ПРОБЛЕМА СТРОГОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НА СЕМИНАРАХ ПО ТОПОЛОГИИ

Фролкина О.Д.[1]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

С 2012 года на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова введены новые курсы: «Наглядная геометрия и топология» (для 2 семестра) и «Введение в топологию» (для 3 семестра). Как явствует из названия, первый из этих курсов призван развить геометрическую и топологическую интуицию у студентов. Во втором, более формальном, курсе вводятся и изучаются основные понятия общей топологии и некоторые их применения.

При изучении курса «Введение в топологию» у студентов зачастую возникают следующие вопросы:

1) Мы вводим строгие определения (топологическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизм и т.п.) и должны ими пользоваться при доказательствах. Означает ли это, что топологическое доказательство является строгим лишь тогда, когда оно есть цепочка выводов из этих аксиом и определений? Каков статус «наглядных» рассуждений? Вообще, что такое доказательство и когда его считать строгим?

2) Откуда взялись эти строгие определения? Имели ли они своей основой интуицию? Какова причина выделения именно этих определений и свойств?

3) Многие слышали шутку о том, что два объекта топологически эквивалентны, если, сделав их из резины, можно один из них продеформировать в другой без разрывов, лишь растягивая резину. Какое отношение это имеет к топологии, формально определяемой как семейство подмножеств данного множества с определенными свойствами? Вообще, дает ли формализация второго курса возможность подойти с более строгих позиций к наглядной топологии первого курса?

Наметим сейчас возможные ответы на эти вопросы.

1) В математических доказательствах на разных периодах обучения допустимы разные уровни строгости. Так Анри Пуанкаре отмечал: «Но каким образом мы добились строгости? Путем ограничения в науке роли интуиции и усиления роли формальной логики» [1, с.19]. Теренс Тао в одной из записей своего блога выделяет следующие три уровня строгости обучения математике [2]:

а) уровень «*пред-строгости*»: рассуждения неформальны, интуитивны, основаны на примерах, неясных понятиях и «махании руками».

б) уровень «*строгости*», где учат записывать «правильные» доказательства, например, эпсилон-дельта язык в математическом анализе. Здесь требуется научиться манипулировать абстрактными математическими понятиями.

в) уровень «*после-строгости*», на котором уже усвоены все строгие основания предмета, и есть готовность вернуться и пересмотреть пред-строгую интуицию; этап формирования новой, более глубокой, интуиции, подкрепленной формальными знаниями и умениями. На этом этапе возможно формирование общей картины предмета.

Как пишет профессор В.А. Успенский: «Доказательство – это рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других *с помощью этого же рассуждения*» [3, с.6]. Он считает, что так доказательство понимается всюду, например, не только в математике, но и в истории и филологии. Укажем также, что член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук Е.В. Щепин предлагает проходить курс анализа дважды: сперва на интуитивном уровне, а затем то же самое – на формальном. Таким образом, во втором, формальном, курсе мы должны научить студентов формальным цепочкам выводов утверждений из данных определений. Интуиция при этом должна играть вторичную роль; тем более что уже в этом курсе рассматриваются такие примеры, которые противоречат той интуиции, которая сформировалась в курсе математического анализа. В частности, на семинарах показывается, что привычные определения непрерывности функции по Коши и по Гейне при обобщении на топологические пространства теряют свою равносильность. Поданный соответствующим образом, этот пример производит на студентов сильное впечатление.

2) Желательно, чтобы определения вводились не «с потолка». В идеале, студентам следует предлагать такие специально подобранные задачи, чтобы они переоткрывали теорию или хотя бы некоторые ее разделы. К примеру, при введении Тихоновской топологии на произведении бесконечного количества сомножителей разумно начинать с рассмотрения более простой, и не оказавшейся столь полезной, ящичной топологии. Это очень трудная задача, которая требует и знаний по истории математики; впрочем, есть несколько учебников, основанных на историческом подходе [4–8] (см. также материалы на сайте Давида Брессо [9]).

Голландский ученый Ганс Фройденталь выделяет следующие два подхода к преподаванию математики: Сократовский метод, где «в ходе обучения изучаемое как бы создается или открывается

[1] Работа поддержана Грантом РФФИ, проект 15-01-06302.

заново» и метод «парашютирования» – «идеи падают с ясного неба, как бы спускаясь на парашюте» [10, с.77].

Важно мотивировать каждый изучаемый раздел теории с самого начала. Пауль Халмош пишет: «Я люблю начинать каждый курс, который преподаю, с задачи. В прошлый раз, когда я преподавал вводный курс теории множеств, моим первым предложением было определение алгебраических чисел, а вторым – вопрос: существуют ли числа, не являющиеся алгебраическими» [11].

3) Есть много топологических фактов, которые кажутся очевидными, но их подробное и строгое доказательство сложно. В качестве примеров укажем теорему Жордана о кривой; теорему Радо о триангулируемости компактной поверхности. Более того, есть много конструкций, которые противоречат первоначальной «пред-интуиции»; к примеру, рогатая сфера Александера [12]. Здесь имеется тонкая граница; формирующийся математик должен накопить такие контрпримеры, и сформировать новую интуицию, которая позволит в процессе обучения и исследования выделять верные факты, строгое доказательство которых неинтересно, но может быть проведено. Таково, к примеру, рассуждение, показывающее, что «чашка гомеоморфна бублику» [13, задача 11.27, указание на с.293]: будучи наглядно очевидным (и верным), при попытке формализации и строгого доказательства студент сталкивается со значительными трудностями (Что такое чашка? Как дать строгую конструкцию гомеоморфизма? Если не строить явно гомеоморфизм, то, как применять теорему о классификации поверхностей к 3-мерным телам?).

В наше время в связи с понижением уровня математического образования в средней школе возрастают требования к методике преподавания математики в высшей школе, особенно на первых двух курсах и сами математики, как мне кажется, должны более регулярно обмениваться своими мыслями по этому актуальному вопросу.

Литература

1. Пуанкаре, А. Логика и интуиция в математической науке и преподавании / А. Пуанкаре // Последние работы / А. Пуанкаре. – Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. – С. 19–24.
2. Terence Tao. https://terrytao.wordpress.com/career-advice/there's-more-to-mathematics-than-rigour-and-proofs/
3. Успенский, В.А. Простейшие примеры математических доказательств / В.А. Успенский. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 56 с.
4. Toeplitz, O. The Calculus: A Genetic Approach / O. Toeplitz. – 1963.
5. Bressoud, D. A Radical Approach to Real Analysis / D. Bressoud. – 2-ed. – MAA, 2007.
6. Хайрер, Э. Математический анализ в свете его истории / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Изд-во Научный мир, 2008. – 395 с.
7. Shchepin, E.V. Uppsala Lectures on Calculus. On Euler's footsteps. Topology Atlas, 2003. http://www.pdmi.ras.ru/ ~olegviro/ Shchepin/ index.html
8. Ostermann, A. Geometry by its History / A. Ostermann, G. Wanner. – Springer, 2012.
9. http://www.macalester.edu/~bressoud/index.html
10. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача. Часть 1. Пособие для учителей / Г. Фройденталь. – М.: Просвещение, 1982. – 208 с.
11. Halmos, P.R. The Problem of Learning to Teach / P.R. Halmos, E.E. Moise, George Piranian // Amer. Math. Monthly. – 1975. – Vol. 82, № 5. – P. 466–476.
12. Табачников, С.Л. Математический дивертисмент: 30 лекций по классической математике / С.Л. Табачников, Д.Б. Фукс. – М.: Изд-во МЦНМО, 2011. – 512 с.
13. Виро, О.Я. Элементарная топология / О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. – М.: Изд-во МЦНМО, 2010. – 352 с.