

Таким образом, статистический и графический анализ временных рядов *GDP* и *ESI* дает основания говорить о построенном индексе экономических настроений как об экономическом опережающем индикаторе. Дальнейшие исследования в данном направлении будут направлены на улучшение прогностических способностей индекса *ESI* за счет расширения множества используемых вопросов.

Литература

1. *Малюгин В. И.* Статистический анализ экономических циклов на основе модели VARX с переключающимися состояниями / В. И. Малюгин // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы Междунар. конф.: в 3 т. Минск, 2014. Т 1. С.122–133.
2. *Directorate-General for Economic and Financial Affairs* The joint harmonised EU programme of business and consumer surveys // European Commission, 2014, P.49.
3. *Крук Д., Коришун А.* Экономический цикл и опережающие индикаторы: методологические подходы и возможности использования в Беларуси // Рабочий материал Исследовательского центра ИПИМ, 2010.
4. *Eurostat* ESS Guidelines on Seasonal Adjustment // Eurostat Methodologies and Working Papers, European Commission, 2009.
5. *Hodrick R., Prescott E.* Postwar U.S. Business Cycles: an Empirical Investigation // Journal of Money and Banking, 1997, V–29(1), P.1–16.
6. *Granger, C.* Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods // Econometrica, 1969, 37, P.424–438.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПРОПУСКАМИ НА ОСНОВЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

С. В. Лобач

ВВЕДЕНИЕ

Модели временных рядов в пространстве состояний часто используются в математической статистике для исследования реальных процессов и явлений в различных областях. Однако, на практике наблюдения часто регистрируются с искажениями.

Одним из типов искажений временных рядов являются пропуски в наблюдениях, когда в некоторые моменты времени по каким-либо причинам отсутствуют данные. Искажения такого типа описаны в [1].

1. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ С ПРОПУСКАМИ

Проблема пропусков в данных возникает в самых различных практических приложениях. Например, участник некоторого социологического исследования отказался отвечать на вопрос интервьюера об одном из изучаемых признаков. В промышленном эксперименте некоторые результаты могут отсутствовать вследствие поломок оборудования. Некоторые данные могут оказаться просто утерянными. По мере накопления задач анализа неполных данных начали возникать методы обработки данных с пропусками. Эти методы можно разделить на 4 группы [1].

- Метод некомплектных объектов.

При отсутствии у некоторых объектов значений каких-либо переменных простым приемом является удаление таких некомплектных объектов из анализа и обработки данных без пропусков. Этот подход легко реализуется и может быть удовлетворительным при малом числе пропусков. Однако часто он приводит к серьезным смещениям в оценках и обычно не эффективен.

- Методы с заполнением.

Пропуски заполняются и полученные полные данные обрабатываются обычными методами. Как правило, используются следующие процедуры: заполнение с (пристрастным) подбором, когда подставляются значения других объектов выборки; заполнение средними, когда подставляются средние присутствующих значений; и заполнение с помощью регрессии, когда пропущенные значения оцениваются с помощью регрессии на присутствующие для анализируемого объекта переменные. Чтобы получить корректные выводы, в стандартные методы анализа следует ввести модификации, позволяющие отличить заполненные пропуски от реальных данных.

- Методы взвешивания.

Взвешивание связано с заполнением средними. Например, если веса плана постоянны в подгруппах выборки, то заполнение пропусков в каждой подгруппе средними подгруппы и взвешивание присутствующих значений с помощью их доли в каждой подгруппе ведут к одинаковым оценкам среднего популяции, хотя оценки выборочной дисперсии различны, если только не используются поправки на заполнение средними.

- Методы, основанные на моделировании.

Широкий класс методов основывается на построении модели порождения пропусков. Выводы получают с помощью функции правдоподобия, построенной при условии справедливости этой модели, с оцениванием параметров методами максимального правдоподобия. Преимуще-

ства такого подхода состоят в том, что он гибок, позволяет отказаться от методов, разработанных для частных случаев (предположения модели, на которых основаны методы, можно рассмотреть и оценить).

В данной работе рассматривается метод, относящийся ко второй группе.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ФОРМЕ МОДЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ И ФИЛЬТР КАЛМАНА

Рассмотрим модель временного ряда в пространстве состояний, определенную уравнениями

$$\begin{aligned}x_t &= F_t x_t + \varepsilon_t, \\y_t &= H_t x_t + \eta_t, t \geq 1,\end{aligned}$$

где $x_t \in R^m$ – вектор, называемый вектором состояний в момент t . Предполагается, что x_t не наблюдается и имеет нормальное распределение $N(\mu, P)$, $\{\varepsilon_t\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных векторов $N(0, Q)$. Матрицы F_t и H_t известны. Первое уравнение модели называется уравнением состояний. Вектор $y_t \in R^n$ наблюдается и называется вектором наблюдений, последовательность $\{\eta_t\}$ является последовательностью независимых в совокупности и независимых от $\{\varepsilon_e\}$ одинаково нормально распределенных случайных векторов $N(0, R)$. Второе уравнение модели называется уравнением наблюдений. Уравнения модели позволяют определить распределение случайного процесса $(x_t, y_t), t \geq 1$, которое в рассматриваемом случае является нормальным.

Проблема оценивания x_t по наблюдениям $\{y_1, \dots, y_t\}$ сводится к численному нахождению условных математических ожиданий

$$\hat{x}_t = E(x_t | y_1, \dots, y_t).$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t|t} &= E(x_t | y_1, \dots, y_t), \\ \hat{x}_{t|t-1} &= E(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}), \\ \sum_{t|t} &= E((x_t - \hat{x}_{t|t})(x_t - \hat{x}_{t|t})^T), \\ V_{t|t-1} &= E((y_t - \hat{y}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})^T), \\ \tilde{y}_t &= y_t - \hat{y}_{t|t-1} = y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1},\end{aligned}$$

т.е. $\hat{x}_{t|t-1}$ и $\hat{y}_{t|t-1}$ являются прогнозными значениями x_t и y_t соответственно. Матрицы $\sum_{t|t}, \sum_{t|t-1}, V_{t|t-1}$ являются ковариационными матрицами ошибок оценивания.

Фильтр Калмана можно записать в следующей удобной форме [2–3]:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t y_t, \\ K_t &= \hat{x}_{t|t-1} + K \tilde{y}_t, \\ K_t &= \Sigma_{t|t-1} H_t^T (H_t \Sigma_{t|t-1} H_t^T + R)^{-1}, \\ \Sigma_{t|t-1} &= (I - K_t H_t) \Sigma_{t|t-1}, \\ \hat{x}_{t+1|t} &= F_t \hat{x}_{t|t}, \\ \Sigma_{t+1|t} &= F_t \Sigma_{t|t} F_t^T + Q, \\ V_{t+1|t} &= H_{t+1} \Sigma_{t+1|t} H_{t+1}^T + R.\end{aligned}$$

Анализ пропущенных наблюдений для некоторых моделей пропусков может быть осуществлен при помощи предлагаемой в работе модификации фильтра Калмана, заключающейся в том, что, если y_t пропущен в момент времени t , то полагаем

$$e_t = y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1} = 0, \quad K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} = 0$$

в уравнениях, определяющих фильтр Калмана.

Согласно [4] проблему прогнозирования значений временного ряда можно рассматривать как проблему пропущенных наблюдений в будущие моменты времени. Пусть требуется предсказать значения временного ряда в моменты времени $T+1, \dots, T+m$ по наблюдениям до момента времени T включительно. Рассматриваем будущие значения временного ряда как пропущенные и применяем предложенный модифицированный фильтр Калмана для пропущенных значений.

3. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве данных для исследования возьмем классический временной ряд, отражающий динамику изменения популяции рыси с 1821 г. по 1934 г. [5]. Для этого временного ряда была построена модель авторегрессии порядка 11 [6]:

$$\begin{aligned}y_t &= 1.0938 y_{t-1} - 0.3571 y_{t-2} - 0.1265 y_{t-4} + 0.3244 y_{t-10} - 0.3622 y_{t-11} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &\sim N(0, 0.04405).\end{aligned}$$

Сведем эту модель к модели временного ряда в пространстве состояний, положив $F_t = I$, где I - единичная матрица размера (11×11) , $\varepsilon_t = 0$, $Q_t = 0$, $H_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-11})$, $R = 0.04405$.

Модель в пространстве состояний примет вид:

$$x_{t+1} = x_t = \theta,$$

$$y_t = H_t x_t + \eta_t,$$

где x_t – вектор размера (11×1) .

Рассматривая последние 14 наблюдений из 114 данных как пропущенные, для их оценивания применим модифицированный фильтр Калмана. Результаты моделирования показывают эффективность данного подхода к решению задачи прогнозирования.

Литература

1. Литтл, Р.Дж.. Статистический анализ данных с пропусками/ Р.Дж. Литтл, Д.Р. Рубин: М. :Финансы и статистика, 1991.
2. Брайсон А., Хо Ю- Ши. Прикладная теория оптимального управления/ F/ А. Брайсон, Хо Ю-Ш: М.: Мир, 1972.
3. Браммер К. Фильтр Калмана-Бьюси /Браммер К., Зиффлинг Г. М.: Наука, 1982.
4. Harvey A State Space and Unobserved Component Models / Harvey A., Koopman S., Shepard N.: Cambridge University Press. 2004.
5. Tong, H. Nonlinear time series /H. Tong.-Oxford: Clanderon Press, 1999.
6. Харин, Ю. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании /Ю.С. Харин – Минск: БГУ, 2008.

РАСЧЕТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ИНДУЦИРОВАННЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

М. Е. Ломакин

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время является актуальной задача управления волновой функцией и энергетическим спектром электрона в поле водородоподобного центра, расположенного вблизи границы раздела двух сред. Особый интерес к этой задаче появился в связи с предложением реализации квантового компьютера на основе доноров фосфора в кремнии, находящихся вблизи границы полупроводник-окисел ([1]).

В большинстве работ, посвященных данной теме, для расчета энергий и волновых функций электрона использовался вариационный принцип. Так, влияние однородного электрического поля на электрон исследовалось ранее в работах [2; 3; 4] с использованием метода Ритца с небольшим размером базиса. Следует однако отметить, что не всегда расчеты, проведенные вариационным методом Ритца, приводили к адекватным оценкам энергий. Так, например, в работе [5] было показано, что погрешность величины энергии связи электрона с донором, найденная в