



УДК 517.925.7

В. И. ГРОМАК, И. И. КОЗЛОВ

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Исследуются свойства решений системы Гарнье, являющейся обобщением третьего уравнения Пенлеве на случай двух независимых переменных с симметрическим гамильтонианом. Рассмотрены случаи тривиальных решений такой системы при различных комбинациях неизвестных и параметров. Найдены условия, при которых из системы можно исключить две неизвестные или свести систему к решению третьего уравнения Пенлеве. Получены новые классы алгебраических и трансцендентных решений, связанных с решениями третьего уравнения Пенлеве.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; система Гарнье; уравнения Пенлеве; классы решений.

This article is devoted to the properties of solutions of Garnier system in two variables which is a generalization of the third Painlevé equation in the case of two independent variables with symmetric Hamiltonian. Some cases of trivial solutions of the system are considered for different combinations of variables and parameters. The conditions are found under which we can eliminate two variables or reduce the system to solution of the third Painlevé equation. New classes of algebraic and transcendental solutions related to the solutions of the third Painlevé equation are obtained.

Key words: differential equations; Garnier system; Painlevé equations; classes of solutions.

Системы Гарнье возникают при построении изомонодромной деформации однородного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка с переменными коэффициентами, с особенностями которого связано количество независимых переменных системы. В частности, при одной переменной такие системы совпадают с уравнениями Пенлеве, а в общем являются их обобщениями на случай нескольких независимых переменных. Делая замены переменных и параметров, можно осуществить процесс слияния для системы Гарнье, аналогичный процессу слияния для уравнений Пенлеве.

Рассмотрим систему Гарнье с двумя независимыми переменными t, s и искомыми скалярными функциями $x(t, s), y(t, s), z(t, s), w(t, s)$ в гамильтоновой форме:

$$dx = \frac{\partial H_1}{\partial y} dt + \frac{\partial H_2}{\partial y} ds, \quad dy = -\frac{\partial H_1}{\partial x} dt - \frac{\partial H_2}{\partial x} ds, \quad (1)$$

$$dz = \frac{\partial H_1}{\partial w} dt + \frac{\partial H_2}{\partial w} ds, \quad dw = -\frac{\partial H_1}{\partial z} dt - \frac{\partial H_2}{\partial z} ds. \quad (2)$$

Гамильтонианы H_1 и H_2 для системы (1) являются симметрическими и имеют вид [1]

$$H_1 = H_1(x, y, z, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{t} \left[x^2 y(y-1) + x((1-2\alpha_1)y - \alpha_0) + ty \right] + \\ + \frac{\alpha_2 s}{t(t-s)} - \frac{\alpha_0}{t-s} zw - \frac{1}{t-s} (tyz^2 w + sx^2 yw - 2txyzw + \alpha_2 tyz + \alpha_0 sxw), \quad (3)$$

$$H_2 = (H_1), \quad (4)$$

где преобразование π определяется следующим образом:

$$\pi : (x, y, z, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (z, w, x, y, s, t, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_3). \quad (5)$$

При этом условие на параметры α_i имеет вид

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \alpha_i \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

В развернутой форме система (1), (2) с гамильтонианами (3), (4) имеет вид

$$x_t = 1 + \frac{x}{t} - \frac{x^2}{t} - \frac{sx^2w}{t(t-s)} + \frac{2x^2y}{t} + \frac{2xzw}{t-s} - \frac{z^2w}{t-s} - \frac{2\alpha_1x}{t} + \frac{\alpha_2sx}{t(t-s)} - \frac{\alpha_2z}{t-s}, \quad (7)$$

$$x_s = -\frac{x^2w}{s-t} + \frac{2xzw}{s-t} - \frac{tz^2w}{s(s-t)} + \frac{\alpha_2x}{s-t} - \frac{\alpha_2tz}{s(s-t)}, \quad (8)$$

$$y_t = -\frac{y}{t} + \frac{2xy}{t} + \frac{2sxyw}{t(t-s)} - \frac{2xy^2}{t} - \frac{2yzw}{t-s} + \frac{\alpha_0}{t} + \frac{\alpha_0sw}{t(t-s)} + \frac{2\alpha_1y}{t} - \frac{\alpha_2sy}{t(t-s)}, \quad (9)$$

$$y_s = \frac{2xyw}{s-t} - \frac{2yzw}{s-t} + \frac{\alpha_0w}{s-t} - \frac{\alpha_2y}{s-t}, \quad (10)$$

$$z_t = -\frac{sx^2y}{t(t-s)} + \frac{2xyz}{t-s} - \frac{yz^2}{t-s} - \frac{\alpha_0sx}{t(t-s)} + \frac{\alpha_0z}{t-s}, \quad (11)$$

$$z_s = 1 - \frac{x^2y}{s-t} + \frac{z}{s} + \frac{2xyz}{s-t} - \frac{z^2}{s} + \frac{2z^2w}{s} - \frac{tyz^2}{s(s-t)} - \frac{\alpha_0x}{s-t} + \frac{\alpha_0tz}{s(s-t)} - \frac{2\alpha_1z}{s}, \quad (12)$$

$$w_t = -\frac{2xyw}{t-s} + \frac{2yzw}{t-s} - \frac{\alpha_0w}{t-s} + \frac{\alpha_2y}{t-s}, \quad (13)$$

$$w_s = -\frac{w}{s} - \frac{2xyw}{s-t} + \frac{2wz}{s} - \frac{2zw^2}{s} + \frac{2tyzw}{s(s-t)} - \frac{t\alpha_0w}{s(s-t)} + \frac{2\alpha_1w}{s} + \frac{\alpha_2}{s} + \frac{\alpha_2ty}{s(s-t)}, \quad (14)$$

где $x(t, s), y(t, s), z(t, s), w(t, s)$ – искомые функции.

Обозначим через $(*)$ вектор решений системы (7)–(14), т. е.

$$(*) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s), w(t, s), t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Система инвариантна относительно следующих преобразований ([1], теорема 9.3):

$$s_0 : (*) \rightarrow \left(x + \frac{\alpha_0}{y}, y, z, w, t, s, -\alpha_0, \alpha_1 + \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3 \right), \quad (15)$$

$$s_2 : (*) \rightarrow \left(x, y, z + \frac{\alpha_2}{w}, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2, \alpha_3 \right), \quad (16)$$

$$s_3 : (*) \rightarrow \left(x + \frac{\alpha_3}{y+w-1}, y, z + \frac{\alpha_3}{y+w-1}, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3 \right), \quad (17)$$

$$\pi_1 : (*) \rightarrow (z, w, x, y, s, t, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_3), \quad (18)$$

$$\pi_2 : (*) \rightarrow \left(\frac{t}{x}, -\frac{(xy + \alpha_0)x}{t}, \frac{s}{z}, -\frac{(zw + \alpha_2)z}{s}, t, s, \alpha_0, \alpha_1 + \alpha_3 - \frac{1}{2}, \alpha_2, 1 - \alpha_3 \right), \quad (19)$$

$$\pi_3 : (*) \rightarrow (x - z, y, -z, 1 - y - w, t - s, -s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2), \quad (20)$$

которые изоморфны бирациональным преобразованиям, составляющим аффинную группу Вейля. В общем случае система Гарнье с n независимыми переменными ($n > 1$) имеет симметрию аффинной группы Вейля $B_{n+3}^{(1)}$ [2, 3]. Преобразования (15)–(20) можно рассматривать как преобразования Беклунда для системы (7)–(14). В частности, если известно некоторое решение исходной системы (7)–(14), то при помощи преобразований (15)–(20) можно получить новые решения.

Лемма 1. Для любого решения (*) верно соотношение

$$y_s = w_t. \quad (21)$$

Доказательство непосредственно следует из разности уравнений (10) и (12).

Из системы (7)–(14) можно исключить некоторые переменные. Точнее, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Вектор решений (*) системы (7)–(14) обладает следующими свойствами:

1) если $yw(w+y-1) \neq 0$, то вектор решений (*) может быть представлен в виде

$$(*) = \left(-\frac{t(w_t + y_t) + (w + y - 1)\alpha_0 + y\alpha_3}{2y(w + y - 1)}, y, -\frac{s(w_s + y_s) + (w + y - 1)\alpha_2 + w\alpha_3}{2w(w + y - 1)}, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right); \quad (22)$$

2) если $(sx^2 - 2txz + tz^2)(sx^2 - 2sxz + tz^2) \neq 0$, то вектор решений (*) может быть представлен в виде

$$(*) = \left(x, \frac{t(s-t)z_t + (tz-sx)\alpha_0}{sx^2 - 2txz + tz^2}, z, \frac{s(t-s)x_s + (sx-tz)\alpha_2}{sx^2 - 2sxz + tz^2}, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right). \quad (23)$$

Доказательство. Разрешая сумму уравнений (9) и (12) относительно x и z , имеем (22). Соотношение (23) получается разрешением уравнений (8) и (11) относительно w и y соответственно.

Рассмотрим возможность существования тривиальных решений системы (7)–(14).

Лемма 3. Вектор $(*) = (x, y, z, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ не является решением системы (7)–(14), если выполняется любое из следующих условий:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| 1) $x = y = z = w = 0$; | 7) $x = z = 0$; $yw \neq 0$; |
| 2) $x = y = z = 0$; $w \neq 0$; | 8) $x = w = 0$; $yz \neq 0$; |
| 3) $x = y = w = 0$; $z \neq 0$; | 9) $y = z = 0$; $xw \neq 0$; |
| 4) $x = z = w = 0$; $y \neq 0$; | 10) $z = w = 0$; $xy \neq 0$; |
| 5) $x = z = w = 0$; $x \neq 0$; | 11) $x = 0$; $yzw \neq 0$; |
| 6) $x = y = 0$; $zw \neq 0$; | 12) $z = 0$; $xyw \neq 0$. |

Доказательство. Условия 1), 2), 4) не совместны с уравнением (7). При выполнении условий 3), 6), 7), 8), 11) уравнения (7) и (8) не совместны, а в случае выполнения условий 5), 9), 10), 12) уравнения (12) и (13) не совместны.

Лемма 4. Вектор $(*) = (x, y, z, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ не является решением системы (7)–(14), если выполняется любое из следующих условий:

- | | |
|--|---|
| 1) $x, y, z, w = \text{const} \neq 0$; | 8) $x, w = \text{const} \neq 0$; $y, z \neq \text{const}$; |
| 2) $x, y, z = \text{const} \neq 0$; $w \neq \text{const}$; | 9) $y, z = \text{const} \neq 0$; $x, w \neq \text{const}$; |
| 3) $x, y, w = \text{const} \neq 0$; $z \neq \text{const}$; | 10) $y, w = \text{const} \neq 0$; $x, z \neq \text{const}$; |
| 4) $x, z, w = \text{const} \neq 0$; $y \neq \text{const}$; | 11) $z, w = \text{const} \neq 0$; $x, y \neq \text{const}$; |
| 5) $y, z, w = \text{const} \neq 0$; $x \neq \text{const}$; | 12) $y = \text{const} \neq 0$; $x, z, w \neq \text{const}$; |
| 6) $x, y = \text{const} \neq 0$; $z, w \neq \text{const}$; | 13) $w = \text{const} \neq 0$; $x, y, z \neq \text{const}$. |
| 7) $x, z = \text{const} \neq 0$; $y, w \neq \text{const}$; | |

Доказательство. Пусть, например, выполнено условие 12), т. е. $y = c_1 = \text{const} \neq 0$. Тогда $w_t = y_s = 0$ по лемме 1, т. е. $w = W(s) \neq \text{const}$. Следовательно, вектор-функция

$$(**) = \left(-\frac{(W + c_1 - 1)\alpha_0 + c_1\alpha_3}{2c_1(W + c_1 - 1)}, c_1, -\frac{sW_s + c_1\alpha_3 + (W + c_1 - 1)\alpha_2 + W\alpha_3}{2W(W + c_1 - 1)}, W, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right)$$

также является решением системы (7)–(14) согласно (22) из леммы 2. Подставив (**) в (10), получим уравнение $\frac{sc_1W_s}{(s-t)(W+c_1-1)} = 0$, которое не имеет решений. Остальные случаи доказываются аналогичным образом.

Теорема 1. Все решения системы (7)–(14) при $y = w = 0$ имеют вид

$$(*) = (x, 0, z, 0, t, s, 0, \alpha_1, 0, \alpha_3), \quad (24)$$

где $x = X(t)$ и $z = Z(s)$ – соответственно решения уравнений Риккати:

$$X_t = -\frac{X^2}{t} + \frac{1}{t}(1 - 2\alpha_1)X + 1, \quad (25)$$

$$Z_s = -\frac{Z^2}{s} + \frac{1}{s}(1 - 2\alpha_1)Z + 1. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $(*) = (x, 0, z, 0, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тогда система (7)–(14) преобразуется к виду

$$x_t = \frac{t + (1 - 2\alpha_1)x - x^2}{t} + \frac{\alpha_2(tz - sx)}{t(s-t)},$$

$$x_s = \frac{\alpha_2(sx - tz)}{s(s-t)},$$

$$\frac{\alpha_0}{t} = 0,$$

$$z_t = \frac{\alpha_0(sx - tz)}{t(s-t)},$$

$$z_s = \frac{s + (1 - 2\alpha_1)z - z^2}{s} + \frac{\alpha_0(tz - sx)}{s(s-t)},$$

$$\frac{\alpha_2}{s} = 0,$$

откуда следует, что $\alpha_0 = \alpha_2 = x_s = z_t = 0$, а функции $x = X(t)$ и $z = Z(s)$ определяются уравнениями (25)–(26). В частности, вектор-функция $(*) = \left(\sqrt{t}, 0, \sqrt{s}, 0, t, s, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right)$ является решением системы (7)–(14).

Теорема 2. Все решения системы (7)–(14) при $y = 0, w \neq 0$ имеют вид

$$(*) = (x, 0, z, w, t, s, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (27)$$

где $z = Z(s)$ – решение третьего уравнения Пенлеве [4]:

$$Z_{ss} = \frac{Z_s^2}{Z} - \frac{Z_s}{s} + \frac{Z^3}{s^2} + \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1}{s^2}Z^2 - \frac{1}{Z} + \frac{2\alpha_1}{s}; \quad (28)$$

$$w = W(s) = \frac{Z^2 + s(Z_s - 1) + (2\alpha_1 - 1)Z}{2Z^2}; \quad (29)$$

$x(t, s)$ – решение системы уравнений Риккати:

$$\begin{aligned}
x_t = & \frac{s}{2(s-t)} - \frac{t}{(s-t)} - \frac{Z}{2(s-t)} + \frac{Z^2}{2(s-t)} + \frac{sZ_s}{2(s-t)} + \frac{\alpha_1 Z}{s-t} + \frac{\alpha_2 Z}{s-t} + \\
& + x \left(\frac{s}{t(s-t)} + \frac{s}{(s-t)Z} - \frac{Z}{s-t} - \frac{sZ_s}{(s-t)Z} - \frac{2\alpha_1 s}{t(s-t)} - \frac{\alpha_2 s}{t(s-t)} \right) + \\
& + x^2 \left(\frac{1}{s-t} - \frac{s}{2t(s-t)} - \frac{s^2}{2t(s-t)Z^2} - \frac{s}{2t(s-t)Z} + \frac{s^2 Z_s}{2t(s-t)Z^2} + \frac{\alpha_1 s}{t(s-t)Z} \right), \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_s = & \frac{t}{2(s-t)} + \frac{tZ}{2s(s-t)} - \frac{tZ^2}{2s(s-t)} - \frac{tZ_s}{2(s-t)} - \frac{\alpha_1 tZ}{s(s-t)} - \frac{\alpha_2 tZ}{s(s-t)} + \\
& + x \left(-\frac{1}{s-t} - \frac{s}{(s-t)Z} + \frac{Z}{s-t} + \frac{sZ_s}{(s-t)Z} + \frac{2\alpha_1}{s-t} + \frac{\alpha_2}{s-t} \right) + \\
& + x^2 \left(-\frac{1}{2(s-t)} + \frac{s}{2(s-t)Z^2} + \frac{1}{2(s-t)Z} - \frac{sZ_s}{2(s-t)Z^2} - \frac{\alpha_1}{(s-t)Z} \right). \quad (31)
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $(*) = (x, 0, z, w, t, s, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тогда система (7)–(14) преобразуется к виду

$$x_t = 1 + \frac{x}{t} - \frac{x^2}{t} - \frac{s x^2 w}{t(t-s)} + \frac{2xzw}{t-s} - \frac{z^2 w}{t-s} - \frac{2\alpha_1 x}{t} + \frac{\alpha_2 s x}{t(t-s)} - \frac{\alpha_2 z}{t-s},$$

$$x_s = -\frac{x^2 w}{s-t} + \frac{2xzw}{s-t} - \frac{t z^2 w}{s(s-t)} + \frac{\alpha_2 x}{s-t} - \frac{\alpha_2 t z}{s(s-t)},$$

$$\frac{\alpha_0}{t} + \frac{\alpha_0 s w}{t(t-s)} = 0,$$

$$\frac{\alpha_0 w}{s-t} = 0,$$

$$z_t = -\frac{\alpha_0 s x}{t(t-s)} + \frac{\alpha_0 z}{t-s},$$

$$z_s = 1 + \frac{z}{s} - \frac{z^2}{s} + \frac{2z^2 w}{s} - \frac{\alpha_0 x}{s-t} + \frac{\alpha_0 t z}{s(s-t)} - \frac{2\alpha_1 z}{s},$$

$$w_t = \frac{\alpha_0 w}{s-t},$$

$$w_s = -\frac{w}{s} + \frac{2wz}{s} - \frac{2zw^2}{s} - \frac{t\alpha_0 w}{s(s-t)} + \frac{2\alpha_1 w}{s} + \frac{\alpha_2}{s}.$$

Откуда следует, что $\alpha_0 = z_t = w_t = 0$. Исключая из системы w , получим (28)–(31).

Замечание. Уравнение (28) – третье уравнение Пенлеве, которое с помощью замены

$$u = \frac{Z}{\sqrt{s}}, \quad \tau = 2\sqrt{s}, \quad \alpha = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2, \quad \beta = 4\alpha_1$$

приводится к каноническому виду [4]

$$u_{\tau\tau} = \frac{u_\tau^2}{u} - \frac{u_\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau}(\alpha u^2 + \beta) + u^3 - \frac{1}{u}$$

и является условием совместности $(x_{ts} = x_{st})$ системы (30)–(31). В частности, вектор-функция

$$(*) = \left(\sqrt{t} \frac{e^{4\sqrt{t}} (\sqrt{s} - \sqrt{t})^2 - (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2}{e^{4\sqrt{t}} (\sqrt{s} - \sqrt{t})^2 + (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2}, 0, \frac{1}{\sqrt{s}}, \sqrt{s}, t, s, 0, \frac{5}{4}, -2, \frac{1}{2} \right)$$

является решением системы (7)–(14).

Теорема 3. Все решения системы (7)–(14) при $w = 0$, $y \neq 0$ имеют вид

$$(*) = (x, y, z, 0, t, s, \alpha_0, \alpha_1, 0, \alpha_3), \quad (32)$$

где $x = X(t)$ – решение третьего уравнения Пенлеве:

$$X'' = \frac{X_t^2}{X} - \frac{X_t}{t} + \frac{X^3}{t^2} + \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_0 - 1}{t^2} X^2 - \frac{1}{X} + \frac{2\alpha_1}{t}; \quad (33)$$

$$y = Y(t) = \frac{X^2 + t(X_t - 1) + (2\alpha_1 - 1)X}{2X^2}; \quad (34)$$

$z(t, s)$ – решение системы уравнений Риккати:

$$\begin{aligned} z_t = & -\frac{s}{2(s-t)} - \frac{sX}{2t(s-t)} + \frac{sX^2}{2t(s-t)} + \frac{sX_t}{2(s-t)} + \frac{s\alpha_0 X}{t(s-t)} + \frac{s\alpha_1 X}{t(s-t)} + \\ & + z \left(\frac{1}{s-t} + \frac{t}{(s-t)X} - \frac{X}{s-t} - \frac{tX_t}{(s-t)X} - \frac{2\alpha_1}{s-t} - \frac{\alpha_0}{s-t} \right) + \\ & + z^2 \left(\frac{1}{2(s-t)} - \frac{t}{2(s-t)X^2} - \frac{1}{2(s-t)X} + \frac{tX_t}{2(s-t)X^2} + \frac{\alpha_1}{(s-t)X} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} z_s = & \frac{s}{s-t} - \frac{t}{2(s-t)} + \frac{X}{2(s-t)} - \frac{X^2}{2(s-t)} - \frac{tX_t}{2(s-t)} - \frac{\alpha_0 X}{s-t} - \frac{\alpha_1 X}{s-t} + \\ & + z \left(-\frac{t}{s(s-t)} - \frac{t}{(s-t)X} + \frac{X}{s-t} + \frac{tX_t}{(s-t)X} + \frac{\alpha_0 t}{s(s-t)} + \frac{2\alpha_1 t}{s(s-t)} \right) + \\ & + z^2 \left(-\frac{1}{s-t} + \frac{t}{2s(s-t)} + \frac{t^2}{2s(s-t)X^2} - \frac{t}{2s(s-t)X} - \frac{t^2 X_t}{2s(s-t)X^2} - \frac{\alpha_1 t}{s(s-t)X} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Заметим, что в этом случае также можно указать частное решение

$$(*) = \left(\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}, \sqrt{s} \frac{e^{4\sqrt{s}} (\sqrt{s} - \sqrt{t})^2 - (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2}{e^{4\sqrt{s}} (\sqrt{s} - \sqrt{t})^2 + (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2}, 0, t, s, -2, \frac{5}{4}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

исходной системы.

Исследования, проведенные в работе, частично поддержаны грантом FP-7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Sasano Y. Symmetric Hamiltonian of the Garnier system and its degenerate systems in two variables // arXiv: 0706.0799v3. 2009. P. 19.
2. Suzuki T. Affine Weyl group symmetry of the Garnier system // Funkcial. Ekvac. 2005. Vol. 48. P. 203–230.
3. Noumi M., Yamada Y. Higher order Painleve equations of type $A_n^{(1)}$ // Funkcial. Ekvac. 1998. Vol. 41. P. 483–503.
4. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane // Walter de Gruyter. 2002. P. 114.

Поступила в редакцию 02.12.2014.

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета БГУ.

Илья Игоревич Козлов – ассистент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета БГУ.