июня 2015 г. / УдГУ. – Ижевск, 2015. – С. 172–173.

РЭЗЮМЭ

Лаўрыновіч Леанід Іванавіч

МЕТАД МАЛОГА ПАРАМЕТРА Ў ЗАДАЧАХ МІНІМІЗАЦЫІ ІНТЭГРАЛЬНЫХ КВАДРАТЫЧНЫХ ФУНКЦЫЯНАЛАЎ НА ТРАЕКТОРЫЯХ УЗРУШАНЫХ КІРУЕМЫХ СІСТЭМ

Ключавыя словы: аптымальнае кіраванне, зваротная сувязь, лінейна-квадратычная задача, малы параметр, квазілінейныя сістэмы, сігулярныя узрушанні, асімптатычныя прыбліжэнні.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца распрацоўка і абгрунтаванне алгарытмаў пабудовы асімптатычных прыбліжэнняў ў выглядзе праграмы і зваротнай сувязі да рашэнняў задач мінімізацыі інтэгральных квадратычных функцыяналаў на траекторыях квазілінейных і сінгулярна ўзрушаных лінейных сістэм. Пры гэтым разглядаюца пераходныя працэсы с фіксаваным правым канцом траекторый.

Даследаванні абапіраюцца на прынцып максімуму Л.С. Пантрагіна і асімптатычныя метады тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў.

Да асноўных выніках працы адносяцца:

– алгарытмы пабудовы асімптатычных прыбліжэнняў да праграмнага аптымальнага кіравання і аптымальнай зваротнай сувязі ў задачы мінімізацыі інтэгральнага квадратычнага функцыяналу на траекторыях квазілінейнай сістэмы;

– тэарэма аб існаванні, адзінасці і асімптатычных уласцівасцях аптымальнага кіравання ў названай вышэй задачы;

- алгарытмы пабудовы асімптатычных прыбліжэнняў ў выглядзе праграмы і зваротнай сувязі да рашэнняў задач мінімізацыі інтэгральных квадратычных функцыяналаў на траекторыях лінейных сінгулярна ўзрушаных сістэм;

- тэарэмы аб асімптатычных уласцівасцях аптымальных кіраванняў у разгледжаных сінгулярна ўзрушаных задачах;

- працэдура пабудовы прыбліжанага (у асімптатычнай сэнсе) рашэння лінейна-квадратычнай задачы аптымальнага кіравання з вялікай працягласцю працэсу.

Усе распрацаваныя алгарытмы і папярэджваючыя іх вынікі якаснага аналізу з'яўляюцца новымі, паколькі разгледжаныя ў дысертацыі задачы раней метадам малога параметра не даследаваліся.

Атрыманыя вынікі могуць знайсці непасрэднае прымяненне пры рашэнні прыкладных задач аптымізацыі дынамічных сістэм, якія змяшчаюць малыя параметры. У першую чаргу гэта ставіцца да задач кіравання механічнымі сістэмамі. Прыклады такіх задач прыведзены ў дысертацыі.

РЕЗЮМЕ

Лавринович Леонид Иванович

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВОЗМУЩЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: оптимальное управление, обратная связь, линейно-квадратичная задача, малый параметр, квазилинейные системы, сингулярные возмущения, асимптотические приближения.

Целью диссертационной работы является разработка и обоснование алгоритмов построения асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решениям задач минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных и сингулярно возмущенных линейных систем. При этом рассматриваются переходные процессы с фиксированным правым концом траекторий.

Исследования опираются на принцип максимума Л.С. Понтрягина и асимптотические методы теории дифференциальных уравнений.

К основным результатам работы относятся:

– алгоритмы построения асимптотических приближений к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи в задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы;

– теорема о существовании, единственности и асимптотических свойствах оптимального управления в указанной выше задаче;

– алгоритмы построения асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решениям задач минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях линейных сингулярно возмущенных систем;

– теоремы об асимптотических свойствах оптимальных управлений в рассмотренных сингулярно возмущенных задачах;

– процедура построения приближенного (в асимптотическом смысле) решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса.

Все разработанные алгоритмы и предваряющие их результаты качественного анализа являются новыми, поскольку рассматриваемые в диссертации задачи ранее методом малого параметра не исследовались.

Полученные результаты могут найти непосредственное применение при решении прикладных задач оптимизации динамических систем, содержащих малые параметры. В первую очередь это относится к задачам управления механическими системами. Примеры таких задач приведены в диссертации.

SUMMARY

Lavrinovich Leonid Ivanovich
SMALL PARAMETER METHOD IN PROBLEMS OF MINIMIZING INTEGRAL QUADRATIC FUNCTIONALS ON THE TRAJECTORIES OF PERTURBED CONTROLLABLE SYSTEMS

Keywords: optimal control, feedback, linear-quadratic problem, small parameter, quasilinear systems, singular perturbations, asymptotic approximations.

The aim of the thesis is the development and justification of algorithms for constructing asymptotic approximations in the form of open-loop and feedback controls to the solutions of problems of minimizing integral quadratic functionals on the trajectories of quasilinear and singularly perturbed linear systems, which transients have fixed final states. The research is based on L.S. Pontryagin's Maximum Principle and asymptotic methods of the theory of differential equations.

The main results of this research are:

- algorithms for constructing asymptotic approximations to the optimal open-loop control and optimal feedback in a problem of minimizing an integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear system;
- the theorem on existence, uniqueness and asymptotic properties of the optimal control in the problem specified above;
- algorithms for constructing asymptotic approximations in the form of the open-loop and feedback controls to the solutions of problems of minimizing integral quadratic functionals on the trajectories of linear singularly perturbed systems;
- theorems on asymptotic properties of optimal controls in the singularly perturbed problems under consideration;
- the procedure for constructing the approximate (in the asymptotic sense) solution of a linear-quadratic optimal control problem with a long horizon.

All developed algorithms and the preliminary qualitative analysis results are new since the problems considered in this research have not been investigated before from the perspective of small parameter methods.

Results that were obtained in the thesis can be used to solve applied optimization problems for dynamical systems with small parameters. First of all, this refers to control problems for mechanical systems. Examples of such problems are given in the thesis.