

- Информативными и характеризующими изменение состояния центральной нервной системы при действии электромагнитных шумовых излучений и экранов с добавлением нанотрубок являются показатели хаотической динамики: корреляционная размерность и энтропия Колмогорова, что подтверждается результатами приведенных экспериментальных исследований.
- Показатели хаотической динамики электроэнцефалограмм изменяются в зависимости от процентного содержания таунита при использовании в качестве экранов полиуретановых композитов.
- Спектральный корреляционный анализ исследуемых электроэнцефалограмм различных отведений по уровням спектральной плотности мощности альфа-, бета-, тета-ритмов позволил установить корреляции с распространением реакций, связанных с повышением возбудимости нервных структур головного мозга при действии шумовых излучений и экранов из радиопоглощающих материалов с добавлением нанотрубок.
- Полученные результаты свидетельствуют о необходимости учета влияния электромагнитных шумовых излучений и радиопоглощающих экранов на оператора при решении задач экологической безопасности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hornbostel B.* Synthesis of carbon nanostructures // *Physica E.* 2008. Vol. 40. P. 2425–2429.
2. Влияние излучений мобильного телефона на биоэлектрическую активность мозга при использовании защитных экранов : тр. VI съезда по радиационным исследованиям (Москва, 25–28 окт. 2010 г.) / А. В. Сидоренко [и др.]. М., 2010. С. 184.
3. *Ткачев А. Г., Золотухин И. В.* Аппаратура и методы синтеза углеродных наноструктур. М., 2007.
4. *Salford Leif G., Brun A. E., Jacob L.* Nerve Cell Damage in Mammalian Brain after Exposure to Microwaves from GSM Mobile Phones // *Environmental Health Perspectives.* 2003. Vol. III, № 7. P. 881–883.
5. *Salford Leif G., Nittby H., Brun A.* The Mammalian Brain in the Electromagnetic Fields Designed by Man with Special Reference to Blood Brain Barrier Function. Neuronal Damage and Possible Physical Mechanisms // *Progress of Theoretical Physics Supplement.* 2008. Vol. 173. P. 283–309.
6. *Schüz J., Jacobsen R., Olsen J. H.* Cellular Telephone Use and Cancer Risk: Update of a Nationwide Danish Cohort // *J. of the National Cancer Institute.* 2006. Vol. 98, № 23. P. 1707–1713.
7. Анализ электроэнцефалограмм на основе динамического хаоса при действии излучений мобильного телефона и защитных экранов / А. В. Сидоренко [и др.] // *Вестн НАН Беларуси. Сер. мед. наук.* 2010. № 4. С. 57–65.
8. *Бецкий О. В., Лебедева Н. Н.* Синергетика и электромагнитные волны // *Миллиметровые волны в биологии и медицине.* 2004. № 4. С. 5–9.
9. Исследование потенциалов мозга спящего человека в условиях воздействия на него электромагнитного поля мобильного телефона / Н. Н. Лебедева [и др.] // *Биомедицинская радиоэлектроника.* 1999. № 7. С. 15–24.
10. *Sidorenko A. V., Ovsynkina G. I., Solonovich N. F.* Complex analysis of human electroencephalograms with circulatory disturbances of the brain // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2006. Vol. 9, № 1. P. 97–104.
11. *Сидоренко А. В.* Методы информационного анализа биоэлектрических сигналов. Минск, 2003.
12. *Жалковский М. В., Сидоренко А. В.* Мобильный генератор электромагнитного шума с питанием от порта USB // *Электроника инфо.* 2013. № 6. С. 35–36.

Поступила в редакцию 27.02.2015.

Алевтина Васильевна Сидоренко – доктор технических наук, профессор кафедры физики и аэрокосмических технологий факультета радиопизики и компьютерных технологий БГУ.

УДК 531

И. И. ЖОЛНЕРЕВИЧ

ОПЫТ ФУКО. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА

Опыт Фуко заключается в наблюдении колебаний массивного шара, подвешенного на длинном тросе. Плоскость качаний маятника относительно Земли в Северном полушарии медленно поворачивается вокруг местной вертикали, причем в том же направлении, в каком совершается суточное вращение Солнца. В цитируемых курсах теоретической механики приведено общее решение уравнения движения маятника и проведен краткий анализ полученного решения. В курсах общей физики эта тема изучается на качественном уровне. Предложен другой, нежели в цитируемых курсах, метод решения уравнений движения маятника в приближении малых колебаний. Выполнен подробный анализ траекторий в зависимости от начальных условий, обычно реализуемых в экспериментах.

Ключевые слова: Фуко; опыт; маятник.

Foucault's experiment is performed to observe the oscillations of a massive ball suspended by a long rope. The oscillation plane of the pendulum relative to the Earth in the northern hemisphere is rotated about the local vertical and, moreover, in the direction associated with daily rotation of the Sun. The cited courses of theoretical mechanics provide a general solution to the equation of motion for the pendulum and the obtained solution is briefly analyzed. In the general physics courses this subject is studied on a qualitative level. This article suggests an alternative method of solving the equations of motion for the pendulum in the approximation of small oscillations. A detail analysis of the trajectories is conducted depending on the initial conditions usually implemented during the experiments.

Key words: Foucault; experiment; pendulum.

Наиболее известным опытом, наглядно доказывающим вращение Земли вокруг своей оси, является опыт Фуко, проведенный им в Париже в 1851 г. с маятником большой длины. Прекрасное изложение истории проведения таких опытов и результатов наблюдений представлено в [1]. В настоящее время создаются новые маятники [2, см. ссылки], позволяющие с большой точностью проводить экспериментальные исследования их колебаний. Опыт Фуко изучается на описательном уровне в курсе общей физики [3, 4] как пример движения тел в неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с Землей. Теория движения маятника излагается в достаточно общем виде в курсах теоретической механики [5–7], в которых решение уравнений движения маятника получено одним методом. В [5] приведено и проанализировано решение уравнений движения маятника при одном начальном условии. В связи с этим целесообразно предложить другой метод решения уравнений движения маятника и провести более подробный анализ полученного аналитического решения, понятный и студентам младших курсов университетов.

Рассмотрим сферический маятник длиной l и массой m , совершающий колебания в гравитационном поле Земли. Система отсчета, жестко связанная с Землей, является неинерциальной, поэтому нужно учитывать силы инерции. Пусть маятник находится на широте φ . Выберем систему координат следующим образом: направим ось Ox по параллели, ось Oy – по меридиану, ось Oz – по местной вертикали. Тогда проекции угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}$ будут на оси соответственно равны, $\omega_x = 0$, $\omega_y = -\omega \cos \varphi$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$.

Уравнение движения подвешенного груза (материальной точки) имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega}, \tag{1}$$

где \vec{a} – ускорение груза; \vec{g} – ускорение свободного падения в данном месте, т. е. с учетом действия центробежной силы инерции; \vec{T} – сила натяжения троса; \vec{v} – скорость груза. Последнее слагаемое – сила Кориолиса, направленная под некоторым углом к плоскости, в которой расположены силы тяжести и натяжения.

Спроектируем уравнение (1) на оси выбранной системы координат (рис. 1). В результате получим

$$ma_x = T_x + 2m(v_y \omega_z - v_z \omega_y); \tag{2}$$

$$ma_y = T_y - 2mv_x \omega_z; \tag{3}$$

$$ma_z = -mg + T_z + 2mv_x \omega_y, \tag{4}$$

где $T_x = -T \sin \alpha \cos \theta = -T \frac{x}{l}$; $T_y = -T \sin \alpha \sin \theta = -T \frac{y}{l}$; $T_z = T \cos \alpha = T \frac{l-z}{l}$; α – угол отклонения маятника от вертикали; θ – азимутальный угол.

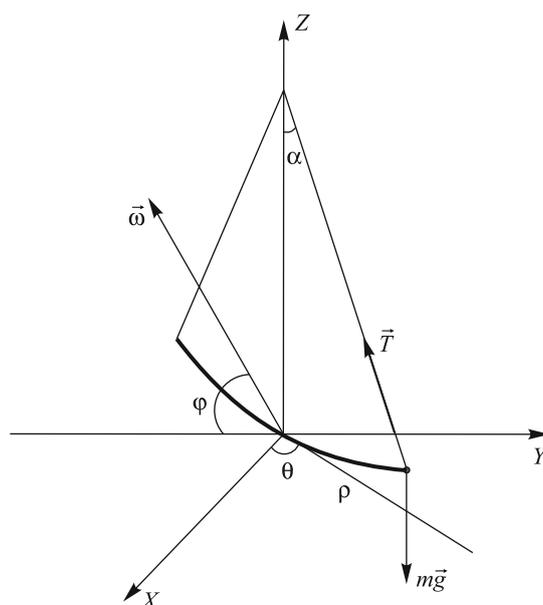


Рис. 1. Система отсчета: θ и ρ – полярные координаты; φ – широта местности; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли; α – угол отклонения маятника; \vec{T} – сила натяжения; $m\vec{g}$ – сила тяжести

При малых углах α (малые колебания) $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, поэтому $z = a_z = v_z = 0$. Из (4) также следует, что $T \approx mg$. Поэтому можно считать, что груз движется в плоскости xOy .

С учетом выражений для координат силы натяжения и после деления на массу уравнения (2) и (3) примут вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + 2 \frac{dy}{dt} \omega_z; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - 2 \frac{dx}{dt} \omega_z, \quad (6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота колебаний маятника.

Для решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (5) и (6) при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = v_0$, которые обычно реализуются в эксперименте, используем преобразование Лапласа $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ [8]. В результате получим систему линейных уравнений для изображений $X(s)$ и $Y(s)$:

$$(s^2 + \omega_0^2)X(s) - 2s\omega_z Y(s) = sx_0,$$

$$(s^2 + \omega_0^2)Y(s) + 2s\omega_z X(s) = v_0 + 2\omega_z x_0.$$

Решение полученной системы уравнений можно записать в виде

$$X(s) = \frac{x_0 \omega_- - v_0}{2\Omega} \frac{s}{s^2 + \omega_+^2} + \frac{x_0 \omega_+ + v_0}{2\Omega} \frac{s}{s^2 + \omega_-^2}, \quad (7)$$

$$Y(s) = -\frac{x_0 \omega_0^2 - v_0 \omega_+}{2\Omega} \frac{1}{s^2 + \omega_+^2} + \frac{x_0 \omega_0^2 + v_0 \omega_-}{2\Omega} \frac{1}{s^2 + \omega_-^2}, \quad (8)$$

где введены обозначения: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$, $\omega_{\pm} = \Omega \pm \omega_z$.

Применив обратное преобразование Лапласа [8] к (7) и (8), получим

$$x(t) = \frac{x_0 \omega_- - v_0}{2\Omega} \cos \omega_+ t + \frac{x_0 \omega_+ + v_0}{2\Omega} \cos \omega_- t, \quad (9)$$

$$y(t) = -\frac{x_0 \omega_0^2 - v_0 \omega_+}{2\Omega} \sin \omega_+ t + \frac{x_0 \omega_0^2 + v_0 \omega_-}{2\Omega} \sin \omega_- t. \quad (10)$$

Зависимости (9) и (10) полностью описывают движение математического маятника относительно Земли.

Результаты опыта и их обсуждение

Проведем анализ полученного решения. Пусть $v_0 = 0$, т. е. маятник отвели в сторону и отпустили без начальной скорости. В этом случае (9) и (10) запишутся в виде

$$x(t) = \frac{x_0 \omega_-}{2\Omega} \cos \omega_+ t + \frac{x_0 \omega_+}{2\Omega} \cos \omega_- t; \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{x_0 \omega_0^2}{2\Omega} \sin \omega_+ t + \frac{x_0 \omega_0^2}{2\Omega} \sin \omega_- t. \quad (12)$$

Найдем также и другие кинематические характеристики движения:

$$\rho(t) = \frac{x_0}{\Omega} \sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \Omega t + \omega_z^2}; \quad (13)$$

$$v_x(t) = -\frac{x_0 \omega_0^2}{\Omega} \sin \Omega t \cos \omega_z t; \tag{14}$$

$$v_y(t) = \frac{x_0 \omega_0^2}{\Omega} \sin \Omega t \sin \omega_z t; \tag{15}$$

$$v(t) = \frac{x_0 \omega_0^2}{\Omega} |\sin \Omega t|. \tag{16}$$

Из (13) и (16) следует, что колебания маятника происходят с частотой $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$. Система уравнений (11) и (12) задает в параметрическом виде траекторию движения груза. На рис. 2, а, представлена одна из возможных траекторий, вычисленная в пакете Wolfram Mathematica 10 при значении отношения $\frac{\omega_z}{\Omega} = 0,1$. Такую траекторию маятника можно получить, если он находится на платформе, которая вращается с угловой скоростью, сравнимой с собственной частотой колебаний маятника. Она представляет собой фигуру типа звезды, острые концы которой, как следует из (13), располагаются на окружности радиусом x_0 . Мгновенная плоскость колебания задается скоростью груза и точкой подвеса. Пересечение этой и горизонтальной плоскостей определяет касательную к траектории и тангенс угла β наклона касательной к оси Ox : $\text{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = -\text{tg} \omega_z t$. Отсюда следует, что плоскость колебания равномерно вращается с угловой скоростью $\frac{d\beta}{dt} = -\omega_z = -\omega \sin \varphi$. Эта формула впервые была выведена Ж. Фуко и экспериментально подтверждена им и другими исследователями [1]. Из нее следует, что промежуток времени полного поворота плоскости колебаний $T = \frac{T_0}{\sin \varphi} = \frac{24}{\sin \varphi}$. Знак « \rightarrow » указывает на то, что в Северном полушарии плоскость колебаний вращается с востока на запад, противоположно направлению вращения Земли. За один период плоскость колебаний повернется на угол

$$\Delta\beta = 2\pi \frac{\omega_z}{\Omega}. \tag{17}$$

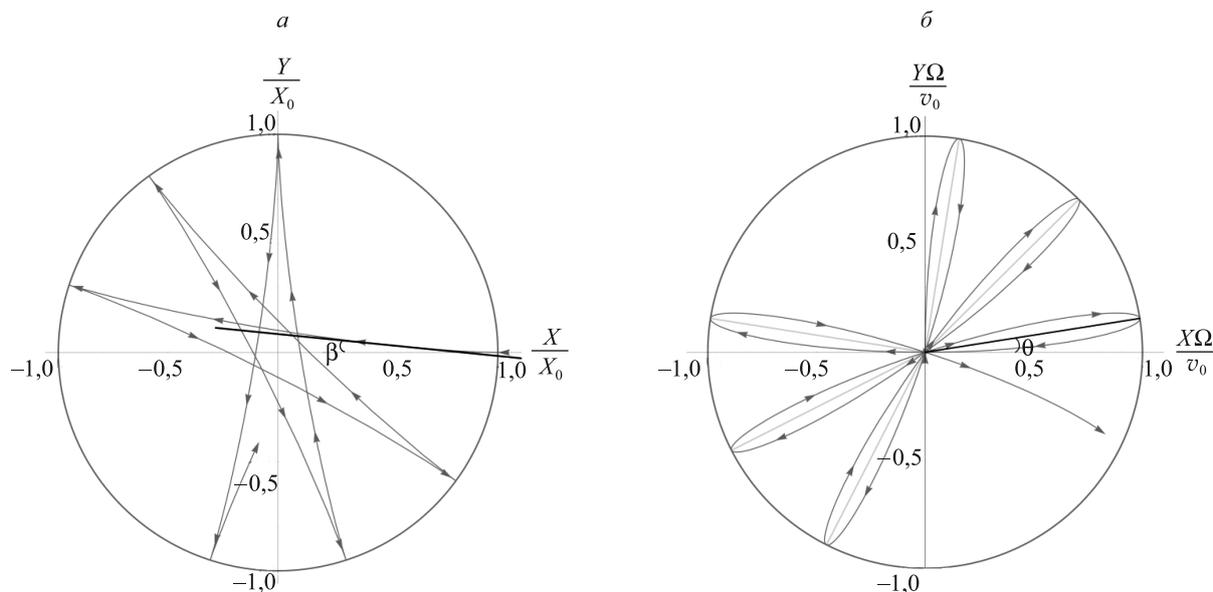


Рис. 2. Траектории движения маятника, вычисленные при $\frac{\omega_z}{\Omega} = 0,1$ (а) и при начальных условиях (б)
 $y(0) = 0, v_x(0) = 0: a - x(0) = x_0; \quad b - v(0) = v_0$

В опыте Фуко [1, с. 64] амплитуда колебаний была равна 3,5 м при длине маятника 64 м, поэтому колебания маятника можно считать малыми. За один период плоскость колебаний смещалась на 2,4 мм и, следовательно, $\Delta\beta = 2,6'$, так что в эксперименте траектория практически сплошным образом покрывала горизонтальный круг радиусом 3,5 м.

Положим в (9) и (10) $x_0 = 0$. Это значит, что маятник толкнули из положения равновесия со скоростью v_0 в направлении оси Oy . Тогда уравнения, описывающие движение груза, примут вид

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t \sin \omega_z t, \tag{18}$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t \cos \omega_z t. \tag{19}$$

Вычислим также

$$\rho(t) = \frac{v_0}{\Omega} |\sin \Omega t|, \tag{20}$$

$$v(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \Omega t + \omega_z^2}. \tag{21}$$

Траектория маятника, описываемая уравнениями (18) и (19) и вычисленная при том же отношении частот, показана на рис. 2, б. Она представляет собой фигуру, состоящую из лепестков, концы которых лежат, как следует из (20), на окружности радиусом $\frac{v_0}{\Omega}$. Скорость груза при максимальном отклонении, в соответствии с (21), не равна нулю и обусловлена действием силы Кориолиса.

Нормаль к плоскости колебаний за период изменяет свое направление на угол, практически равный 180° , поэтому в данном случае целесообразно выяснить, как изменяется азимутальный угол θ . Поскольку $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \operatorname{ctg} \omega_z t$, то $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega_z t$ и $\frac{d\theta}{dt} = -\omega_z$, что и доказано в [9] без решения системы уравнений (5)–(6).

Если в (9) и (10) принять $\omega_z = 0$, то получим $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$ и $y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ – параметрические уравнения эллипса с полуосями x_0 и $\frac{v_0}{\omega_0}$. Следовательно, система уравнений (9) и (10) также является параметрическим уравнением эллипса, который вращается с угловой скоростью ω_z . На рис. 3 представлена траектория движения груза, вычисленная при том же отношении частот и отношении полуосей $\frac{x_0 \Omega}{v_0} = 2$. За один период полуось эллипса поворачивается на угол $\Delta\beta$.

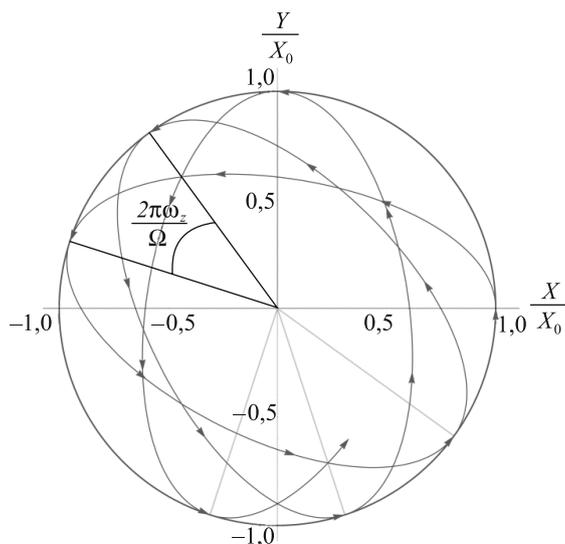


Рис. 3. Вычисленная траектория движения маятника при отношении $\frac{x_0 \Omega}{v_0} = 2$

Характер движения маятника при больших амплитудах колебаний существенно не изменится. Период колебаний увеличится и станет зависеть от амплитуды и, возможно, появится дополнительное вращение плоскости колебаний [5, 6, см. сферический маятник]. Слагаемое $2\omega_y v_z$ в (2) не приведет к систематическому вращению плоскости колебаний, а вызовет лишь малые колебания ее относительно среднего положения, так как v_z изменяет свой знак за полупериод. Слагаемое $2\omega_z v_y$ в (4) незначительно изменяет вертикальную компоненту ускорения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Верин А.* Опыт Фуко. Л. ; М., 1934.
2. Маятник Фуко [Электронный ресурс]. 2015. Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/маятникФуко/> (дата обращения: 25.01.2015).
3. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики : в 6 т. М., 2002. Т. 1 : Механика.
4. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. М., 1986.
5. *Зоммерфельд А.* Механика. М., 1947.
6. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики : в 2 ч. М., 1955. Ч. 2.
7. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики : в 2 т. М., 1977. Т. 1.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., 1970.
9. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики : в 2 ч. М., 1965. Ч. 1.

Поступила в редакцию 09.03.2015.

Иван Иосифович Жолнеревич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики физического факультета БГУ.