

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОРРЕКТИРОВКИ ПАРАМЕТРОВ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ СЕТЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Л. А. ПИЛИПЧУК¹

¹Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Рассмотрена линейная задача потокового программирования специального вида с неточными данными. Применены принципы обратной оптимизации для корректировки параметров ограничений таким образом, чтобы частично допустимое решение стало ее допустимым решением. Для изменения величин нижних (верхних) границ и значений преобразования дуговых потоков исследована математическая модель обратной задачи в соответствии с выбранной нормой. Получено оптимальное решение обратной задачи, которое определяет изменения параметров нижних и верхних границ и величин преобразования дуговых потоков. Для новых значений данных частично допустимое решение является допустимым решением прямой задачи. Приведен численный пример корректировки параметров нижних (верхних) границ и значений преобразования дуговых потоков в соответствии с выбранной нормой. Полученные результаты могут быть применены для построения допустимых решений сетевых задач линейной оптимизации.

Ключевые слова: линейная задача математического программирования; неточные данные; обратная оптимизация; параметры нижних и верхних границ; параметры преобразования дуговых потоков; недопустимое решение; допустимое решение; норма.

THE INVERSE PROBLEM OF ADJUSTING THE PARAMETERS OF CONSTRAINTS FOR A LINEAR INHOMOGENEOUS PROBLEM OF NETWORK FLOW OPTIMIZATION

L. A. PILIPCHUK^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

The article discusses the linear network flow programming problem of the a special form, the parameters of which are inexact data. We apply the principles of inverse optimization to adjust of parameters in a way that infeasible solution becomes a feasible solution. To change the parameters of the lower (upper) bounds and transformation parameters for the arc flows the mathematical model of the inverse problem in accordance with the selected norm is considered. An optimal solution of the inverse problem, which determines the change in the parameters of the lower and upper bounds and transformation parameters for the arc flows is received. For new parameter values infeasible solution is a feasible solution of the primal problem. A numerical example of adjusting the parameters of the lower (upper) bounds and the transformation parameters arc flows in accordance with the selected norm is considered. The results can be used to build feasible solutions of network problems of linear optimization.

Key words: linear problem of mathematical programming; inexact data; inverse optimization; parameters of lower and upper bounds; transformation parameters for the arc flows; infeasible solution; feasible solution; norm.

Образец цитирования:

Пилипчук Л. А. Обратная задача корректировки параметров ограничений для одной линейной неоднородной задачи сетевой оптимизации // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 1. С. 136–143.

For citation:

Pilipchuk L. A. The inverse problem of adjusting the parameters of constraints for a linear inhomogeneous problem of network flow optimization. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 1. P. 136–143 (in Russ.).

Автор:

Людмила Андреевна Пилипчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Ludmila Pilipchuk, doctor of physics and mathematics; associate professor at the department of computer applications and systems, school of applied mathematics and computer science. pilipchuk@bsu.by

В работах [1–3] представлены математические модели и конструктивные методы построения оптимальных решений неоднородных задач сетевой оптимизации для известных значений параметров. Если некоторые из них являются неточными данными, то применяются принципы обратной оптимизации для изменения параметров ограничений или коэффициентов целевой функции для построения допустимых и оптимальных решений. В публикации [4] впервые рассмотрены принципы обратной оптимизации для исследования задачи кратчайшего пути. В работе [5] применены принципы обратной оптимизации для однородных сетевых задач. Корректировка параметров целевой функции в соответствии с нормой l_1 для транспортной задачи приведена в [6]. В настоящей работе построена математическая модель обратной задачи оптимизации в соответствии с нормой l_1 для корректировки величин нижних (верхних) границ и значений преобразования дуговых потоков. Оптимальное решение обратной задачи определяет изменения (увеличения и уменьшения) параметров прямой задачи. Для новых параметров частично допустимое решение есть допустимое решение линейной неоднородной задачи сетевой оптимизации с взаимосвязью и преобразованием дуговых потоков.

Математическая модель прямой задачи

Рассмотрим мультисеть $G = (I, U)$, где множество мультидуг U определено на $I \times I$ ($|I| < \infty$, $|U| < \infty$). Мультисеть $G = (I, U)$ представим в виде семейства $|K|$ связных сетей $G^k = (I^k, U^k)$, $k = 1, \dots, |K|$. Каждая сеть $G^k = (I^k, U^k)$ соответствует некоторому типу потока k и имеет следующие характеристики: x_{ij}^k – дуговой поток k -го типа по мультидуге $(i, j) \in U$; c_{ij}^k – стоимость перемещения единицы потока k -го типа по мультидуге $(i, j) \in U$. Для каждой мультидуги $(i, j) \in U$ определим множество типов потоков $K(i, j) = \{k \in K : (i, j)^k \in U^k\}$, проходящих через мультидугу (i, j) . Пусть $K_1(i, j) \subseteq K(i, j)$, $(i, j) \in U$. Обозначим через d_{ij}^k пропускную способность дуги $(i, j)^k$ для k -го типа потока, $k \in K_1(i, j)$, и через d_{ij}^0 – суммарную пропускную способность мультидуги (i, j) , $(i, j) \in U_0$, где $U_0 \subseteq U$. Для каждой мультидуги $(i, j) \in U_0$ выполняется неравенство: $|K_0(i, j)| > 1$, где $K_0(i, j) = K(i, j) \setminus K_1(i, j)$, $(i, j) \in U_0$. $I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i, j)^k \in U^k\}$, $I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j, i)^k \in U^k\}$; a_i^k – интенсивность узла i для k -го типа потока. Определим для каждого узла i множество типов потоков $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$, проходящих через узел $i \in I$.

На мультисети $G = (I, U)$ рассмотрим математическую модель линейной неоднородной задачи потокового программирования следующего вида:

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} c_{ij}^k x_{ij}^k \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, \quad i \in I^k, \quad k \in K; \quad (2)$$

$$0 < \mu_{ij}^k \leq 1, \quad k \in K(i, j), \quad (i, j) \in U;$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = a_p, \quad p = \overline{1, l}; \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K_0(i,j)} x_{ij}^k \leq d_{ij}^0, \quad x_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K_0(i, j), \quad (i, j) \in U_0; \quad (4)$$

$$0 < x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, \quad k \in K(i, j), (i, j) \in U; \quad (5)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K(i, j) \setminus K_1(i, j), (i, j) \in U \setminus U_0, \quad (6)$$

где $c_{ij}^k, \lambda_{ij}^{kp}, a_p, d_i^k, d_{ij}^0, d_{ij}^k, \mu_{ij}^k$ – известные параметры задачи (1)–(6). Определим множество Z векторов $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$, $x \in Z$, для которых выполняются ограничения (2)–(6) (множество допустимых решений задачи (1)–(6)). Для $x \in Z$ дуговые потоки $x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$ различных типов являются взаимосвязанными (3) и зависимыми (4), поскольку отдельные типы потоков используют общие мощности мультидуг. Для известных значений параметров в [1–3] разработана конструктивная теория построения оптимальных решений экстремальной задачи (1)–(6), которая основана на принципах декомпозиции ограничений задачи. Применение методов декомпозиции к построению решений неоднородной задачи (1)–(6) направлено также на эффективное решение множества однородных сетевых задач с применением современных достижений в технологии построения их численных решений. Если для заданного вектора $x = (x_{ij}^k \geq 0, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ не выполняются ограничения (2)–(5), $x \notin Z$, то применяются принципы обратной оптимизации для корректировки параметров в соответствии с выбранной нормой.

Математическая модель обратной задачи

Пусть для заданного вектора $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ не выполняются некоторые ограничения прямой задачи (1)–(6), $x \notin Z$. Применим принципы обратной оптимизации для изменения параметров $a_i^k, a_p, d_{ij}^0, d_{ij}^k, \mu_{ij}^k$ в соответствии с нормой l_1 суммы векторов:

$$\begin{aligned} l_1 = & \sum_{k \in K} \sum_{i \in I^k} |\kappa_i^k - \psi_i^k| + \sum_{p=1}^l |\varphi_p - \delta_p| + \sum_{(i,j) \in U_0} |u_{ij} - h_{ij}| + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K_1(i,j)} |m_{ij}^k - n_{ij}^k| + \\ & + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} |\theta_{ij}^k - \gamma_{ij}^k| = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I^k} (\kappa_i^k + \psi_i^k) + \sum_{p=1}^l (\varphi_p + \delta_p) + \sum_{(i,j) \in U_0} (u_{ij} + h_{ij}) + \\ & + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K_1(i,j)} (m_{ij}^k + n_{ij}^k) + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} (\theta_{ij}^k + \gamma_{ij}^k). \end{aligned}$$

Параметры целевой функции (1) и элементы матрицы ограничений (3) не изменяются. Математическая модель задачи для изменения параметров $a_i^k, a_p, d_{ij}^0, d_{ij}^k, \mu_{ij}^k$ в соответствии с нормой l_1 суммы векторов имеет вид

$$\begin{aligned} f(\kappa, \psi, \varphi, \delta, u, h, m, n, \theta, \gamma) = & \sum_{k \in K} \sum_{i \in I^k} (\kappa_i^k + \psi_i^k) + \sum_{p=1}^l (\varphi_p + \delta_p) + \\ & + \sum_{(i,j) \in U_0} (u_{ij} + h_{ij}) + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K_1(i,j)} (m_{ij}^k + n_{ij}^k) + \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} (\theta_{ij}^k + \gamma_{ij}^k) \rightarrow \min; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} (\mu_{ji}^k + \theta_{ji}^k - \gamma_{ji}^k) x_{ji}^k = a_i^k + \kappa_i^k - \psi_i^k, \quad \kappa_i^k \geq 0, \psi_i^k \geq 0, \quad i \in I^k, \quad k \in K, \\ 0 < \mu_{ij}^k + \theta_{ij}^k - \gamma_{ij}^k \leq 1, \quad \theta_{ij}^k \geq 0, \gamma_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K(i, j), (i, j) \in U; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} \lambda_{ij}^k x_{ij}^k = a_p + \varphi_p - \delta_p, \quad \varphi_p \geq 0, \delta_p \geq 0, \quad p = \overline{1, l}; \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K_0(i,j)} x_{ij}^k \leq d_{ij}^0 + u_{ij} - h_{ij}, \quad u_{ij} \geq 0, h_{ij} \geq 0; \quad x_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K_0(i, j), (i, j) \in U_0; \quad (10)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq d_{ij}^k + m_{ij}^k - n_{ij}^k, \quad m_{ij}^k \geq 0, \quad n_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K_1(i, j), \quad (i, j) \in U; \quad (11)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K(i, j) \setminus K_1(i, j), \quad (i, j) \in U. \quad (12)$$

Новые параметры $\tilde{a}_i^k, \tilde{\alpha}_p, \tilde{d}_{ij}^0, \tilde{d}_{ij}^k, \tilde{\mu}_{ij}^k$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i^k &= a_i^k + \kappa_i^k - \psi_i^k, \quad \kappa_i^k \geq 0, \quad \psi_i^k \geq 0, \quad i \in I^k, \quad k \in K; \\ \tilde{\alpha}_p &= \alpha_p + \varphi_p - \delta_p, \quad \varphi_p \geq 0, \quad \delta_p \geq 0, \quad p = \overline{1, l}; \\ \tilde{d}_{ij}^0 &= d_{ij}^0 + u_{ij} - h_{ij}, \quad u_{ij} \geq 0, \quad h_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U_0; \\ \tilde{d}_{ij}^k &= d_{ij}^k + m_{ij}^k - n_{ij}^k, \quad m_{ij}^k \geq 0, \quad n_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K_1(i, j), \quad (i, j) \in U; \\ \tilde{\mu}_{ij}^k &= \mu_{ij}^k + \theta_{ij}^k - \gamma_{ij}^k, \quad \theta_{ij}^k \geq 0, \quad \gamma_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K(i, j), \quad (i, j) \in U. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате минимизации нормы l_1 суммы векторов (7) при ограничениях (8)–(12) для формирования новых параметров (13) получены следующие векторы, компонентами которых являются значения увеличений и уменьшений параметров:

$$\begin{aligned} \kappa &= (\kappa_i^k, i \in I^k, k \in K), \quad \psi = (\psi_i^k, i \in I^k, k \in K), \quad \varphi = (\varphi_p, p = \overline{1, l}), \quad \delta = (\delta_p, p = \overline{1, l}); \\ u &= (u_{ij}, (i, j) \in U_0), \quad h = (h_{ij}, (i, j) \in U_0), \quad m = (m_{ij}^k, k \in K_1(i, j), (i, j) \in U), \\ n &= (n_{ij}^k, k \in K_1(i, j), (i, j) \in U); \\ \theta &= (\theta_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U), \quad \gamma = (\gamma_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U); \\ \kappa_i^k &\geq 0, \quad \psi_i^k \geq 0, \quad i \in I^k, \quad k \in K; \quad \varphi_p \geq 0, \quad \delta_p \geq 0, \quad p = \overline{1, l}; \quad u_{ij} \geq 0, \quad h_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U_0; \\ m_{ij}^k &\geq 0, \quad n_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K_1(i, j), \quad (i, j) \in U; \quad \theta_{ij}^k \geq 0, \quad \gamma_{ij}^k \geq 0, \quad k \in K(i, j), \quad (i, j) \in U. \end{aligned} \quad (14)$$

Значения увеличений и уменьшений (14) каждого параметра не могут быть положительными одновременно. Вектор $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ является допустимым решением задачи вида (1)–(6) для параметров (13), $x \in Z$.

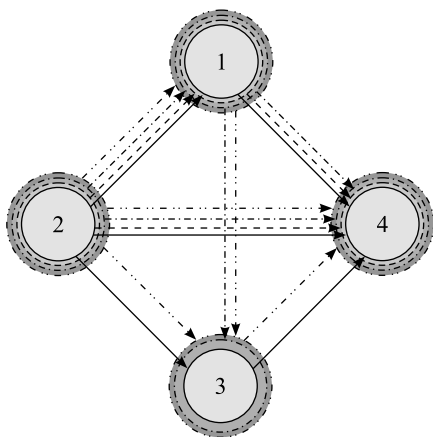
В случае, если величины преобразования дуговых потоков не изменяются, т. е. $\theta_{ij}^k = 0, \gamma_{ij}^k = 0, \tilde{\mu}_{ij}^k = \mu_{ij}^k + \theta_{ij}^k - \gamma_{ij}^k = \mu_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$, решение экстремальной задачи минимизации нормы l_1 суммы векторов (7) при ограничениях (8)–(12) для определения новых параметров нижних и верхних границ очевидно и построение искомого оптимального решения обратной задачи осуществляется следующим образом. По условию задачи нижеприведенные величины определены:

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^k &= \sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k, \quad i \in I^k, \quad k \in K; \quad \bar{\alpha}_p = \sum_{(i, j) \in U} \sum_{k \in K(i, j)} \lambda_{ij}^k x_{ij}^k, \quad p = \overline{1, l}; \\ \bar{d}_{ij}^0 &= \sum_{k \in K_0(i, j)} x_{ij}^k, \quad (i, j) \in U_0; \quad \bar{d}_{ij}^k = x_{ij}^k, \quad k \in K_1(i, j), \quad (i, j) \in U. \end{aligned}$$

Новые параметры нижних и верхних границ ограничений задачи (1)–(6) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i^k &= \bar{a}_i^k, \quad i \in I^k, \quad k \in K; \quad \tilde{\alpha}_p = \bar{\alpha}_p, \quad p = \overline{1, l}; \\ \tilde{d}_{ij}^0 &= \max \{d_{ij}^0, \bar{d}_{ij}^0\}, \quad (i, j) \in U_0; \quad \tilde{d}_{ij}^k = \max \{d_{ij}^k, \bar{d}_{ij}^k\}, \quad k \in K_1(i, j), \quad (i, j) \in U. \end{aligned}$$

Численный пример корректировки значений нижних (верхних) границ и параметров преобразования дуговых потоков

Мультисеть $G = (I, U)$:

$$I = \{1, 2, 3, 4\}, |I| = 4, |U| = 6, |K| = 4$$

Рассмотрим конечную ориентированную связную мультисеть $G = (I, U)$ (рисунок), где I – множество узлов, U – множество мультидуг.

Мультисеть G представляет собой объединение связных обобщенных сетей G^1, G^2, G^3, G^4 . Целевая функция вида (1) для мультисети G , которая изображена на рисунке, имеет вид

$$\begin{aligned} & 3x_{1,3}^3 + 8x_{1,3}^4 + 7x_{1,4}^1 + 10x_{1,4}^2 + 5x_{1,4}^3 + 10x_{2,1}^1 + \\ & + x_{2,1}^2 + 5x_{2,1}^3 + 10x_{2,1}^4 + x_{2,3}^1 + 6x_{2,3}^4 + 9x_{2,4}^1 + \\ & + x_{2,4}^2 + 3x_{2,4}^3 + 10x_{2,4}^4 + 6x_{3,4}^1 + 6x_{3,4}^4 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (15)$$

Для мультисети G , изображенной на рисунке, уравнения вида (2) для обобщенных сетей G^1, G^2 и G^3, G^4 представлены соответственно разреженными системами линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & x_{1,4}^1 - 2x_{2,1}^1 = 0; \\ & x_{2,1}^1 + x_{2,3}^1 + x_{2,4}^1 = 15; \\ & x_{3,4}^1 - \frac{9}{10}x_{2,3}^1 = \frac{16}{5}; \\ & -\frac{3}{5}x_{1,4}^1 - \frac{3}{10}x_{2,4}^1 - \frac{3}{10}x_{3,4}^1 = -\frac{63}{10}; \\ & x_{1,4}^2 - \frac{3}{5}x_{2,1}^2 = -\frac{1}{5}; \\ & x_{2,1}^2 + x_{2,4}^2 = 4; \\ & -\frac{7}{10}x_{1,4}^2 - \frac{1}{2}x_{2,4}^2 = -\frac{17}{10}; \\ & 0 < \mu_{ij}^k \leq 1, (i, j)^k \in \{(2, 1)^1, (2, 3)^1, \\ & (1, 4)^1, (2, 4)^1, (3, 4)^1, (2, 1)^2, (1, 4)^2, (2, 4)^2\}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & x_{1,3}^3 + x_{1,4}^3 - \frac{1}{10}x_{2,1}^3 = \frac{47}{5}; \\ & x_{2,1}^3 + x_{2,4}^3 = 14; \\ & -\frac{1}{2}x_{1,3}^3 = -\frac{7}{2}; \\ & -\frac{1}{10}x_{1,4}^3 - x_{2,4}^3 = -\frac{83}{10}; \\ & x_{1,3}^4 - \frac{3}{10}x_{2,1}^4 = \frac{57}{10}; \\ & x_{2,1}^4 + x_{2,3}^4 + x_{2,4}^4 = 2; \\ & x_{3,4}^4 - \frac{7}{10}x_{1,3}^4 - \frac{4}{5}x_{2,3}^4 = -\frac{16}{5}; \\ & -\frac{4}{5}x_{2,4}^4 - \frac{9}{10}x_{3,4}^4 = -\frac{17}{10}; \\ & 0 < \mu_{ij}^k \leq 1, (i, j)^k \in \{(2, 1)^3, (1, 3)^3, (1, 4)^3, \\ & (2, 4)^3, (2, 1)^4, (1, 3)^4, (2, 3)^4, (2, 4)^4, (3, 4)^4\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения системы (3), отражающие взаимосвязи дуговых потоков $x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j)$, для совокупности обобщенных сетей $G^k, k = 1, 2, 3, 4$, имеют вид

$$\begin{aligned} & 3x_{1,3}^3 + 4x_{1,3}^4 + x_{1,4}^1 + 8x_{2,1}^1 + 5x_{2,1}^2 + 3x_{2,1}^3 + 4x_{2,1}^4 + x_{2,3}^1 + 6x_{2,3}^4 + \\ & + 9x_{2,4}^1 + x_{2,4}^2 + 2x_{2,4}^3 + 9x_{2,4}^4 + 2x_{3,4}^1 + x_{3,4}^4 = 234; \\ & 8x_{1,3}^3 + 8x_{1,3}^4 + 3x_{1,4}^1 + 3x_{1,4}^2 + 7x_{2,1}^1 + 5x_{2,1}^2 + 2x_{2,1}^3 + 7x_{2,1}^4 + 9x_{2,3}^1 + \\ & + 2x_{2,3}^2 + 5x_{2,3}^3 + 4x_{2,3}^4 + 3x_{2,4}^1 + 9x_{2,4}^2 + 4x_{2,4}^3 + 4x_{3,4}^1 = 287. \end{aligned} \quad (18)$$

Система (18) является системой линейных алгебраических уравнений общего вида. Система неравенств вида (4)–(6) для мультисети G , которая изображена на рисунке, имеет вид

$$\begin{aligned} x_{2,1}^3 + x_{2,1}^4 &\leq 8, \quad x_{2,1}^3 \geq 0, \quad x_{2,1}^4 \geq 0, \\ x_{2,4}^1 + x_{2,4}^2 &\leq 15, \quad x_{2,4}^1 \geq 0, \quad x_{2,4}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{1,3}^3 \leq 7, \quad 0 \leq x_{1,4}^1 \leq 10, \quad 0 \leq x_{2,1}^1 \leq 11, \quad 0 \leq x_{2,1}^2 \leq 3, \\ 0 \leq x_{2,3}^1 \leq 7, \quad 0 \leq x_{2,4}^3 \leq 12, \quad 0 \leq x_{2,4}^4 \leq 7, \quad 0 \leq x_{3,4}^4 \leq 8. \end{aligned} \quad (20)$$

$$x_{1,3}^4 \geq 0, \quad x_{1,4}^2 \geq 0, \quad x_{1,4}^3 \geq 0, \quad x_{2,3}^4 \geq 0, \quad x_{3,4}^1 \geq 0. \quad (21)$$

В таблице представлены значения компонент вектора $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$, $x \notin Z$, который не является допустимым мультипотокм экстремальной задачи потокового программирования (15)–(21), поскольку не выполняются некоторые ограничения. Для задачи (15)–(21) построим математическую модель обратной задачи в целях определения изменений параметров $a_i^k, a_p, d_{ij}^0, d_{ij}^k$ нижних и верхних границ и значений $\mu_{ij}^k, k \in K(i, j), (i, j) \in U$, преобразования дуговых потоков для разреженной части матрицы ограничений, для которых вектор x (таблица) является допустимым решением для скорректированной прямой задачи (1)–(6) с новыми значениями параметров ограничений, $x \in Z$.

Компоненты вектора $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$

Дуговой поток	(i, j)					
	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
x_{ij}^1	–	3	3	5	10	5
x_{ij}^2	–	1	2	–	2	–
x_{ij}^3	7	3	9	–	8	–
x_{ij}^4	6	–	1	0	1	1

Представим новые параметры нижних и верхних границ и параметры преобразования дуговых потоков задачи (15)–(21) в следующем виде: $\tilde{a}_i^k = a_i^k + \kappa_i^k - \psi_i^k, i \in I^k, k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$, где $\kappa_i^k \geq 0$ и $\psi_i^k \geq 0$ – увеличение и уменьшение параметра a_i^k ; $\tilde{\alpha}_p = \alpha_p + \phi_p - \delta_p, \phi_p \geq 0, \delta_p \geq 0, p = 1, 2$, где $\phi_p \geq 0$ и $\delta_p \geq 0$ – увеличение и уменьшение параметра α_p ; $\tilde{d}_{ij}^0 = d_{ij}^0 + u_{ij} - h_{ij}$, где $u_{ij} \geq 0$ и $h_{ij} \geq 0$ – увеличение и уменьшение параметра $d_{ij}^0, (i, j) \in U_0 = \{(2, 1), (2, 4)\}$; $\tilde{d}_{ij}^k = d_{ij}^k + m_{ij}^k - n_{ij}^k$, где $m_{ij}^k \geq 0$ и $n_{ij}^k \geq 0$ – увеличение и уменьшение параметра $d_{ij}^k, (i, j)^k \in \{(1, 3)^3, (1, 4)^1, (2, 1)^1, (2, 1)^2, (2, 3)^1, (2, 4)^3, (2, 4)^4, (3, 4)^4\}$; $\tilde{\mu}_{ij}^k = \mu_{ij}^k + \theta_{ij}^k - \gamma_{ij}^k$, где $\theta_{ij}^k \geq 0$ и $\gamma_{ij}^k \geq 0$ – увеличение и уменьшение каждого параметра μ_{ij}^k преобразования дугового потока для дуг обобщенных сетей $G^k, k = 1, 2, 3, 4$. Значения увеличения и уменьшения каждого параметра не могут быть одновременно положительными.

Математическая модель обратной задачи для нахождения изменений нижних и верхних границ и параметров преобразования дуговых потоков экстремальной задачи (15)–(21) имеет следующий вид:

$$\sum_{k \in K = \{1, 3, 4\}} \sum_{i=1, 2, 3, 4} (\kappa_i^k + \psi_i^k) + \sum_{i=1, 2, 4} (\kappa_i^2 + \psi_i^2) + \sum_{p=1}^2 (\phi_p + \delta_p) + (u_{2,1} + h_{2,1}) + (u_{2,4} + h_{2,4}) +$$

$$\begin{aligned}
& + (m_{1,3}^3 + n_{1,3}^3) + (m_{1,4}^1 + n_{1,4}^1) + (m_{2,3}^1 + n_{2,3}^1) + (m_{3,4}^4 + n_{3,4}^4) + \\
& + \sum_{k=1,2} (m_{2,1}^k + n_{2,1}^k) + \sum_{k=3,4} (m_{2,4}^k + n_{2,4}^k) + \sum_{k \in K = \{1,2,3,4\}} \sum_{(i,j)^k \in U^k} (\theta_{ij}^k + \gamma_{ij}^k) \rightarrow \min;
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& x_{14}^1 - (2 + \theta_{2,1}^1 - \gamma_{2,1}^1) x_{21}^1 = \kappa_1^1 - \psi_1^1, \quad \kappa_1^1 \geq 0, \quad \psi_1^1 \geq 0, \quad \theta_{2,1}^1 \geq 0, \quad \gamma_{2,1}^1 \geq 0, \\
& x_{2,1}^1 + x_{2,3}^1 + x_{2,4}^1 = 15 + \kappa_2^1 - \psi_2^1, \quad \kappa_2^1 \geq 0, \quad \psi_2^1 \geq 0, \\
& x_{3,4}^1 - \left(\frac{9}{10} + \theta_{2,3}^1 - \gamma_{2,3}^1 \right) x_{2,3}^1 = \frac{16}{5} + \kappa_3^1 - \psi_3^1, \quad \kappa_3^1 \geq 0, \quad \psi_3^1 \geq 0, \quad \theta_{2,3}^1 \geq 0, \quad \gamma_{2,3}^1 \geq 0, \\
& - \left(\frac{3}{5} + \theta_{1,4}^1 - \gamma_{1,4}^1 \right) x_{1,4}^1 - \left(\frac{3}{10} + \theta_{2,4}^1 - \gamma_{2,4}^1 \right) x_{2,4}^1 - \left(\frac{3}{10} + \theta_{3,4}^1 - \gamma_{3,4}^1 \right) x_{3,4}^1 = -\frac{63}{10} + \kappa_4^1 - \psi_4^1, \\
& \kappa_4^1 \geq 0, \quad \psi_4^1 \geq 0, \quad \theta_{1,4}^1 \geq 0, \quad \gamma_{1,4}^1 \geq 0, \quad \theta_{2,4}^1 \geq 0, \quad \gamma_{2,4}^1 \geq 0, \quad \theta_{3,4}^1 \geq 0, \quad \gamma_{3,4}^1 \geq 0;
\end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& x_{14}^2 - \left(\frac{3}{5} + \theta_{2,1}^2 - \gamma_{2,1}^2 \right) x_{2,1}^2 = -\frac{1}{5} + \kappa_1^2 - \psi_1^2, \quad \kappa_1^2 \geq 0, \quad \psi_1^2 \geq 0, \quad \theta_{2,1}^2 \geq 0, \quad \gamma_{2,1}^2 \geq 0, \\
& x_{2,1}^2 + x_{2,4}^2 = 4 + \kappa_2^2 - \psi_2^2, \quad \kappa_2^2 \geq 0, \quad \psi_2^2 \geq 0, \\
& - \left(\frac{7}{10} + \theta_{1,4}^2 - \gamma_{1,4}^2 \right) x_{1,4}^2 - \left(\frac{1}{2} + \theta_{2,4}^2 - \gamma_{2,4}^2 \right) x_{2,4}^2 = -\frac{17}{10} + \kappa_4^2 - \psi_4^2, \quad \kappa_4^2 \geq 0, \quad \psi_4^2 \geq 0 \\
& \theta_{1,4}^2 \geq 0, \quad \gamma_{1,4}^2 \geq 0, \quad \theta_{2,4}^2 \geq 0, \quad \gamma_{2,4}^2 \geq 0;
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& x_{1,3}^3 + x_{1,4}^3 - \left(\frac{1}{10} + \theta_{2,1}^3 - \gamma_{2,1}^3 \right) x_{2,1}^3 = \frac{47}{5} + \kappa_1^3 - \psi_1^3, \quad \kappa_1^3 \geq 0, \quad \psi_1^3 \geq 0, \quad \theta_{2,1}^3 \geq 0, \quad \gamma_{2,1}^3 \geq 0, \\
& x_{2,1}^3 + x_{2,4}^3 = 14 + \kappa_2^3 - \psi_2^3, \quad \kappa_2^3 \geq 0, \quad \psi_2^3 \geq 0, \\
& - \left(\frac{1}{2} + \theta_{1,3}^3 - \gamma_{1,3}^3 \right) x_{1,3}^3 = -\frac{7}{2} + \kappa_3^3 - \psi_3^3, \quad \kappa_3^3 \geq 0, \quad \psi_3^3 \geq 0, \quad \theta_{1,3}^3 \geq 0, \quad \gamma_{1,3}^3 \geq 0, \\
& - \left(\frac{1}{10} + \theta_{1,4}^3 - \gamma_{1,4}^3 \right) x_{1,4}^3 - \left(1 + \theta_{2,4}^3 - \gamma_{2,4}^3 \right) x_{2,4}^3 = -\frac{83}{10} + \kappa_4^3 - \psi_4^3, \\
& \kappa_4^3 \geq 0, \quad \psi_4^3 \geq 0, \quad \theta_{1,4}^3 \geq 0, \quad \gamma_{1,4}^3 \geq 0, \quad \theta_{2,4}^3 \geq 0, \quad \gamma_{2,4}^3 \geq 0;
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& x_{13}^4 - \left(\frac{3}{10} + \theta_{2,1}^4 - \gamma_{2,1}^4 \right) x_{2,1}^4 = \frac{57}{10} + \kappa_1^4 - \psi_1^4, \quad \kappa_1^4 \geq 0, \quad \psi_1^4 \geq 0, \quad \theta_{2,1}^4 \geq 0, \quad \gamma_{2,1}^4 \geq 0, \\
& x_{2,1}^4 + x_{2,3}^4 + x_{2,4}^4 = 2 + \kappa_2^4 - \psi_2^4, \quad \kappa_2^4 \geq 0, \quad \psi_2^4 \geq 0, \\
& x_{3,4}^4 - \left(\frac{7}{10} + \theta_{1,3}^4 - \gamma_{1,3}^4 \right) x_{1,3}^4 - \left(\frac{4}{5} + \theta_{2,3}^4 - \gamma_{2,3}^4 \right) x_{2,3}^4 = -\frac{16}{5} + \kappa_3^4 - \psi_3^4, \\
& \kappa_3^4 \geq 0, \quad \psi_3^4 \geq 0, \quad \theta_{1,3}^4 \geq 0, \quad \gamma_{1,3}^4 \geq 0, \quad \theta_{2,3}^4 \geq 0, \quad \gamma_{2,3}^4 \geq 0, \\
& - \left(\frac{4}{5} + \theta_{2,4}^4 - \gamma_{2,4}^4 \right) x_{2,4}^4 - \left(\frac{9}{10} + \theta_{3,4}^4 - \gamma_{3,4}^4 \right) x_{3,4}^4 = -\frac{17}{10} + \kappa_4^4 - \psi_4^4, \\
& \kappa_4^4 \geq 0, \quad \psi_4^4 \geq 0, \quad \theta_{2,4}^4 \geq 0, \quad \gamma_{2,4}^4 \geq 0, \quad \theta_{3,4}^4 \geq 0, \quad \gamma_{3,4}^4 \geq 0;
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
& 3x_{1,3}^3 + 4x_{1,3}^4 + x_{1,4}^1 + 8x_{2,1}^1 + 5x_{2,1}^2 + 3x_{2,1}^3 + 4x_{2,1}^4 + x_{2,3}^1 + 6x_{2,3}^4 + \\
& + 9x_{2,4}^1 + x_{2,4}^2 + 2x_{2,4}^3 + 9x_{2,4}^4 + 2x_{3,4}^1 + x_{3,4}^4 = 234 + \varphi_1 - \delta_1, \quad \varphi_1 \geq 0, \quad \delta_1 \geq 0,
\end{aligned}$$

$$8x_{1,3}^3 + 8x_{1,3}^4 + 3x_{1,4}^1 + 3x_{1,4}^2 + 7x_{2,1}^1 + 5x_{2,1}^2 + 2x_{2,1}^3 + 7x_{2,3}^1 + 9x_{2,3}^4 + 2x_{2,4}^1 + 5x_{2,4}^2 + 4x_{2,4}^3 + 3x_{2,4}^4 + 9x_{3,4}^1 + 4x_{3,4}^4 = 287 + \varphi_2 - \delta_2, \quad \varphi_2 \geq 0, \quad \delta_2 \geq 0; \quad (27)$$

$$x_{2,1}^3 + x_{2,1}^4 \leq 8 + u_{2,1} - h_{2,1}, \quad x_{2,1}^3 \geq 0, \quad x_{2,1}^4 \geq 0, \quad u_{2,1} \geq 0, \quad h_{2,1} \geq 0, \quad (28)$$

$$x_{2,4}^1 + x_{2,4}^2 \leq 15 + u_{2,4} - h_{2,4}, \quad x_{2,4}^1 \geq 0, \quad x_{2,4}^2 \geq 0, \quad u_{2,4} \geq 0, \quad h_{2,4} \geq 0;$$

$$0 \leq x_{1,3}^3 \leq 7 + m_{1,3}^3 - n_{1,3}^3, \quad m_{1,3}^3 \geq 0, \quad n_{1,3}^3 \geq 0, \quad 0 \leq x_{1,4}^1 \leq 10 + m_{1,4}^1 - n_{1,4}^1, \quad m_{1,4}^1 \geq 0, \quad n_{1,4}^1 \geq 0, \quad (29)$$

$$0 \leq x_{2,1}^1 \leq 11 + m_{2,1}^1 - n_{2,1}^1, \quad m_{2,1}^1 \geq 0, \quad n_{2,1}^1 \geq 0, \quad 0 \leq x_{2,1}^2 \leq 3 + m_{2,1}^2 - n_{2,1}^2, \quad m_{2,1}^2 \geq 0, \quad n_{2,1}^2 \geq 0,$$

$$0 \leq x_{2,3}^1 \leq 7 + m_{2,3}^1 - n_{2,3}^1, \quad m_{2,3}^1 \geq 0, \quad n_{2,3}^1 \geq 0, \quad 0 \leq x_{2,4}^3 \leq 12 + m_{2,4}^3 - n_{2,4}^3, \quad m_{2,4}^3 \geq 0, \quad n_{2,4}^3 \geq 0,$$

$$0 \leq x_{2,4}^4 \leq 7 + m_{2,4}^4 - n_{2,4}^4, \quad m_{2,4}^4 \geq 0, \quad n_{2,4}^4 \geq 0, \quad 0 \leq x_{3,4}^4 \leq 8 + m_{3,4}^4 - n_{3,4}^4, \quad m_{3,4}^4 \geq 0, \quad n_{3,4}^4 \geq 0;$$

$$x_{1,3}^4 \geq 0, \quad x_{1,4}^2 \geq 0, \quad x_{1,4}^3 \geq 0, \quad x_{2,3}^4 \geq 0, \quad x_{3,4}^1 \geq 0; \quad (30)$$

$$0 < \mu_{ij}^k + \theta_{ij}^k + \gamma_{ij}^k \leq 1, \quad (i, j)^k \in U^k, \quad k \in K = \{1, 2, 3, 4\}, \quad (31)$$

где $U^k, k \in K = \{1, 2, 3, 4\}$, – множества дуг связных обобщенных сетей G^1, G^2, G^3, G^4 (см. рисунок).

В результате решения обратной задачи (22)–(31) получены значения увеличений и уменьшений нижних и верхних границ и величин преобразования дуговых потоков задачи (15)–(21). Приведем ненулевые значения изменений параметров:

$$\kappa_2^1 = 3, \quad \psi_3^1 = \frac{27}{10}, \quad \psi_1^3 = \frac{3}{10}, \quad \kappa_2^3 = 3, \quad \varphi_1 = 12, \quad \varphi_2 = 6, \quad u_{2,1} = 2, \quad \gamma_{2,1}^1 = 1. \quad (32)$$

С учетом ненулевых значений изменений параметров (32) вычислим значения новых параметров экстремальной задачи (15)–(21):

$$\tilde{a}_2^1 = a_2^1 + \kappa_2^1 = 18, \quad \tilde{a}_3^1 = a_3^1 - \psi_3^1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{a}_1^3 = a_1^3 - \psi_1^3 = \frac{91}{10}, \quad \tilde{a}_2^3 = a_2^3 + \kappa_2^3 = 17, \quad (33)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \varphi_1 = 246, \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varphi_2 = 293, \quad \tilde{d}_{2,1}^0 = d_{2,1}^0 + u_{2,1} = 10, \quad \tilde{\mu}_{2,1}^1 = \mu_{2,1}^1 - \gamma_{2,1}^1 = 1.$$

Остальные параметры экстремальной задачи (15)–(21) не изменяются. Если в задаче (15)–(21) заменить параметры нижних и верхних границ и параметры преобразования дуговых потоков на новые значения (33), то вектор x (см. таблицу) является допустимым решением задачи (15)–(21), $x \in Z$.

Таким образом, в соответствии с нормой l_1 построена математическая модель обратной задачи для нахождения изменений величин нижних и верхних границ и параметров преобразования дуговых потоков в линейной неоднородной задаче сетевой оптимизации с взаимосвязью потоков различных типов. Получено оптимальное решение обратной задачи, которое определяет изменения параметров ограничений прямой задачи. В результате корректировки параметров нижних (верхних) границ и значений преобразования дуговых потоков вектор $x = (x_{ij}^k, (i, j) \in U, k \in K(i, j))$ является допустимым решением прямой задачи, $x \in Z$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (REFERENCES)

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования : в 3 ч. Минск, 1980. Ч. 3 : Специальные задачи.
2. Пилипчук Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования. Минск, 2009.
3. Пилипчук Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск, 2012.
4. Burton D., Toint Ph. L. On an instance of the inverse shortest paths problem // Math. Program. 1992. Vol. 53, № 1. P. 45–61 [Burton D., Toint Ph. L. On an instance of the inverse shortest paths problem. *Math. Program.* 1992. Vol. 53, No. 1. P. 45–61 (in Engl.)].
5. Ahuja R. K., Orlin J. B. Inverse optimization // Oper. Res. 2001. Vol. 49, № 5. P. 771–783 [Ahuja R. K., Orlin J. B. Inverse optimization. *Oper. Res.* 2001. Vol. 49, No. 5. P. 771–783 (in Engl.)].
6. Jain S., Arya N. An Inverse Capacitated Transportation Problem // IOSR J. of Math. 2013. Vol. 5, № 4. P. 24–27 [Jain S., Arya N. An Inverse Capacitated Transportation Problem. *IOSR J. of Math.* 2013. Vol. 5, No. 4. P. 24–27 (in Engl.)].

Статья поступила в редколлегию 10.06.2015.
Received by editorial board 10.06.2015.