



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЯ ЗУБА В ФОРМЕ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

С.М. Бояков, А.Ф. Мселати, А.В. Круподеров

Кафедра теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета, Беларусь, 220030, Минск, проспект Независимости, 4, e-mail: bosiakov@bsu.by

**Аннотация.** Предложена математическая модель начальных перемещений корня зуба в линейно-упругой периодонтальной оболочке. Корень зуба является абсолютно твердым телом, его внешняя поверхность аппроксимируется двуполостным гиперболоидом. Использовано представление начальных перемещений через комбинацию поступательных перемещений и углов поворота. Предполагается, что полная деформация тканей периодонта по нормали к поверхности корня совпадает с шириной периодонтальной щели в этом направлении. Анализ различных типов начальных движений зуба выполнен на основании определения перемещения вдоль винтовой линии и уравнения оси винтовой линии. Рассмотрены наклонно-вращательное, вращательное и поступательное движения корня зуба. Визуализация начальных смещений корня при наклонно-вращательном движении выполнена с учетом положения оси винтовой линии и траекторий движения отдельных точек корня. Для описания вращательного движения предложено использовать ось вращения. Показано, что корпусное смещение зуба можно осуществить при действии нагрузки, расположенной под углом к продольной оси корня зуба. Выполнен анализ влияния эксцентризитета эллипса в сечении корня и параметра, характеризующего закругление корня, на значение нагрузки, необходимой для заданного корпусного смещения зуба, а также на положение одного из центров сопротивления корня. Проведено сравнение координат центра сопротивления, найденных на основании математической и конечно-элементной моделей. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования и визуализации начального смещения зубов, а также определения возникающего при этом напряженно-деформированного состояния и нахождения благоприятных для ортодонтического движения зубов величин нагрузки.

**Ключевые слова:** периодонтальная связка, корень зуба, двуполостной гиперболоид, начальные перемещения, центр сопротивления, винтовая линия.

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных вопросов ортодонтии является профилактика и коррекция неправильного прикуса, а также других зубочелюстных аномалий. При этом важная задача – прогнозирование начального и долговременного смещения зубов, в первую очередь их начальных перемещений [9, 30]. Зубы окружены периодонтальной связкой, которая является тонкой мембраной. Она состоит из коллагеновых волокон и обеспечивает прикрепление зуба к окружающей альвеолярной кости. В нормальных

условиях контакт между корнем зуба и костной тканью отсутствует. Действующая на коронку зуба нагрузка передается на альвеолярную кость посредством деформаций периодонтальной связки. В результате биологического отклика костной ткани альвеолярного отростка возникает ортодонтическое изменение положения зубов [17, 39].

Начальные перемещения зуба возникают при кратковременном действии нагрузки, после снятия которой зуб возвращается на прежнее место [19, 42]. При этом дегенеративные и необратимые изменения периодонтальной ткани отсутствуют. Основываясь на высокой упругости тканей периодонтальной связки по сравнению с костями и зубами, большинство авторов указывают на то, что именно периодонт определяет начальные перемещения зуба [6, 10, 20, 22]. Расчету начальной подвижности однокоренных и многокоренных зубов посвящены многочисленные конечно-элементные исследования, в частности [7, 8, 10, 15, 16, 26, 27, 38]. При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния системы «зуб – периодонтальная связка» в большинстве случаев корень зуба аппроксимируется параболоидом или гиперболоидом [3, 5, 28, 35]. Предложенный в этих работах подход основывается на определении перемещений зуба как комбинации поступательных перемещений вдоль координатных осей и углов поворота относительно этих же осей. Основными результатами являются нахождение центров сопротивления зуба, величин перемещений и углов поворота корня и напряжений, возникающих в периодонтальной связке. В то же время визуализация трехмерного смещения зуба не выполнялась. Это можно объяснить трудностями, возникающими при установлении типа движения зуба. Как правило, построение различных положений зубов при ортодонтическом движении выполняется в плоском случае. В этом направлении выполнено большое количество исследований, результаты которых проанализированы в работе [11]. При этом для описания различных видов перемещений зубов, как правило, используются соотношения между центром сопротивления и центром вращения зуба, а также уравнение винтовой линии [3, 14, 25, 31]. В то же время ортодонтическое перемещение зубов является трехмерным, поэтому для биомеханического анализа необходима информация о пространственном перемещении зуба.

Количественный анализ трехмерного движения зубов с применением модифицированных углов Эйлера проводился в работах [40, 41]. Моделирование пространственного ортодонтического перемещения зубов с использованием оси винтовой линии и данных натурных измерений положений зубов при ортодонтическом движении выполнено в работе [11]. Предложенный подход к визуализации трехмерного движения зуба основан на определении поворота зуба относительно оси винтовой линии и поступательного смещения вдоль этой оси. К преимуществам этого подхода можно отнести возможность его непосредственного практического использования в стоматологии, в частности при планировании ортодонтического лечения. Это продемонстрировано в работе [12] на примере расчета перемещений и углов поворота клыков, а также визуализации их ортодонтического движения при действии нагрузки малой величины.

Целью настоящего исследования является математическое моделирование начальных перемещений зуба в форме двуполостного гиперболоида в линейно-упругом периодонте при действии сосредоточенных сил и моментов сил. Анализ различных движений зуба выполняется на основании определения перемещения вдоль винтовой линии и уравнения оси винтовой линии.

## РАВНОВЕСИЕ КОРНЯ ЗУБА В ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКЕ

Внешняя поверхность корня зуба и прилегающая к нему внутренняя поверхность периодонтальной связки описываются уравнением двуполостного гиперболоида (считаем, что корень зуба является абсолютно твердым телом)

$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{\sqrt{1+p^2} - p} \left( \sqrt{(1-e^2) \left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{z}{b} \right)^2 + p^2} - p \right) = 0, \quad (1)$$

где  $h$  – высота корня зуба;  $e$  – эксцентриситет эллипса в поперечном сечении зуба на уровне альвеолярного гребня,  $e = \sqrt{1-(b/a)^2}$ ;  $a, b$  – полуоси эллипса в сечении корня зуба на уровне альвеолярного гребня;  $p$  – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы, смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба на величину  $\delta$  (толщина периодонтальной связки постоянна). Ее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) = & y + n_y \delta - \frac{h}{\sqrt{1+p^2} - p} \times \\ & \times \left( \sqrt{(1-e^2) \left( \frac{1}{b} (x + n_x \delta) \right)^2 + \left( \frac{1}{b} (z + n_z \delta) \right)^2 + p^2} - p \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности (1), которые с учетом уравнения (1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_x = & -\frac{1}{\Delta} \frac{h(1-e^2)x}{A}, n_y = \frac{1}{\Delta}, n_z = -\frac{1}{\Delta} \frac{hz}{A}, A = b \left( \sqrt{1+p^2} - p \right) \sqrt{(1-e^2)x^2 + z^2 + (bp)^2}, \\ \Delta = & \sqrt{1 + \frac{h^2((1-e^2)x^2 + z^2)}{b^2(\sqrt{1+p^2} - p)((bp)^2 + (1-e^2)x^2 + z^2)}}. \end{aligned} \quad (3)$$

При действии на зуб сосредоточенной силы  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$  точки периодонта, прилегающие к поверхности корня (1) зуба, получают перемещения, равные перемещению корня. Внешняя поверхность периодонтальной связки (2) является жестко закрепленной. Отметим, что согласно результатам работы [13] не выявлено существенных различий между результатами расчета моделей, учитывающих костную ткань и жесткую заделку внешней поверхности периодонтальной связки, а также указано, что при расчете начальных перемещений зубов в периодонте зубы и костная ткань могут задаваться как абсолютно твердые тела.

В соответствии с работами [28, 35] будем считать периодонт несжимаемым материалом с коэффициентом Пуассона, равным 0,49. Это означает, что при смещении корня зуба к стенке зубной альвеолы периодонт начинает «растекаться» вокруг поверхности корня зуба [35]. Поэтому компоненты тензора деформаций в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к внешней поверхности корня зуба, можно представить в следующем виде [28, 35]:

$$\varepsilon_{nn} = -u_n/\delta, \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \gamma_{n\theta} = -u_\theta/\delta, \gamma_{nt} = -u_t/\delta, \gamma_{t\theta} = 0, \quad (4)$$

где  $u_n$ ,  $u_t$ ,  $u_\theta$  – перемещения точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей к поверхности корня зуба;  $\delta$  – ширина периодонтальной связки в направлении нормали к поверхности (1). Заметим, что аналогичный подход к определению деформаций использован в работе [2] при распределении жевательной нагрузки при центральной окклюзии. Нормаль, образующая и направляющая к поверхности корня зуба, а также его геометрические размеры показаны на рис. 1.

Условия равновесия корня зуба (равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб) представим в виде

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{f} = 0, \quad \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности  $F(x, y, z) = 0$ ,  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ;  $\sigma$  – тензор напряжений;  $\vec{f}$  – главный вектор внешних сил,  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор;  $\vec{m}$  – главный момент внешних сил,  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$

На основании закона Гука для однородной изотропной среды компоненты тензора напряжений  $\sigma$  представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})), \quad \tau_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})), \quad \tau_{xz} = \frac{E\varepsilon_{xz}}{1+\nu}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})), \quad \tau_{yz} = \frac{E\varepsilon_{yz}}{1+\nu}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E$  – модуль упругости тканей периодонтальной связки;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

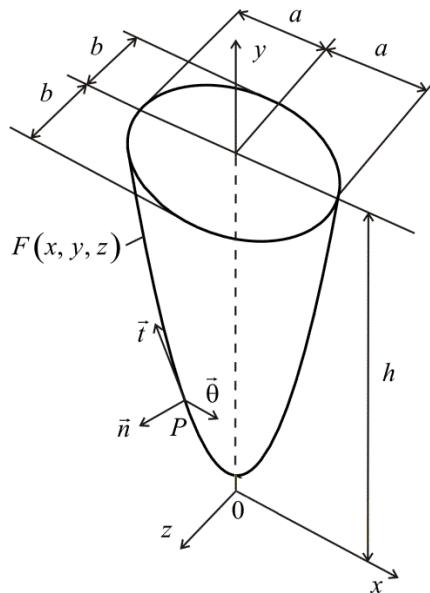


Рис. 1. Корень зуба в форме кругового гиперболоида:  $\vec{n}$  – нормаль;  $\vec{t}$  – образующая;  $\vec{\theta}$  – направляющая к поверхности кругового гиперболоида в точке  $P$

Компоненты тензора деформаций в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  выразим через компоненты тензора деформаций в системе координат  $(n, t, \theta)$  следующим образом [35]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = T_2 T_1 \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} & \varepsilon_{tm} & \varepsilon_{\theta n} \\ \varepsilon_{tm} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\theta n} & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^T T_2^T, \quad \varepsilon_{tm} = \frac{1}{2} \gamma_m, \quad \varepsilon_{\theta n} = \frac{1}{2} \gamma_{\theta n}. \quad (7)$$

Выполним преобразование вектора перемещения  $(u_n, u_0, u_t)$  точки  $P$ , находящейся на внешней поверхности корня зуба (внутренней поверхности периодонтальной связки), из системы координат  $(n, t, \theta)$  в систему координат  $(x, y, z)$ :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_t \\ u_0 \end{pmatrix} = T_1^T T_2^T \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} H & 0 & -G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & H \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$H = \frac{x(1-e^2)}{\sqrt{x^2(1-e^2)^2 + z^2}}, \quad G = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

где  $T_1$  – матрица поворота относительно направляющей  $\vec{\theta}$  на угол  $\alpha$ ;  $T_2$  – матрица поворота относительно оси  $0z$  на угол  $\varphi$ ;  $T_1^T$ ,  $T_2^T$  – транспонированные матрицы  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. В матрице  $T_1$  угол  $\alpha$  между образующей к поверхности корня зуба  $t$  и плоскостью, параллельной плоскости  $x0z$  и проходящей через точку  $P$ , такой, что

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h \sqrt{(1-e^2)^2 x^2 + z^2}}{b \left( \sqrt{1+p^2} - p \right) \sqrt{(bp)^2 + (1-e^2)x^2 + z^2}}.$$

Последовательно подставляя в выражение (7) соотношения (4) и (8), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{H(G^2 + H^2)u_x \sin(\alpha)}{\delta}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{u_y \cos(\alpha)}{\delta}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{G(G^2 + H^2)u_z \sin(\alpha)}{\delta}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(G^2 + H^2)u_x \cos(\alpha) - Hu_y \sin(\alpha)}{2\delta}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{(G^2 + H^2)u_z \cos(\alpha) - Gu_y \sin(\alpha)}{2\delta}, \\ \varepsilon_{xz} &= -\frac{(G^2 + H^2)(u_z H + Gu_x) \sin(\alpha)}{2\delta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Любое перемещение корня зуба может быть описано посредством комбинации поступательных перемещений  $u_{0x}$ ,  $u_{0y}$  и  $u_{0z}$  вдоль соответствующих координатных осей и углами поворота вершины корня  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и  $\theta_z$  относительно этих же осей. Поскольку толщина периодонта очень мала, углы поворота очень малы. Это позволяет использовать следующие линеаризованные формулы:

$$u_x = u_{0x} + z\theta_y - y\theta_z, u_y = u_{0y} - z\theta_x + x\theta_z, u_z = u_{0z} + y\theta_x - x\theta_y. \quad (10)$$

Подставим выражения (3), (6), (9) и (10) в уравнения равновесия (5). В результате получим систему однородных алгебраических уравнений относительно поступательных перемещений и углов поворота корня зуба следующего вида:

$$\begin{aligned} c_x u_{0x} + c_{0xy} \theta_z &= f_x, c_y u_{0y} = f_y, c_z u_{0z} + c_{0yz} \theta_x = f_z, \\ c_z u_{0z} + \mu_x \theta_x &= y_f f_z - z_f f_y, \mu_y \theta_y = z_f f_x - x_f f_z, \\ c_{0x} u_{0x} + \mu_z \theta_z &= x_f f_y - y_f f_x, \end{aligned} \quad (11)$$

$$c_x = E \iint_F \left( ABb(2v-1)\cos(\alpha) + h(2Hx(1-e^2)(v-1) + Gz(2v-1))\sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$c_y = E \iint_F \left( 2ABb(v-1)\cos(\alpha) + h(2v-1)(Hx(1-e^2) + Gz)\sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$c_z = E \iint_F \left( ABb(1-2v)\cos(\alpha) - h(Hx(1-e^2)(1-2v) + 2Gz(1-v))\sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C},$$

$$\begin{aligned} c_{0x} &= -E \iint_F \left( (1-2v)(1-e^2)hx^2 + ABby \right) \cos(\alpha) + \\ &+ \left( hy(2Hx(1-e^2)(1-v) + Gz(1-2v)) + 2ABHbvx \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{0z} &= E \iint_F \left( (1-2v)(hz^2 + AbyB) \cos(\alpha) + \right. \\ &\left. + \left( hy(Hx(1-e^2)(1-2v) + 2Gz(1-v)) + 2ABGbvz \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{0xy} &= E \iint_F \left( \left( 2B(1-e^2)hv x^2 - Ab(1-2v)yB^2 \right) \cos(\alpha) - \right. \\ &\left. - \left( Bhy(2(1-e^2)H(1-v)x + G(1-2v)z) + Abh(1-2v)xB^2 \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{0yz} &= E \iint_F \left( \left( ABby(1-2v) + 2hvz^2 \right) \cos(\alpha) + \right. \\ &\left. + \left( ABGbz(1-2v) + hy(Hx(1-e^2)(1-2v) + 2Gz(1-v)) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_x &= E \iint_F \left( \left( hyz^2 + ABb((1-2v)y^2 + 2(1+v)z^2) \right) \cos(\alpha) + \right. \\ &\left. + \left( ABGbyz + h(Hx(y^2 + z^2)(1-e^2)(1-2v) + Gz(2y^2(1-v) + z^2(1-2v))) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_y &= E \iint_F \left( ABb(x^2 + z^2)(1 - 2v) \cos(\alpha) - h \left( Gz(x^2(1 + e^2 - 2v) + z^2(1 - 2v)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + BHx(x^2(1 - e^2)(1 - 2v) + z^2(1 - 2e^2(1 - v) - 2v)) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \\ \mu_z &= E \iint_F \left( hx^2y(1 - e^2) + ABb(2x^2(1 - v) + y^2(1 - 2v)) \cos(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \left( Hx(ABby + h(1 - e^2)(x^2(1 - 2v) + 2y^2(1 - v))) + Gh(x^2 + y^2)z(1 - 2v) \right) \sin(\alpha) \right) \frac{dF}{C}, \\ A &= \sqrt{p^2 + 1} - p, \quad B = \sqrt{b^2 p^2 + (1 - e^2)x^2 + z^2}, \quad C = 2b(1 + v)(2v - 1)AB\delta.\end{aligned}$$

Здесь  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  – жесткости периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба вдоль координатных осей;  $c_{\theta_{xy}}$ ,  $c_{\theta_{yz}}$  – статические моменты жесткостей;  $c_{\theta_x}$ ,  $c_{\theta_z}$  – жесткости периодонта при повороте корня зуба относительно осей  $0x$ ,  $0z$  при действии силы вдоль этой координатной оси;  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$  – жесткости периодонта при поворотах корня зуба относительно координатных осей  $0x$ ,  $0y$ ,  $0z$  соответственно;  $(x_f, y_f, z_f)$  – координаты точки приложения нагрузки. Отметим, что выражения для коэффициентов  $c_{\theta_{yz}}$ ,  $c_{\theta_z}$  и  $c_{\theta_{xy}}$ ,  $c_{\theta_x}$  не совпадают, тогда как из консервативности системы (11) следует выполнение равенств  $c_{\theta_{yz}} = c_{\theta_z}$  и  $c_{\theta_{xy}} = c_{\theta_x}$ . Привести к одному и тому же виду соотношения для соответствующих констант можно после подстановки всех промежуточных величин. Однако в этом случае соответствующие выражения будут иметь необозримый вид, поэтому приведены более компактные формулы.

На основании системы (11) для заданной действующей на зуб нагрузки можно найти поступательные перемещения и углы поворота. Значения этих величин определяют перемещение полюса (вершины корня зуба) вдоль оси винтовой линии

$$u_s = \frac{u_x \theta_x + u_y \theta_y + u_z \theta_z}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}}. \quad (12)$$

В зависимости от значения перемещения  $u_s$  будем выделять наклонно-вращательное (винтовое), вращательное и поступательное (корпусное) перемещения зуба. Указанные типы начального движения зубов соответствуют классификациям, принятым в клинической стоматологии [1, 33].

## ВИНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

В случае, если перемещение  $u_s$  отлично от нуля, перемещение зуба является винтовым и описывается следующим уравнением:

$$\frac{u_x - y\theta_z + z\theta_y}{\theta_x} = \frac{u_y - z\theta_x + x\theta_z}{\theta_y} = \frac{u_z - x\theta_y + y\theta_x}{\theta_z}. \quad (13)$$

Таблица 1

## Жесткости и статические моменты жесткостей

Параметр	Значение	
Жесткости при поступательном перемещении, МН/м	$c_x$	4,52307
	$c_y$	1,05533
	$c_z$	6,28229
Жесткости периодонта при повороте корня зуба относительно оси при действии силы вдоль этой координатной оси, Н	$c_{\theta_x}$	-41017,8
	$c_{\theta_z}$	54796,7
Жесткости периодонта при поворотах корня зуба относительно координатных осей, Н·м	$\mu_x$	553,949
	$\mu_y$	4,99209
	$\mu_z$	429,647
Статические моменты жесткостей, Н	$c_{\theta_{xy}}$	-41017,8
	$c_{\theta_{yz}}$	54796,7

Уравнение оси винта на основании соотношений (13) можно представить в параметрическом виде ( $t$  – параметр):

$$x = \frac{\theta_z(u_z(\theta_x^2 + \theta_y^2) - \theta_z(u_x\theta_x + u_y\theta_y))}{\theta_y\theta_z(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)} - \frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)t}{\theta_y\theta_z}, \quad y = -\frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)t}{\theta_x\theta_z}, \quad (14)$$

$$z = \frac{\theta_x(\theta_x(u_y\theta_y + u_z\theta_z) - u_x(\theta_y^2 + \theta_z^2))}{\theta_y\theta_z(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)} - \frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)t}{\theta_x\theta_y}.$$

На рис. 2 показаны траектории начальных перемещений пяти точек зуба, ось винтовой линии, определяемая уравнением (14) (рис. 2, *a*), а также начальные и конечные положение корня зуба (рис. 2, *б*). На зуб действует сосредоточенная сила с компонентами  $f_x = f_z = 1$  Н,  $f_y = -1$  Н, приложенная в точке с координатами  $(b/\sqrt{1-e^2}, 0, h)$ . Здесь и далее при вычислениях принимаем высоту корня зуба  $h = 13$  мм, большая полуось  $b = 3,9$  мм [28, 35], параметр закругления вершины корня  $p = 0,4$ ; упругие свойства периодонтальной связки описываются константами  $E = 680$  кПа,  $v = 0,49$  [19, 28, 35]; толщина периодонта  $\delta = 0,229$  мм [28, 35]. Заметим, что расчет коэффициентов системы (11) показывает, что  $c_{\theta_{yz}} = c_{\theta_z}$  и  $c_{\theta_{xy}} = c_{\theta_x}$ . В табл. 1 приведены значения жесткостей и статических моментов жесткостей для рассматриваемого корня зуба.

При визуализации траекторий перемещения точек и положений корня зуба принят коэффициент масштабирования, равный 1000. Размеры корня зуба на рис. 2 и далее приведены в миллиметрах.

Из рис. 2 видно, что точки зуба при произвольно ориентированной нагрузке получают винтовые перемещения относительно оси винтовой линии. При указанной нагрузке на зуб перемещение вершины корня вдоль оси винтовой линии  $u_s \approx 0,92$  мкм.

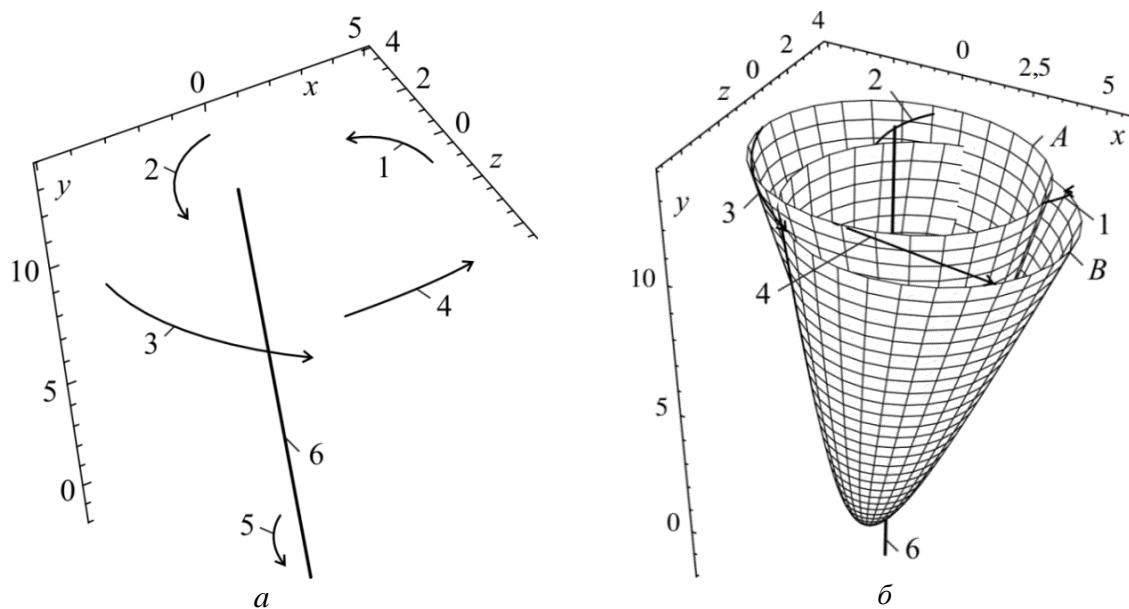


Рис. 2. Визуализация наклонно-вращательного движения корня зуба:  
 $a$  – траектории начальных перемещений точек зуба с координатами:  
1 –  $(b/\sqrt{1-e^2}, 0, h)$ , 2 –  $(0, b, h)$ , 3 –  $(-b/\sqrt{1-e^2}, 0, h)$ , 4 –  $(0, -b, h)$ , 5 –  
 $(0, 0, 0)$ , 6 – ось винтовой линии;  $\bar{b}$  – начальное (A) и конечное (B) положение  
корня зуба, траектории перемещения точек 1–5 и винтовая  
линия 6

### ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Если при некоторой нагрузке на зуб перемещение вдоль оси винтовой линии равняется нулю, зуб под действием этой нагрузки получает вращательное движение. В случае, если вращение происходит в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, положение осей вращения, параллельных осям координат, описывается следующими параметрическими уравнениями:

$$x = -u_y/\theta_z, \quad y = u_x/\theta_z, \quad z = t, \quad (15)$$

$$x = t, \quad y = -u_z/\theta_x, \quad z = u_y/\theta_x, \quad (16)$$

$$x = u_z/\theta_y, \quad y = t, \quad z = -u_x/\theta_y. \quad (17)$$

Уравнение (15) соответствует вращательному движению корня зуба в плоскости, параллельной координатной плоскости  $xOy$ , уравнения (16) и (17) – в плоскостях, параллельных координатным плоскостям  $yOz$  и  $xOz$  соответственно. Отметим, что координаты точек пересечения осей вращения с плоскостями координат определяют положение центров вращения при движении корня зуба в одной плоскости. Из уравнений (16)–(17) следует, что центры вращения зуба при вращении в плоскостях

$x=0$ ,  $y=0$  и  $z=0$  имеют координаты  $(0, -u_z/\theta_x, u_y/\theta_x)$ ,  $(u_z/\theta_y, 0, -u_x/\theta_y)$  и  $(-u_y/\theta_z, u_x/\theta_z, 0)$  соответственно. На рис. 3 показано положение оси вращения в плоскости  $z=0$ . Компоненты действующей нагрузки  $f_x = -f_y = 1$  Н,  $f_z = 0$ . Точка приложения силы имеет координаты  $(b/\sqrt{1-e^2}, 0, h)$ . Геометрические размеры корня зуба и упругие свойства периодонтальной связки прежние. При визуализации положения корня зуба после действия нагрузки на рис. 3, б принят коэффициент масштабирования, равный 1000.

Отметим, что в основном при исследовании начального перемещения зубов как в плоском, так и в пространственном случае используется понятие центра вращения как точки, вокруг которой происходит поворот зуба при действии заданной нагрузки. Математически строгое определение центра вращения сформулировано в работе [23]. Полученные выше результаты, а также результаты конечно-элементного исследования [29] указывают на то, что более корректным представляется использование понятия оси вращения, которое можно ввести по аналогии с понятием осей сопротивления [36]. Положение оси вращения при начальном движении зуба определяется геометрическими размерами корня и периодонтальной связки, их упругими свойствами, а также величиной и областью приложения внешней нагрузки.

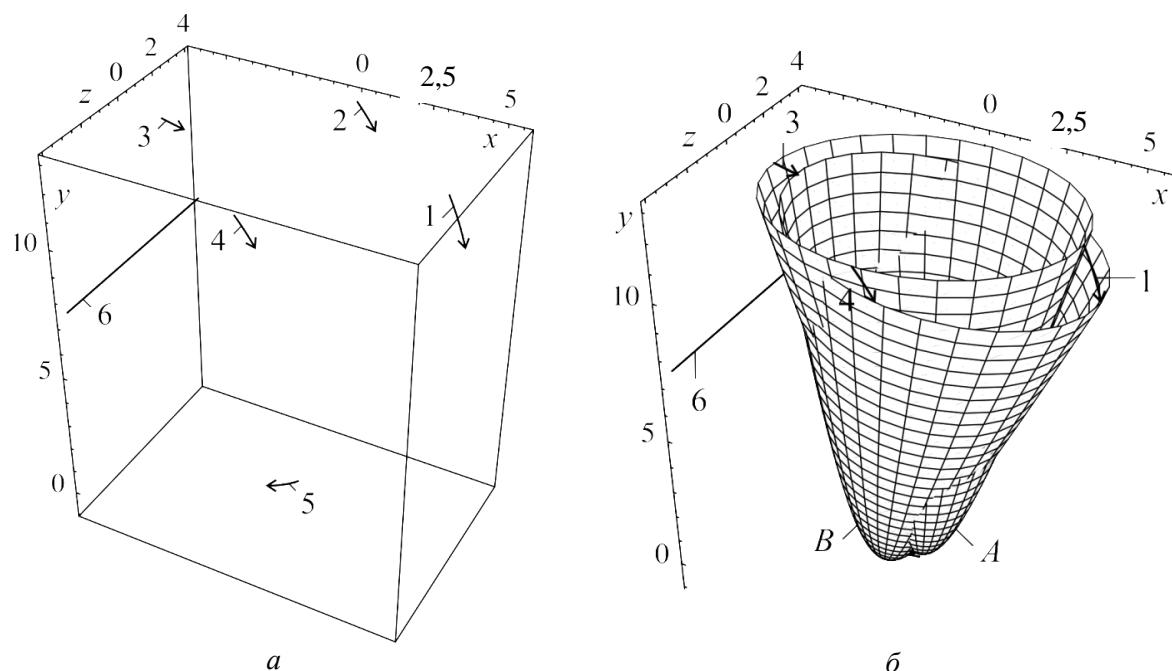


Рис. 3. Визуализация вращательного движения корня зуба: *а* – траектории начальных перемещений точек зуба с координатами: 1 –  $(b/\sqrt{1-e^2}, 0, h)$ , 2 –  $(0, b, h)$ , 3 –  $(-b/\sqrt{1-e^2}, 0, h)$ , 4 –  $(0, -b, h)$ , 5 –  $(0, 0, 0)$ , 6 – ось вращения; *б* – начальное (A) и конечное (B) положение корня зуба, траектории перемещения точек 1–5 и ось вращения *б*

### УСЛОВИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОРНЯ ЗУБА

При равенстве нулю всех углов поворота зуба перемещение  $u_s$  вдоль винтовой линии имеет неопределенное значение. Это указывает на поступательное (корпусное) перемещение зуба.

Определим координаты точки  $P_1(0, y_1, 0)$  приложения сосредоточенной нагрузки, действующей параллельно оси  $0x$  таким образом, что зуб перемещается поступательно. В этом случае углы поворота относительно координатных осей  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ , поступательные перемещения корня  $u_{0y} = u_{0z} = 0$ , составляющая нагрузки  $f_y = f_z = 0$ . Система уравнений равновесия (11) принимает вид

$$c_x u_{0x} = f_x, c_{0x} u_{0x} = -y_1 f_x.$$

Отсюда

$$y_1 = -c_{0x}/c_x. \quad (18)$$

Координаты точки  $P_2(0, y_2, 0)$ , через которую проходит линия действия силы для поступательного смещения зуба вдоль оси  $0z$ , найдем аналогично. При этом в системе (11) принимаем  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ , поступательные перемещения  $u_{0x} = u_{0y} = 0$ , составляющие нагрузки  $f_x = f_y = 0$ . В результате получим

$$y_2 = -c_{0z}/c_z. \quad (19)$$

Формулы (18), (19) определяют положение центров сопротивления корня зуба в виде симметричного двуполостного гиперболоида. В случае, если горизонтально расположенная линия действия силы проходит через точки  $P_1$  или  $P_2$ , зуб получает корпусное перемещение вдоль осей  $0x$  и  $0z$  соответственно.

Расчет координат  $y_1$  и  $y_2$  для различных значений эксцентризитета  $e$  показывает, что при увеличении эксцентризитета (при уменьшении длины полуоси  $a$ ) значение координаты  $y_1$  возрастает, и центр сопротивления смещается от апекса (вершины корня) в сторону альвеолярного гребня. Координата  $y_2$  центра сопротивления  $P_2$  с возрастанием эксцентризитета увеличивается незначительно. При равенстве полуосей эллипса в поперечном сечении корня ( $e=0$ ) центры сопротивления  $P_1$  и  $P_2$  совпадают.

Полученные результаты подтверждают выводы, сделанные в работах [36, 37], об отсутствии единого центра сопротивления применительно к неидеализированному (асимметричному) корню зуба и периодонтальной связке. В нашем случае показано, что два различных центра сопротивления корня существуют для случая корня зуба и периодонтальной связки с эллиптическим поперечным сечением. Это соответствует выводам работы [23] об отсутствии единого центра сопротивления корня зуба при наличии двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии.

На основании найденных координат точек  $P_1$  и  $P_2$  можно задать оси сопротивления, определяющие положение линии действия силы для корпусного перемещения зуба в направлении осей координат. Эти оси проходят через точки  $P_1$  и  $P_2$  параллельно осям координат, причем оси сопротивления не пересекаются в одной точке, что также соответствует выводам работы [36]. Использование оси сопротивления тем более уместно для описания корпусного движения в вертикальном

направлении (вдоль оси  $0y$ ), поскольку из системы (11) не представляется возможным однозначно определить центр вращения для такого движения. В то же время ось сопротивления не определяет единственно возможное положение линии действия силы для поступательного перемещения зуба. Покажем, что можно задать такую сосредоточенную нагрузку, линия действия которой проходит через центр сопротивления  $P_1$  ( $P_2$ ) и расположена в плоскости симметрии корня  $x0y$  ( $z0y$ ), при действии которой корень зуба получает корпусное перемещение. Для определенности будем считать, что зуб движется поступательно в плоскости  $x0y$  при действии сосредоточенной силы с составляющими  $(f_x, f_y, 0)$ . Сила прикладывается в точке с координатами  $(x_f, y_f, 0)$ . В этом случае углы поворота  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ , поступательное перемещение  $u_{0z} = 0$ . Из первого и шестого уравнений системы уравнений (11) имеем

$$c_x u_{0x} = f_x, c_{0x} u_{0x} = x_f f_y - y_f f_x,$$

или

$$\frac{y_f - y_1}{x_f} = \frac{f_y}{f_x} = \operatorname{tg}(\alpha_1). \quad (20)$$

Отсюда следует, что для заданной точки приложения нагрузки в плоскости  $x0y$  можно установить такие составляющие  $f_x$  и  $f_y$ , при которых линия действия силы будет располагаться под углом  $\alpha_1$  к оси  $0x$ .

Рассуждая аналогичным образом, получим следующее условие поступательного перемещения корня зуба в плоскости  $y0z$  при действии нагрузки с составляющими  $(0, f_y, f_z)$ , приложенной в точке с координатами  $(0, y_f, z_f)$ :

$$\frac{y_f - y_2}{z_f} = \frac{f_y}{f_z} = \operatorname{tg}(\alpha_2). \quad (21)$$

Таким образом, при действии нагрузки в плоскости симметрии зуба, линия действия которой проходит через центр сопротивления, зуб получает корпусное перемещение. Это обстоятельство подтверждают выводы экспериментальной работы [21] о зависимости центров сопротивления от направления прикладываемой нагрузки. Аналогичные результаты описаны в более поздних исследованиях с трехмерными моделями нескольких типов зубов и подходами к моделированию [18, 36]. В случае, если форма корня зуба имеет форму двуполостного гиперболоида с эллиптическим сечением, отношение между компонентами нагрузки определяется выражениями (20) и (21). При совпадении полуосей эллипса в сечении корня зуба в любой точке на поверхности зуба можно приложить силу, под действием которой зуб будет получать корпусное перемещение. Соотношение между составляющими нагрузки в этом случае также определяется положением центра сопротивления по отношению к апексу и координатами точки приложения силы. Также отметим, что система уравнений (11) следует в частном случае для корня зуба в форме двуполостного гиперболоида из системы уравнений равновесия для корня зуба произвольной формы, сформулированной в [4]. Поскольку в нашем случае корень зуба соответствует зубу типа  $(+, -, 0)$  по классификации, предложенной в работе [4], точки  $P_1$  и  $P_2$  в соответствии с терминологией [4] образуют область сопротивления зуба.

Характерным признаком такого зуба является наличие двух взаимно перпендикулярных плоскостей, совпадающих с плоскостями симметрии, которые содержат прямые поступательного воздействия. Это подтверждается формулами (20), (21), указывающими на существование двух пучков прямых поступательного воздействия, проходящих через точки  $P_1$  и  $P_2$ .

### Конечно-элементный расчет центров сопротивления

Параметризованная конечно-элементная модель корня зуба разработана с применением пакетов *TetGen* и *TOCHNOG* [32, 34]. Внешняя поверхность корня зуба и внутренняя поверхность периодонтальной связки задавались уравнением (1). Внешняя поверхность периодонта, описываемая уравнением (2), жестко прикреплена к костной ткани зубной альвеолы. Количество конечно-элементных узлов модели «корень зуба – периодонт» составляет 67 548, количество конечных элементов – 374 371. Для периодонтальной связки размер ребра конечного элемента равен 0,05725 мм. Сосредоточенная нагрузка прикладывалась к корню зуба на этапе формирования модели к узлу, находящемуся на оси симметрии корня. Координата  $y_{fem}$  центра сопротивления определялась из условия равенства нулю перемещений корня, направленных вдоль оси 0 $y$ . Дискретная модель корня зуба и периодонтальной связки для случая  $e = 0,6$  показана на рис. 4. Для визуализации перемещений использован пакет *ParaView* [24].

Результаты расчетов координат  $y_1$  и  $y_{fem}$  центров сопротивления, выполненные на основании формулы (18) и конечно-элементной модели, для различных значений эксцентризитета и параметра, характеризующего закругление корня, приведены в табл. 2 и табл. 3. Параметр  $\delta = |y_{fem} - y_1| / y_{fem}$  показывает величину отклонения координаты  $y_1$  от результатов конечно-элементного расчета.

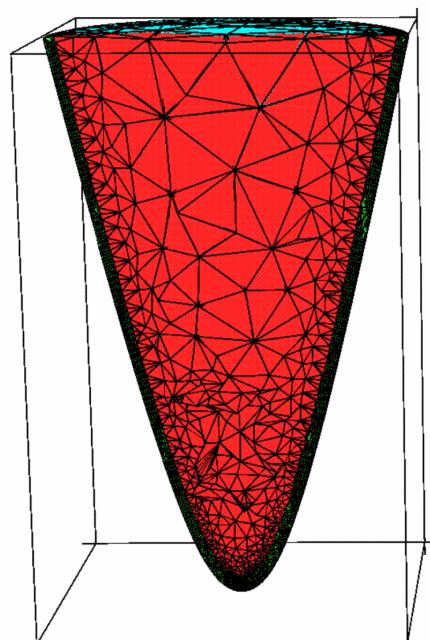


Рис. 4. Конечно-элементная модель корня зуба и периодонтальной связки

Таблица 2

**Координаты  $y_1$  и  $y_{fem}$  центра сопротивления для различных значений эксцентриситета  $e$  (параметр, характеризующий закругление корня, равен 0,4)**

Параметр	Значения						
	$e$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_1$ , мм	8,7152	8,7216	8,7417	8,7779	8,8358	8,9256	9,0686
$y_{fem}$ , мм	8,6443	8,6502	8,6708	8,7061	8,765	8,8518	8,9916
$\delta$ , %	0,82	0,83	0,82	0,83	0,81	0,83	0,86

Таблица 3

**Координаты  $y_1$  и  $y_{fem}$  центра сопротивления для различных значений параметра  $p$ , характеризующего закругление корня (эксцентриситет равен 0,6)**

Параметр	Значения			
	$p$	0,1	0,2	0,3
$y_1$ , мм	9,4718	9,2792	9,1548	9,0686
$y_{fem}$ , мм	9,3684	9,1996	9,0740	8,9916
$\delta$ , %	1,09	0,86	0,88	0,85

Табл. 2 и табл. 3 показывают достаточно хорошее совпадение результатов расчета координаты  $y_1$  на основании аналитической и конечно-элементной моделей. Анализ результатов табл. 2 показывает, что центр сопротивления для корней зубов, имеющих в апексе геометрическую форму, близкую к конусу с малым углом раствора, смещается на большее расстояние от вершины корня по сравнению с корнями с более закругленной вершиной.

### Расчет сосредоточенной нагрузки

Разработанный в статье подход к моделированию начальных перемещений корня зуба применим как к произвольной поверхности с двумя плоскостями симметрии, так и к составным поверхностям с одной осью симметрии или не имеющим осей симметрии. Для этого достаточно в качестве уравнений (1), (2) рассмотреть соответствующие уравнения поверхностей. В нашем случае для описания поверхности корня зуба использован двуполостной гиперболоид, поскольку с помощью этой поверхности можно более точно описать реальную поверхность корня зуба за счет параметра, характеризующего закругление вершины [3], по сравнению с параболоидом, который в основном применяется при математическом моделировании поведения системы «корень зуба – периодонтальная связка» [28, 35]. Для параболоида получено достаточно большое количество результатов [28, 35, 38], в том числе выполнен расчет нагрузки для заданного поступательного перемещения корня [35]. Чтобы продемонстрировать соответствие результатов моделей корня зуба в форме гиперболоида и параболоида, а также проанализировать влияние параметра закругления вершины на величину этой нагрузки, рассмотрим расчет сосредоточенной нагрузки, которую следует приложить к зубу для его поступательного смещения вдоль оси  $Ox$  на расстояние 0,2 мкм. В табл. 4 приведены результаты такого расчета для корня зуба в форме двуполостного гиперболоида с различными значениями эксцентриситетов и параметров, характеризующих закругление апекса. В последней

Таблица 4

**Значение сосредоточенной нагрузки  $f_x$ , которую необходимо приложить к зубу для его поступательного перемещения вдоль оси  $0x$  на расстояние 0,2 мкм для различных значений эксцентризитетов и параметров, характеризующих закругление корня зуба**

$e$	$f_x$ , Н				$f_x$ , Н [19]
	$p = 0,1$	$p = 0,2$	$p = 0,3$	$p = 0,4$	
0	0,86	0,90	0,94	0,96	1,07
0,1	0,86	0,90	0,94	0,96	1,07
0,2	0,85	0,90	0,93	0,96	1,06
0,3	0,85	0,89	0,93	0,95	1,04
0,4	0,84	0,88	0,92	0,94	1,00
0,5	0,82	0,87	0,90	0,93	0,96
0,6	0,81	0,85	0,88	0,90	0,90

колонке приведены результаты работы [35], полученные для корня в форме эллиптического параболоида. Геометрические размеры корня  $h = 13$  мм,  $b = 3,9$  мм, толщина периодонта  $\delta = 0,229$  мм, упругие свойства периодонта  $E = 680$  кПа,  $v = 0,49$ .

Из табл. 4 видно, что значения нагрузки  $f_x$ , необходимые для поступательного смещения корня зуба в форме эллиптического параболоида и двуполостного гиперболоида, могут совпадать для некоторых значений эксцентризитетов и параметров закругления. В частности, значения нагрузки совпадают при  $e = 0,6$  и  $p = 0,4$ . Нагрузка  $f_x$  возрастает как для параболоида, так и для гиперболоида при уменьшении эксцентризитета. С уменьшением параметра закругления сила  $f_x$  также уменьшается. При малых эксцентризитетах, в частности  $0 < e < 0,2$ , нагрузка  $f_x$  практически не изменяется для соответствующего параметра закругления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получена система уравнений равновесия корня зуба, позволяющая определять начальные перемещения однокоренных зубов в форме двуполостного гиперболоида в линейно-упругом периодонте. Сравнительный анализ расчета положений центров сопротивления на основании математической и конечно-элементной модели показал достаточно высокое совпадение результатов.

В зависимости от значения перемещения вдоль винтовой оси выделено наклонно-вращательное движение зуба, сочетающее перемещение и вращение зуба в пространстве, а также вращательное и поступательное движение. Анализ различных видов движения корня зуба позволяет сделать следующие выводы:

- Использование оси винтовой линии позволяет прогнозировать и более детально визуализировать начальное перемещение зуба в пространстве относительно его исходного положения при заданной нагрузке.

- Понятие центра вращения целесообразно использовать в плоском случае; при трехмерном движении зуба не существует единого центра вращения, и движение зуба происходит по винтовой линии.

– В случае симметричного эллиптического поперечного сечения корня зуба не существует единого центра сопротивления, поэтому целесообразно использовать понятие оси сопротивления. Корпусное движение зуба имеет место при действии силы произвольной величины при условии, что линия действия силы проходит вдоль оси сопротивления. Также корпусное движение наблюдается в случае, если линия действия силы расположена в плоскости симметрии и проходит через соответствующий центр сопротивления.

– Единый центр сопротивления существует у корня зуба с круговым сечением. В любой точке зуба с таким сечением можно задать нагрузку, действие которой будет приводить к корпусному движению зуба. Для этого достаточно, чтобы линия действия проходила через центр сопротивления зуба.

Модель корня зуба в виде гиперболоида позволяет учесть влияние закругления корня на начальные перемещения, а также на напряженно-деформированное состояние периодонтальной связки. Анализ зависимости положения центра сопротивления от параметра, характеризующего закругление корня в апексе, показывает, что для корней зубов, имеющих в апексе геометрическую форму, близкую к конусу с малым углом раствора, координата центра сопротивления удалена на большее расстояние от вершины корня по сравнению с корнями с более закругленной вершиной. Для смещения на определенное расстояние зубов с закругленными корнями необходима большая нагрузка, чем для смещения на это же расстояние корней с заостренными вершинами.

Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования и визуализации начального перемещения зубов при действии ортодонтических сил, определения возникающего при этом напряженно-деформированного состояния и нахождения благоприятной для ортодонтического движения зубов нагрузки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аболмасов Н.Г., Аболмасов Н.Н. Ортодонтия. – М.: МЕДпресс-информ, 2008. – 424 с.
2. Дударь О.И., Костерина И.П., Майорова Л.В., Фатеева Н.А. Распределение жевательной нагрузки по зубному ряду при центральной окклюзии // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 3. – С. 56–62.
3. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб – периодонт. – Минск.: Экономические технологии, 2000. – 132 с.
4. Осипенко М.А., Няшин Ю.И., Няшин М.Ю., Дубинин А.Л. Область сопротивления зуба: определение и свойства // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 17, № 2 (60). – С. 31–38.
5. Bosiakov S.M., Yurkevich K.S. Определение жесткости костной ткани при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба // Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, №. 2. – С. 36–45.
6. Bourauel C., Freudenreich D., Vollmer D., Kobe D., Drescher D., Jäger A. Simulation of orthodontic tooth movements – a comparison of numerical models // Journal of Orofacial Orthopedics. – 1999. – Vol. 60. – P. 136–151. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01298963>
7. Cattaneo P.M., Dalstra M., Melsen B. The finite element method: a tool to study orthodontic tooth movement // Journal of Dental Research. – 2005. – Vol. 84. – P. 428–433. DOI: <http://dx.doi.org/10.1177/154405910508400506>
8. Clement R., Schneider J., Brambs H.J., Wunderlich A., Geiger M., Sander F. G. Quasi-automatic 3D finite element model generation for individual single-rooted teeth and periodontal ligament // Computer Methods and Programs in Biomedicine. – 2004. – Vol. 73. – P. 135–144. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0169-2607\(03\)00027-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0169-2607(03)00027-0)
9. Cronau M., Ihlow D., Kubin-Meisenburg D., Fanghänel J., Dathe H., Nägerl H. Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 2006. – Vol. 129. – P. 599.e13–599.e21. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajodo.2005.11.030>

10. Dorow C., Sander F.G. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method // Journal of Orofacial Orthopedics. – 2005. – Vol. 66. – P. 208–218. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00056-005-0416-5>
11. Hayashia K., Arakib Y., Uechia J., Ohnac H., Mizoguchia I. A novel method for the three-dimensional (3-D) analysis of orthodontic tooth movement – calculation of rotation about and translation along the finite helical axis // Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 35. – P. 45–51. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(01\)00166-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(01)00166-X)
12. Hayashi K., Uechi J., Lee S.-P., Mizoguchi I. Three-dimensional analysis of orthodontic tooth movement based on XYZ and finite helical axis systems // European Journal of Orthodontics. – 2007. – Vol. 29. – P. 589–595. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ejo/cjm061>
13. Hohmann A., Kober C., Young P., Dorow C., Geiger M., Andrew Boryor A., Sander F.M., Sander C., Sander F.G. Influence of different modeling strategies for the periodontal ligament on finite element simulation results // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics – 2011. – Vol. 139. – P. 775–783. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajodo.2009.11.014>
14. Isaacson R.J., Lindauer, S.J., Davidovitch M. On tooth movement // The Angle Orthodontist. – 1993. – Vol. 63. – P. 305–309.
15. Jones M.L., Hickman J., Middleton J., Knox J., Volp C. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject // Journal of Orthodontics. – 2001. – Vol. 28. – P. 29–38. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ortho/28.1.29>
16. Kawarizadeh A., Bouraue C., Jäger A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens // European Journal of Orthodontics. – 2003. – Vol. 25. – P. 569–578. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ejo/25.6.569>
17. Masella R.S., Meister M. Current concepts in the biology of orthodontic tooth movement // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 2006. – Vol. 129. – P. 458–468. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajodo.2005.12.013>
18. Meyer B.N., Chen J., Katona T.R. Does the center of resistance depend on the direction of tooth movement? // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 2010. – Vol. 137. – P. 354–361. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajodo.2008.03.029>
19. Nagataki T., Inoue Y., Sakuda M., Burstone C.J. Patterns of initial tooth displacement associated with various root lengths and alveolar bone heights // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 1991. – Vol. 100. – P. 66–71. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0889-5406\(91\)70051-W](http://dx.doi.org/10.1016/0889-5406(91)70051-W)
20. Nägerl H., Kubein-Meesenburg D. Discussion: A FEM study for the biomechanical comparison of labial and palatal force application on the upper incisors // Fortschritte der Kieferorthopädie. – 1993. – Vol. 54. – P. 229–230. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02341469>
21. Nägerl H., Burstone C.J., Becker B., Kubein-Messenburg D. Centers of rotation with transverse forces: an experimental study // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – Vol. 99. – 1991. – P. 337–345. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0889-5406\(91\)70016-P](http://dx.doi.org/10.1016/0889-5406(91)70016-P)
22. Nikolai R.J., Schweiker J.W. Investigation of root-periodontium interface stresses and displacements for orthodontic application // Experimental Mechanics. – 1972. – Vol. 12, № 9. – P. 406–413. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02318551>
23. Osipenko M.A., Nyashin M.Y., Nyashin Y.I. Center of resistance and center of rotation of a tooth: the definitions, conditions of existence, properties // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 1, № 1. – P. 1–11.
24. ParaView [Электронный ресурс]. – URL: <http://paraview.org>. (дата обращения: 6.06.2013).
25. Pedersen E., Andersen K., Gjessing P.E. Electronic determination of rotation produced by orthodontic force systems // European Journal of Orthodontics. – 1990. – Vol. 12. – P. 272–280. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ejo/12.3.272>
26. Pietrzak G., Curnier A., Botsis J., Scherrer S., Wiskott A., Belser U. A nonlinear elastic model of the periodontal ligament and its numerical calibration for the study of tooth mobility // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2002. – Vol. 5. – P. 91–100. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/10255840290032117>
27. Provatidis C.G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament // Medical Engineering and Physics. – 2000. – Vol. 22. – P. 359–370. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S1350-4533\(00\)00055-2](http://dx.doi.org/10.1016/S1350-4533(00)00055-2)
28. Provatidis C.G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation // International Journal of Engineering Science. – 2001. – Vol. 39. – P. 1361–1381.

29. Reimann S., Keilig L., Jäger A., Bourauel C. Biomechanical finite-element investigation of the position of the centre of resistance of the upper incisors // European Journal of Orthodontics. – 2007. – Vol. 29. – P. 219–224. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ejo/cjl086>
30. Ren Y., Jaap C., Kuijpers-Jagtman A. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review // The Angle Orthodontist. – 2003. – Vol. 73. – P. 86–92.
31. Smith R.J., Burstone C.J. Mechanics of tooth movement // American Journal of Orthodontics. – 1984. – Vol. 85. – P. 294–307. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0002-9416\(84\)90187-8](http://dx.doi.org/10.1016/0002-9416(84)90187-8)
32. TetGen. A quality tetrahedral mesh generator and a 3d delaunay triangulator [Электронный ресурс]. – URL: <http://tetgen.berlios.de/> (дата обращения: 6.06.2013).
33. Thurow R.C. Edgewise Orthodontics. – Michigan: C.V. Mosby Company. 1982. – 351 p.
34. TOCHNOG User's manual – a free explicit/implicit FE program [Электронный ресурс]. – URL: <http://tochnog.sourceforge.net/tmu/tmu.html> (дата обращения: 6.06.2013).
35. Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Medical Engineering and Physics. – 2013. – Vol. 35. – P. 403–410. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.medengphy.2012.09.008>
36. Viecilli R.F., Budiman A., Burstone C.J. Axes of resistance for tooth movement: Does the center of resistance exist in 3-dimensional space? // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 2013. – Vol. 143. – P. 163–172. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajodo.2012.09.010>
37. Viecilli R.F., Katona T.R., Chen J., Hartsfield J.K. Jr, Roberts W.E. Three-dimensional mechanical environment of orthodontic tooth movement and root resorption // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 2008. – Vol. 133. – P. 791.e71–726. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajodo.2007.11.023>
38. Vollmer D., Bourauel C., Maier K., Jäger A. Determination of the center of resistance in an upper human canine and idealized tooth model // European Journal of Orthodontics. – 1999. – Vol. 21. – P. 633–648. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ejo/21.6.633>
39. Wise G.E., King G.J. Mechanisms of tooth eruption and orthodontic tooth movement // Journal of Dental Research. – 2008. – Vol. 87, № 5. – P. 414–434. DOI: <http://dx.doi.org/10.1177/154405910808700509>
40. Yamamoto K., Toshimitsu A., Mikami T., Hayashi S., Harada R., Nakamura S. Optical measurement of dental cast profile and application to analysis of three-dimensional tooth movement in orthodontics // Frontiers of Medical and Biological Engineering. – 1989. – Vol. 1. – P. 119–130.
41. Yamamoto K., Hayashi S., Nishikawa H., Nakamura S., Mikami T. Measurement of dental cast profile and three-dimensional tooth movement during orthodontic treatment // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – 1991. – Vol. 38. – P. 360–365. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/10.133232>
42. Ziegler A., Keilig L., Kawarizadeh A., Jäger A., Bourauel C. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth // European Journal of Orthodontics. – 2005. – Vol. 27. – P. 333–339. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ejo/cji020>

## **MATHEMATICAL MODELLING OF INITIAL DISPLACEMENTS OF TOOTH ROOT IN HYPERBOLOID OF TWO SHEETS FORM**

**S.M. Bosiakov, A.F. Mselati, A.V. Krupoderov (Minsk, Belarus)**

A mathematical model for analysis of displacements of a tooth root in the linear elastic periodontal membrane was developed in this study. Tooth root was assumed as rigid solid body and its outer surface was modelled as hyperboloid of two sheets. The initial motion was expressed with a combination of translational displacement and rotational angle. The total strain of periodontal tissue normal to the surface of the root was assessed in conjunction with the width of the periodontal ligament in this direction. Analysis of different types of initial tooth movements was made on the basis of determination of displacements along the helix axis and according to the helix equation. Tipping, rotational and translational movements of the tooth root were considered in the analysis. Visualisation of the initial displacement of the root during tipping motion was carried out considering the position of the helix axis and the trajectories of individual points of the root. Description of the rotational motion was

performed using the axis of rotation. It was shown that translational displacement of the tooth can be affected by the load acting with an angle to the longitudinal axis of the tooth root. The analysis of the influence of the ellipse eccentricity in the cross-section of the root and a parameter of the root roundness on the value of load required for a given displacement of the tooth, as well as on the position of a root's centre of resistance was carried out. Coordinates of the centre of resistance analysed with the developed mathematical model and those analysed with finite element modelling were compared. The results can be used to predict and visualise the displacements of teeth, as well as assessment of the stress-strain state of periodontal ligament, and finding optimum load for orthodontic tooth movement.

**Key words:** periodontal ligament, tooth root, elliptical hyperboloid, initial displacements, center of resistance, helix.

*Получено 12 сентября 2014*