6. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. Киев, 1992.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. М., 1983.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
9. *Есипова В. А.* Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1957–1966.

Поступила в редакцию 14.11.2014.

Леонид Иванович Лавринович – старший преподаватель кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики БГУ.

УДК 512.543.76

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, И. О. ГОВОРУШКО

О РАЦИОНАЛЬНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ МНОГООБРАЗИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА

Если G – конечно порожденная группа, то множество всех гомоморфизмов $\rho: G \to GL_n(K)$, где K – алгебраически замкнутое поле, имеет естественную структуру алгебраического многообразия и обозначается $R_n(G)$. В работе исследуются многообразия представлений $R_n(BS(p,q))$ групп Баумслага – Солитера $BS(p,q)$. Эти группы имеют копредставление $BS(p,q) = \langle a, t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle$, где p и q не равны нулю. Мы предполагаем, что $p > |q| > 1$ и p, q – взаимно простые числа. Обозначим $\Omega(p,q) = \left\{A \in GL_n(K) \middle| A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\right\}$. Для фиксированной матрицы $A \in \Omega(p,q)$ пусть $B_0 \in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0 A^p B_0^{-1} = A^q$. Пусть $Z(A)$ – централизатор A в $GL_n(K)$. Рассмотрим морфизм

$$f_A : Z(A) \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K), \ \ (C, X) \mapsto \left(XAX^{-1}, XB_0CX^{-1}\right).$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} f_A$ обозначим $W(A)$. Ранее авторами было получено описание многообразий n-мерных представлений $R_n(BS(p,q))$ групп $BS(p,q)$ над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики: доказано, что многообразиями $W(A)$ исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(BS(p,q))$ и $\dim W(A) = n^2$. Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема. *Каждая неприводимая компонента $W(A)$ многообразия $R_n(BS(p,q))$ является рациональным многообразием.*

Ключевые слова: многообразие представлений; группа Баумслага – Солитера; неприводимая компонента; рациональное многообразие.

If G is a finitely generated group, then the set of all homomorphisms $\rho: G \to GL_n(K)$, where K is an algebraically closed field, has a natural structure of an algebraic variety and is denoted by $R_n(G)$. Representation varieties $R_n(BS(p,q))$ of Baumslag – Solitar groups $BS(p,q)$ are investigated in this paper. These groups have a presentation $BS(p,q) = \langle a, t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle$, where p and q are not equals to zero. We assume that $p > |q| > 1$ and p, q are coprime. Let $\Omega(p,q) = \left\{A \in GL_n(K) \middle| A^p \text{ and } A^q \text{ are conjugated}\right\}$. For a fixed matrix $A \in \Omega(p,q)$ let $B_0 \in GL_n(K)$ be a matrix such that $B_0 A^p B_0^{-1} = A^q$. Let $Z(A)$ be a centralizer of A in $GL_n(K)$. Let us consider a morphism

$$f_A : Z(A) \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K), \ \ (C, X) \mapsto \left(XAX^{-1}, XB_0CX^{-1}\right).$$

A closure of the image $\operatorname{Im} f_A$ in the Zarissky topology we will denote by $W(A)$. The description of n-dimensional representation varieties $R_n(BS(p,q))$ of groups $BS(p,q)$ over algebraically closed fields of characteristic zero was obtained by authors earlier: it was proved that the varieties $W(A)$ are all the irreducible components of $R_n(BS(p,q))$ and $\dim W(A) = n^2$. The following theorem is the main result of the paper.

Theorem. *Every irreducible component $W(A)$ of the variety $R_n(BS(p,q))$ is a rational variety.*

Key words: a representation variety; a Baumslag – Solitar group; an irreducible component; rational variety.

Группы Баумслага – Солитера $BS(p,q)$, введенные в [1], имеют копредставление

$$BS(p,q) = \langle a, t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle,$$

где p и q не равны нулю.

Доказано [1, 2], что группа $BS(p,q)$ хопфова в следующих случаях: либо $p\,|\,q$, либо $q\,|\,p$, либо p и q имеют равные множества простых делителей. В остальных случаях группа $BS(p,q)$ не является хопфовой, т. е. неизоморфна никакой своей собственной факторгруппе. Очевидно, что $BS(p,q)\cong BS(-p,-q)$ и $BS(p,q)\cong BS(q,p)$. В дальнейшем будем рассматривать группы $BS(p,q)$ такие, что $p>|q|>1$ и p, q – взаимно простые числа.

В [3] описаны все неприводимые представления группы $BS(p,q)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В [4] найдены все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$ над полем $\mathbb{C}$. В [5] получено описание многообразий представлений $R\big(BS(p,q),GL_n(K)\big)=R_n\big(BS(p,q)\big)$ групп $BS(p,q)$ над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики: найдены неприводимые компоненты и вычислена их размерность.

Цель настоящей работы – доказать рациональность неприводимых компонент многообразий представлений $R_n\big(BS(p,q)\big)$.

Для формулирования основной теоремы нам необходим ряд обозначений. Пусть $\Omega(p,q)$ – следующее множество матриц:

$$\Omega(p,q)=\Big\{A\in GL_n(K)\Big|A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\Big\}.$$

Пусть $A\in\Omega(p,q)$ – фиксированная матрица и пусть $B_0\in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0A^pB_0^{-1}=A^q$. Обозначим через $Z(A)$ централизатор матрицы A в $GL_n(K)$ и рассмотрим морфизм

$$f_A : Z(A)\times GL_n(K)\to GL_n(K)\times GL_n(K),\ \ (C,X)\mapsto\Big(XAX^{-1},\,XB_0CX^{-1}\Big).$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} f_A$ обозначим $W(A)$. В [5] доказано, что многообразиями $W(A)$ исчерпываются все неприводимые компоненты многообразия представлений $R_n\big(BS(p,q)\big)$ и что каждое многообразие $W(A)$ имеет размерность n^2.

Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема. *Каждая неприводимая компонента $W(A)$ многообразия $R_n\big(BS(p,q)\big)$ является рациональным многообразием.*

Доказательство. Введем необходимые обозначения. $(m\times n)$-Матрицу X будем называть правильной верхней треугольной, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix} \text{ при } m\le n, \text{ и } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что A имеет жорданову нормальную форму $A=\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_s)$, где $A_i=\operatorname{diag}\Big(J_{m_{i,1}}(\alpha_i),\dots,J_{m_{i,s_i}}(\alpha_i)\Big)$ – $(n_i\times n_i)$-матрица, являющаяся прямой суммой всех клеток Жордана $J_{m_{i,j}}(\alpha_i)$ из A с собственным значением α_i.

Тогда централизатор $Z(A)$ состоит из невырожденных матриц вида $C=\operatorname{diag}(C_1,\dots,C_s)$, где

$$C_i = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1,s_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s_i,1} & \dots & X_{s_i,s_i} \end{pmatrix}; \tag{1}$$

X_{rt} – произвольная правильная верхняя треугольная $\left(m_{i,r} \times m_{i,t}\right)$-матрица [6, гл. VIII].

Рассмотрим множество $T(A)$ матриц вида $Y = \left(Y_{ij}\right) \in GL_n(\mathbb{C})$, где Y_{ij} при $i \neq j$ – произвольная $\left(n_i \times n_j\right)$-матрица, а Y_{ii} имеет следующий вид:

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(i)} & \dots & Z_{1,s_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{s_i,1}^{(i)} & \dots & Z_{s_i,s_i}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

т. е. (2) – это блочная матрица, блоки которой описываются следующим образом. Матрица $Z_{rr}^{(i)}$ размером $m_{ir} \times m_{ir}$ имеет вид

$$Z_{rr}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,m_{ir}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m_{ir},1} & u_{m_{ir},2} & \dots & u_{m_{ir},m_{ir}} \end{pmatrix}.$$

Если же $r \neq k$, то $Z_{rk}^{(i)}$ – матрица размером $m_{ir} \times m_{ik}$ следующего вида: если $m_{ir} \leq m_{ik}$, то

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,m_{ik}-m_{ir}} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{2,m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir},1} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{m_{ir},m_{ik}} \end{pmatrix},$$

если же $m_{ir} \geq m_{ik}$, то

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & w_{2,m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir},1} & \dots & w_{m_{ir},m_{ik}} \end{pmatrix}.$$

Например, если $A = \operatorname{diag}\left(J_3(\alpha), J_2(\alpha), J_1(\alpha)\right)$, то $T(A)$ состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ x_{61} & x_{62} & 0 & x_{64} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\dim T(A) = n^2 - \dim Z(A)$. Пусть $\overline{\mathcal{O}(A)}$ обозначает замыкание, по Зарисскому, класса сопряженности $\mathcal{O}(A)$ матрицы *A*. Рассмотрим морфизм

$$\psi : T(A) \to \overline{\mathcal{O}(A)}, \quad X \mapsto XAX^{-1}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Морфизм* ψ *является инъективным и доминантным. Следовательно,* $\overline{\mathcal{O}(A)}$ *– рациональное многообразие.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для $X, Y \in T(A)$ мы имеем $XAX^{-1} = YAY^{-1}$. Тогда $X^{-1}Y = C \in Z(A)$, т. е. $Y = XC$. Учитывая, что $C = \operatorname{diag}(C_1, \ldots, C_s)$, где C_i имеет вид (1), и учитывая вид матриц X, Y из $T(A)$, получаем, что $C = E$ – единичная матрица, откуда $X = Y$. Значит, морфизм ψ инъективен.

Поскольку $\dim\overline{\mathcal{O}(A)} = n^2 - \dim Z(A) = \dim T(A)$, то из инъективности ψ следует его доминантность, т. е. ψ – бирациональный изоморфизм [7, предложение 3.17], и $\overline{\mathcal{O}(A)}$ бирационально изоморфно многообразию $T(A)$, которое, очевидно, рационально. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Обозначим через h_A ограничение морфизма f_A на $Z(A)\times T(A)$. Несложное вычисление показывает, что h_A – инъективный морфизм. Действительно, если

$$h_A(C_1, X_1) = h_A(C_2, X_2),$$

то

$$X_1(A, B_0C_1)X_1^{-1} = X_2(A, B_0C_2)X_2^{-1}.$$

Значит, $X_1AX_1^{-1} = X_2AX_2^{-1}$, откуда

$$X_2 = X_1C_3, \tag{3}$$

где $C_3 \in Z(A)$. Учитывая вид (1) матриц из централизатора $Z(A)$ и вид матриц из $T(A)$, получаем из (3), что $X_1 = X_2$. Тогда равенство $B_0C_1 = B_0C_2$ влечет $C_1 = C_2$.

Поскольку $\dim Z(A)\times T(A) = n^2 = \dim W(A)$, то морфизм h_A доминантен. Следовательно, h_A – бирациональный изоморфизм; $W(A)$ бирационально изоморфно рациональному многообразию $Z(A)\times T(A)$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-hopfian groups // Bull. AMS. 1962. Vol. 68, № 3. P. 199–201.
2. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.
3. *McLaury D.* Irreducible representations of Baumslag – Solitar groups // J. Group Theory. 2012. Vol. 15, № 4. P. 543–552.
4. *Дудкин Ф. А.* Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага – Солитера // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1273–1279.
5. *Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.* О многообразиях представлений групп Баумслага – Солитера // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 2. С. 43–45.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967.
7. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979.

Поступила в редакцию 10.02.2015.

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета БГУ.

Игорь Олегович Говорушко – аспирант кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета БГУ. Научный руководитель – В. В. Беняш-Кривец.

УДК 512.644

L. A. PILIPCHUK, O. V. GERMAN, A. S. PILIPCHUK

THE GENERAL SOLUTIONS OF SPARSE SYSTEMS WITH RECTANGULAR MATRICES IN THE PROBLEM OF SENSORS OPTIMAL LOCATION IN THE NODES OF A GENERALIZED GRAPH

Рассмотрено построение общих решений разреженных систем с прямоугольными матрицами в задаче оптимального расположения сенсоров в узлах обобщенного графа. Исследуемые системы наряду с разреженной частью содержат уравнения общего вида. Матрица разреженной части недоопределенной системы является блочно-диагональной. Типы разреженности матричных блоков системы могут быть различными. Дополнительная часть системы может иметь общий вид. На основе теории декомпозиции опоры созданы эффективные методы решения линейных систем с прямоугольными разреженными