ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО КУРСУ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Расолько Г.А., Третьякова Л.Г.

Белорусский государственный университет, г. Минск

При проведении традиционным способом лабораторных занятий по функциональному анализу рутинная вычислительная работа мешает раскрытию творческого потенциала студентов. Авторы предлагают проводить лабораторные занятия по функциональному анализу с применением компьютеров, при этом, используя возможности систем компьютерной математики Mathcad, Mathematica и др., можно освободить учебное время для более глубокого изучения и понимания рассматриваемого теоретического материала, осуществляя многие вычисления на компьютере.

Рассмотрим примеры, подтверждающие выше сказанное.

Задача 1. Найти спектр интегрального оператора с вырожденным ядром $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ в пространстве $C[a,b]$, если $C[0,\pi/2]$ и $K(t,s)=\sin t + t\cos s$.

Алгоритм решения

- Составим однородное операторное уравнение $(\lambda I - A)x = 0$.
- Сведем полученное операторное уравнение к однородной системе линейных алгебраических уравнений.
- Составим характеристический многочлен $\det(\lambda I - A)$ и найдем решение уравнения $\det(\lambda I - A) = 0$.
- Так как A – линейный компактный оператор, то его спектр состоит из нуля и конечного числа решений уравнения $\det(\lambda I - A) = 0$.

Решение задачи в MathCad

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad a := 0 \qquad b := \frac{\pi}{2}$$

$$K(t,s) := \sin(t) + t\cdot\cos(s)$$

$$f1(t) := \sin(t) \qquad g1(s) := 1 \qquad f2(t) := t \qquad g2(s) := \cos(s)$$

$$M := \begin{bmatrix} \int_a^b g1(s)\cdot(f1(s)\cdot c_1 + f2(s)\cdot c_2)\,ds = \lambda\cdot c_1 \\ \int_a^b g2(s)\cdot(f1(s)\cdot c_1 + f2(s)\cdot c_2)\,ds = \lambda\cdot c_2 \end{bmatrix} \text{solve}, c_1, c_2, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot}{} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\cdot}{} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} := M^{\langle 3\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi^2 - 4\cdot\pi + 8}}{4} \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi^2 - 4\cdot\pi + 8}}{4} \end{pmatrix}$$

Вывод: получен спектр интегрального оператора с вырожденным ядром $\sigma(A) = 0, \lambda_2, \lambda_3$.

Задача 2. Найти в пространстве $C[a,b]$ резольвенту $R(\lambda, A)$ интегрального оператора с вырожденным ядром $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$, где $K(t,s)=\sum_{k=1}^n f_k(t)g_k(s)$ и системы функций $f_k(t),\ g_k(s),\ k=1,2,\ldots,n$, являются линейно независимыми.

Алгоритм решения

- Составим неоднородное интегральное уравнение

$$\lambda x(t) - \int_a^b (f_1(t)g_1(s) + f_2(t)g_2(s))x(s)ds = y(t),$$

где $y(t)$ – произвольная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, $\lambda \notin \sigma(A)$. Так как $\lambda \notin \sigma(A)$, то $\lambda \neq 0$.

- Разделим обе части полученного уравнения на λ и введем обозначения:

$$c_1 = \int_a^b g_1(s)x(s)ds, \quad c_2 = \int_a^b g_2(s)x(s)ds. \qquad (1)$$

- Получим

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} f_1(t)c_1 + \frac{1}{\lambda} f_1(t)c_1 + \frac{1}{\lambda} y(t). \qquad (2)$$

- Подставим выражение (2) в систему (1) и получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения c_1 и c_2, решение которой найдем, например, по формулам Крамера:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\; c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \qquad (3)$$

- Подставим (3) в (2) и запишем формулу для резольвенты $R(\lambda, A)$:

$$R(\lambda, A)\,y(t) = \frac{1}{\lambda} f_1(t)c_1 + \frac{1}{\lambda} f_2(t)c_2 + \frac{1}{\lambda} y(t).$$

Задание. В пространстве $C[0, \pi/2]$ найти резольвенту интегрального оператора с вырожденным ядром при $K(t, s) = \sin t + t\cos s$.

Решение задачи в MathCad

$$K(t,s) := \sin(t) + t\cdot\cos(s) \qquad a := 0 \qquad b := \frac{\pi}{2}$$

$$f1(t) := \sin(t) \qquad g1(s) := 1 \qquad f2(t) := t \qquad g2(s) := \cos(s)$$

$$x(t) := \frac{1}{\lambda}\cdot(f1(t)\cdot c1 + f2(t)\cdot c2 + y(t)) \qquad c1 := \int_a^b g1(s)\cdot x(s)\,ds \qquad c2 := \int_a^b g2(s)\cdot x(s)\,ds$$

$$\int_a^b \frac{g1(s)\cdot y(s)}{\lambda}\,ds + \int_a^b \frac{c1\cdot f1(s)\cdot g1(s)}{\lambda}\,ds + \int_a^b \frac{c2\cdot f2(s)\cdot g1(s)}{\lambda}\,ds = c1$$

$$\int_a^b \frac{g2(s)\cdot y(s)}{\lambda}\,ds + \int_a^b \frac{c1\cdot f1(s)\cdot g2(s)}{\lambda}\,ds + \int_a^b \frac{c2\cdot f2(s)\cdot g2(s)}{\lambda}\,ds = c2$$

Введя обозначения, получим систему:

$$\alpha(g1,a,b) := \int_a^b g1(s)\cdot y(s)\,ds \qquad \beta(g2,a,b) := \int_a^b g2(s)\cdot y(s)\,ds$$

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda}\cdot\int_a^b g1(s)\cdot f1(s)\,ds\right)\cdot c1 - \frac{1}{\lambda}\cdot\int_a^b g1(s)\cdot f2(s)\,ds\cdot c2 = \frac{1}{\lambda}\cdot\alpha(g1,a,b)$$

$$-\frac{1}{\lambda}\cdot\int_a^b f1(s)\cdot g2(s)\,ds\cdot c1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\cdot\int_a^b f2(s)\cdot g2(s)\,ds\right)\cdot c2 = \frac{1}{\lambda}\cdot\beta(g2,a,b)$$

Решим эту систему по формулам Крамера, то есть посчитаем определители: (и т. д. по алгоритму)

Полное решение этой задачи и многих других можно найти в учебно-методических пособиях [1, 2], которые позволяют на начальном этапе воплотить наши предложения в учебном процессе. На современном этапе в связи с бурным внедрением компьютерных технологий во все сферы жизни и, в частности, в учебный процесс, описанный метод обучения может повысить мотивацию студентов по изучению такого не простого предмета как функциональный анализ.

Литература

1. Расолько, Г.А. Использование информационных технологий в курсе вузовской математики. В 3-х частях. Часть 1. Решение задач в пакете MathCad: Учеб.-метод. пособие / Г.А. Расолько, Ю.А. Кремень, Н.В. Бровка, Л.Г. Третьякова. – Минск: БГУ, 2010. – 320 с.

2. Расолько, Г.А. Использование информационных технологий в курсе вузовской математики. В 3-х частях. Часть 2. Решение задач в пакетах MathCad и Mathematica: Учеб.-метод. пособие / Г.А. Расолько, Е.В. Кремень, Ю.А. Кремень, Л.Г. Третьякова. – Минск: БГУ, 2011. – 278 с.