



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД
ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ**

Журавков М.А., Круподеров А.В.

Белорусский государственный университет, Республика Беларусь, Минск, Независимости 4

РЕЗЮМЕ

В данной статье приведены решения задач о воздействии нагрузки на породный массив. Статья состоит из двух частей. В первой части приводится аналитическое решение о воздействии кусочно-однородной поверхностной нагрузки, распределенной по многоугольной области, на упругое изотропное полупространство. Метод решения основывается на использовании известных фундаментальных решений Буссинеска и Черутти. Во второй части статьи приводится квазианалитическое решение задачи о воздействии поверхностной нагрузки на упругий трансверсально-изотропный породный массив, основанное на использовании преобразования Фурье. Данные решения могут быть использованы при оценке напряженно-деформированного состояния породного массива от воздействия различных поверхностных сооружений.

**DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF ROCK MASSIVE CAUSED BY ACTION OF
DISTRIBUTED ON ITS SURFACE LOADING**

Zhuravkov M.A., Krupoderov A.V.

ABSTRACT

There are two problems are solved in this work. In the first part of work we derived analytic solution for stress-strain components of elastic isotropic half-space caused by distributed on its surface loading. The method is based on well known Boussinesq and Cerrutti solutions. The second part of work deal with solution of determination stress-strain state of elastic transversely-isotropic layer, which is based on rigid foundation and subjected to a distributed surface loading. The method of obtaining solution is based on using Fourier transform.

**Аналитическое решение задачи о воздействии распределенной нагрузки на упругое
полупространство**

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке $m(x,y,z)$ полупространства (при $z \geq 0$) при действии на его поверхности усилий $p(x,y)$ может быть выполнен численно с использованием функций влияния из

фундаментального решения задачи Буссинеска и Черутти о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [1-6].

Вместе с тем, необходимо учитывать тот факт, что на поверхности полупространства расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ путем численного интегрирования является весьма затруднительным. Это обусловлено тем, что для точек $z=0$ поверхности полупространства в силу наличия особенности в точке приложения единичной нагрузки расчеты, проводимые с помощью различных методов численного интегрирования, сходятся достаточно медленно. В связи с этим результаты расчетов плохо соответствуют известным решениям в некоторых подобластях поверхности полупространства.

В данной работе приводится алгоритм построения аналитического решения задачи определения напряженно- деформированного состояния (НДС) упругого изотропного полупространства, вызванного действием нагрузки, распределенной по его поверхности.

Построим процедуру аналитического решения модельной задачи для определения НДС в произвольной точке $m(x,y,z)$ при $z \geq 0$, основанную на решении для случая нагрузки, равномерно распределенной по треугольной области [2,7,8]. Общая схема решения задачи представлена на рисунке 1.

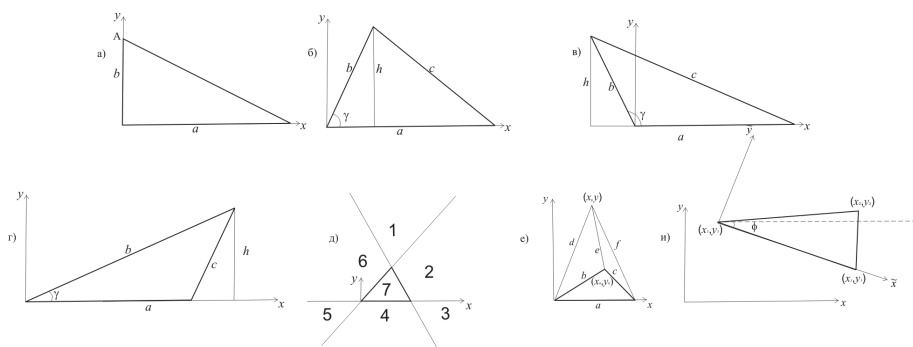


Рис. 1. Общая схема к решению модельной задачи

1. Вначале рассматриваем случай действия однородной нагрузки интенсивности p , распределенной по области, представляющей собой прямоугольный треугольник (рис. 1.а).

Используя компоненты фундаментального решения Буссинеска и Черутти, путем интегрирования определяем компоненты НДС на вертикальной прямой, проходящей через точку а:

$$F_{0i}(a,b,z) = \int_0^b \int_0^{a-bx} p f_i(-x, a-y, z) dy dx, i = x, y, z.$$



Здесь F_{0x}, F_{0y}, F_{0z} – компоненты НДС в искомой точке, вызванные нагрузкой, приложенной вдоль соответствующей оси, а $f_x(x, y, z), f_y(x, y, z)$ – компоненты решения Черутти, $f_z(x, y, z)$ – компонента решения Буссинеска. Вид компонент F_{0i} приведен в [7].

2. Построение формул для вычисления НДС в вершине произвольного треугольника.

Без ограничения общности можно считать, что одна из сторон треугольника совпадает с осью x , а требуемая вершина лежит в верхней полуплоскости. Пусть длина нижней стороны равна a . В соответствии с формой треугольника, возможны три случая взаимного расположения вершины и нижней стороны треугольника (рис.1.б, 1.в, 1.г).

В итоге, выражения для определения компонент НДС в вершине произвольного треугольника в каждом из трех случаев выписываются следующим образом:

1.б)

$$F_{1x}(a, b, c, z) = -\tilde{F}_{0x}(h, b \cos \gamma, z) + F_{0x}(h, a - b \cos \gamma, z)$$
$$F_{1i}(a, b, c, z) = \tilde{F}_{0i}(h, b \cos \gamma, z) + F_{0i}(h, a - b \cos \gamma, z), i = y, z$$

1.в)

$$F_{1i}(a, b, c, z) = F_{0i}(h, a + b \cos(\pi - \gamma), z) - F_{0i}(h, b \cos(\pi - \gamma), z)$$

1.г)

$$F_{1x}(a, b, c, z) = -\tilde{F}_{0x}(h, b \cos \gamma, z) + \tilde{F}_{0x}(h, b \cos \gamma - a, z)$$
$$F_{1i}(a, b, c, z) = \tilde{F}_{0i}(h, b \cos \gamma, z) - \tilde{F}_{0i}(h, b \cos \gamma - a, z), i = y, z,$$

Где F_1 – одна из компонент НДС, а \tilde{F}_0 – компонента тензора /вектора F_0 в системе координат (x, y) , полученная путем преобразования соответствующей компоненты по правилу преобразования тензора/вектора при замене координат: $\tilde{x} = -x, \tilde{y} = y$ (обратный знак во всех компонентах x объясняется тем, что в новой системе координат направление силы меняется на противоположное).

3. Следующим шагом является вычисление НДС в верхнем (относительно связанной с треугольником системе координат) угле произвольно расположенного треугольника (рис 1.и, положительное направление угла отсчитывается против часовой стрелки):

Компоненты НДС в верхнем угле произвольно расположенного треугольника выражаются следующим образом:

$$F_{2x}(a, b, c, x_0, y_0, x_1, y_1, z) = \tilde{F}_{1x}(a, b, c, z) \cos \varphi - \tilde{F}_{1y}(a, b, c, z) \sin \varphi$$
$$F_{2y}(a, b, c, x_0, y_0, x_1, y_1, z) = \tilde{F}_{1x}(a, b, c, z) \sin \varphi + \tilde{F}_{1y}(a, b, c, z) \cos \varphi$$
$$F_{2z}(a, b, c, x_0, y_0, x_1, y_1, z) = \tilde{F}_{1z}(a, b, c, z),$$



Где $\tilde{F}_1(a, b, c, z)$ - компонента тензора/вектора F_1 в системе координат (x, y) , полученная путем преобразования соответствующей компоненты по правилу преобразования вектора или тензора при замене координат (1)

$$\tilde{x} = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \tilde{y} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \varphi = \arg(x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0)). \quad (1)$$

4. Вычисление НДС в произвольной точке полупространства от действия однородной нагрузки, распределенной по треугольной области, одна из сторон которого совпадает с осью x . Решение в данном случае строится на основе предыдущего путем суперпозиции решений. Для этого все полупространство разбивается на соответствующие треугольные области как показано на рисунке 1.д. Далее, для каждой из этих областей соответствующим образом достраиваются треугольники так, чтобы рассматриваемая точка была вершиной угла каждого из них. Дальнейший процесс построения решения рассмотрим на примере первой области (рис. 1.е). Для каждой компоненты НДС получаем:

$$F_{3i}(a, b, c, x, y, z) = F_{2i}(a, d, f, 0, 0, a, 0, z) - F_{2i}(b, d, e, x_0, y_0, a, 0, z) - F_{2i}(c, e, f, x_0, y_0, a, 0, z), \Gamma$$

где a, b, c – стороны треугольника, $f = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, $e = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, (x, y) – координаты расчетной точки, (x_0, y_0) – координаты верхнего угла треугольника.

5. Определение НДС в точках $m(x, y, z)$, $z \geq 0$, массива, моделируемого как полупространство, в случае действия поверхностной нагрузки по площади, представляющей собой произвольный треугольник (рис 1.и). Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ – координаты вершин треугольника. Тогда, обобщая процедуры построения решения для предыдущих случаев, для компонент НДС в рассматриваемом варианте можно записать:

$$F_{4i}(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x, y, z) = \tilde{F}_{3i}(a, b, c, \tilde{x}, \tilde{y}, z), \quad (*)$$

где

$$(a, b, c) = \begin{cases} \left(\text{dist}(x_1, y_1, x_3, y_3), \text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2), \text{dist}(x_2, y_2, x_3, y_3) \right), & \left| \frac{x_3 - x_1, y_3 - y_1}{x_2 - x_1, y_2 - y_1} \right| > 0, \\ \left(\text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2), \text{dist}(x_1, y_1, x_3, y_3), \text{dist}(x_2, y_2, x_3, y_3) \right), & \left| \frac{x_3 - x_1, y_3 - y_1}{x_2 - x_1, y_2 - y_1} \right| < 0. \end{cases}$$

$$\text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

В (*) $\tilde{F}_3(a, b, c, \tilde{x}, \tilde{y}, z)$ – компонента тензора/вектора F_3 НДС в системе координат (x, y) , полученная путем преобразования соответствующей компоненты по правилу преобразования вектора или тензора при следующей замене:

$$\tilde{x} = (x - x_1) \cos \varphi + (y - y_1) \sin \varphi, \tilde{y} = -(x - x_1) \sin \varphi + (y - y_1) \cos \varphi,$$



Таким образом, построена методика получения точного аналитического решения для расчета компонент НДС в точках $m(x,y,z)$, $z \geq 0$, породного массива, моделируемого как полупространство, в случае действия на границе полупространства однородной нагрузки, распределенной по любой треугольной области.

Следующим шагом является построение процедуры определения НДС в полупространстве от воздействия произвольной нагрузки, распределенной по произвольной области. Для этого область действия нагрузки интерполируется соответствующей триангуляционной поверхностью. Сделать это можно, например, с помощью имеющихся в открытом распространении программ. Так, нами использовалась программа triangle.exe [9]. Нагрузка, действующая в пределах каждого треугольника, интерполируется однородной нагрузкой с величиной исходной нагрузки в точке, совпадающей с центром данного треугольника. Следует отметить, что при разбиении области обязательно необходимо учитывать, что в местах с большими градиентами нагрузки требуется более мелкое разбиение. Результирующее НДС в исследуемой точке полупространства получается как суперпозиция всех НДС в данной точке от нагрузок, действующих по каждому из треугольников. Очевидно, что чем мельче разбиение исходной области, тем более точным получается окончательное решение.

В качестве примера эффективности работы предложенного алгоритма рассмотрим воздействие на полупространство нагрузки, область действия которой представляет собой эллипс, а интенсивность

нагрузки описывается следующим выражением:
$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} .$$

Точные решения для напряжений σ_{xx}, σ_{yy} на координатных осях ox и oy внутри области приложения нагрузки (при построении графиков для продолжения этих решений за область приложения нагрузки использовалось численное интегрирование), а также для напряжения σ_{zz} на оси oz приведены в [2, 3]. Поэтому имеется возможность сравнить решения, полученные на основе предложенных в данной работе подходов, с точными решениями.

Далее приведены результаты расчетов для случая, когда соотношение полуосей эллипса b/a равно 0.5 (сплошные линии – полученное решение, пунктирные линии – известные точные решения для соответствующих подобластей полупространства).

Анализ графиков рисунка 2 показывает практически полное соответствие полученного решения известным точным решениям. Следует отметить, что наибольшая погрешность не превышает 4,5 % и может быть уменьшена за счет увеличения плотности треугольников в расчетной области.

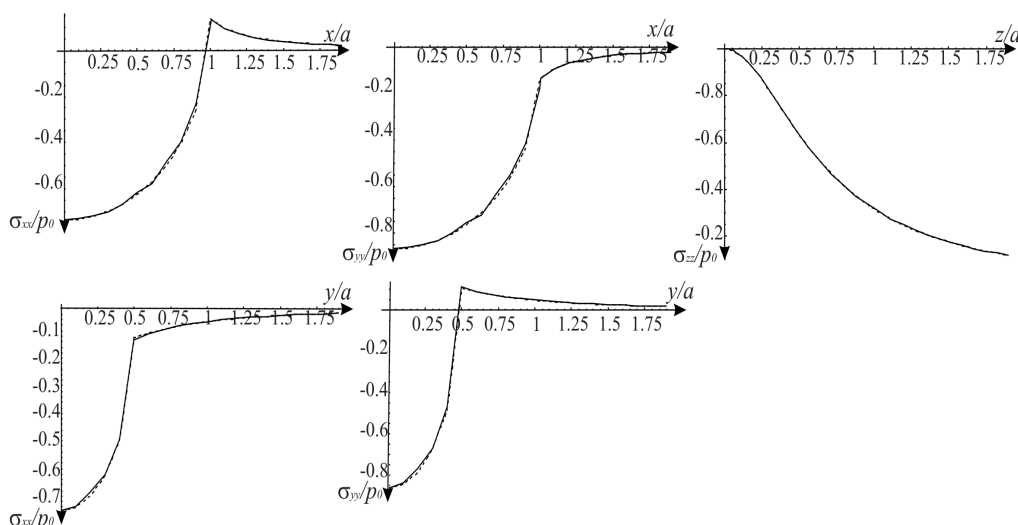


Рис. 2. Графики безразмерных напряжений на осях координат

Квазианалитическое решение задачи о воздействии поверхностной нагрузки на многослойный трансверсально-изотропный массив

Рассмотрим теперь задачу в более общей постановке: воздействие поверхностной нагрузки на многослойный трансверсально-изотропный массив. Отметим, что такая задача исследовалась многими авторами [10,11]. К сожалению, для рассматриваемой задачи построить точное аналитическое решение не удастся. Далее описывается подход построения полуаналитического решения.

Приведем решение задачи о слое толщины h , покоящемся на жестком и упругом основании, на который воздействует нормальная нагрузка, распределенная по верхней границе слоя. Будем предполагать, что массовые силы отсутствуют. Используем следующие обозначения:

$$s_i = \sqrt{\frac{(C - c_{13})(C + c_{13} + 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}} + (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{(C + c_{13})(C - c_{13} - 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}}, i = \overline{1,2},$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}, C = \sqrt{c_{11}c_{33}}, k_{3i} = \frac{\alpha_i + s_i}{s_i^2}, k_{2i} = \frac{c_{33}\alpha_i s_i - c_{13}}{c_{66}}, \alpha_i = \frac{c_{11} - c_{44}s_i^2}{(c_{13} + c_{44})s_i^2}.$$

Здесь c_{ij} - матрица упругих констант для трансверсально-изотропного массива [12].

Для нахождения решения поставленной задачи воспользуемся методом, описанным в [12]. Для этого представим перемещения через квазигармонические функции, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_i = 0, z_i = s_i z, (i = 1,2,3),$$

а также системе граничных условий:



$$\begin{cases} \sigma_{xz}^F|_{z=0} = 0, \sigma_{yz}^F|_{z=0} = 0, \sigma_{zz}^F|_{z=0} = q^F(w_1, w_2), \\ \alpha \sigma_{xz}^F|_{z=h} + \beta u^F|_{z=h} = 0, \alpha \sigma_{yz}^F|_{z=h} + \beta v^F|_{z=h} = 0, w^F|_{z=h} = 0, \end{cases}$$

Для решения выписанной системы уравнений применим преобразование Фурье по переменным x, y . Тогда получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для трансформант функций φ_i : $\frac{d^2 \varphi_i^F}{dz^2} = s_i^2 w^2 \varphi_i^F$, где $w^2 = w_1^2 + w_2^2$. Общее решение этих уравнений можно записать в следующем виде:

$$\varphi_i = C_{1i} e^{s_i w} + C_{2i} e^{-s_i w}. \quad (2)$$

Учитывая граничные условия, получаем систему линейных уравнений для C_{ji} . Решая данную систему, находим:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{q^F (c_{66} (e^{2hws_2} - 1) w \alpha k_{32} l + \beta (-2e^{hw(s_1+s_2)} k_{31} \alpha_2 + k_{32} (\alpha_1 (1 + e^{2hws_2}) + \alpha_2 (-1 + e^{2hws_2}))))}{\Delta}, \\ C_{21} &= \frac{q^F e^{hws_1} (e^{-2hws_2} \beta k_{31} \alpha_2 + e^{hw(s_1+s_2)} k_{32} (\beta (\alpha_1 - \alpha_2) + c_{66} w \alpha l) + e^{hws_1} k_{32} (\beta (\alpha_1 + \alpha_2) - l c_{66} w \alpha))}{\Delta}, \\ C_{12} &= \frac{q^F (-c_{66} (-1 + e^{2hws_1}) w \alpha k_{31} l + \beta (-2e^{hw(s_1+s_2)} k_{32} \alpha_1 + k_{31} (\alpha_1 (-1 + e^{2hws_1}) + \alpha_2 (1 + e^{2hws_1}))))}{\Delta}, \\ C_{22} &= \frac{q^F e^{hws_2} (-2e^{hws_1} \beta k_{32} \alpha_1 + e^{hws_2} k_{31} (\beta (\alpha_1 + \alpha_2) + c_{66} w \alpha l) + e^{hw(2s_1+s_2)} k_{31} (\beta (\alpha_2 - \alpha_1) - c_{66} w \alpha l))}{\Delta}, \\ C_{31} &= 0, \\ C_{32} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $l = k_{32} \alpha_1 - k_{31} \alpha_2$,

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{66} w^2 (-l c_{66} w \alpha ((-1 + e^{2hws_1})(1 + e^{2hws_2}) k_{22} k_{31} - (1 + e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2}) k_{21} k_{32}) + \\ &+ \beta (k_{21} (-4e^{hw(s_1+s_2)} k_{31} \alpha_2 + k_{32} (\alpha_1 (1 + e^{2hws_1})(1 + e^{2hws_2}) - \alpha_2 (-1 + e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2})))) + \\ &(k_{22} (-4e^{hw(s_1+s_2)} k_{32} \alpha_1 + k_{31} (\alpha_1 (1 - e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2}) + \alpha_2 (1 + e^{2hws_1})(1 + e^{2hws_2}))))), \end{aligned}$$

Таким образом, формулы (2)-(3) дают преобразованное по Фурье решение поставленной задачи. Обращая по Фурье компоненты перемещений, находим решение задачи:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} u^F e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dw_1 dw_2, v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} v^F e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dw_1 dw_2, w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} w^F e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dw_1 dw_2, (4).$$

Аналитическое вычисление этих интегралов является довольно затруднительным, однако можно воспользоваться известными численными методами для получения решения при конкретных входных параметрах.

Рассмотрим теперь задачу о поведении слоя на упругом полупространстве под воздействием нормальной поверхностной нагрузки, когда упругие свойства слоя и пространства могут быть различными. Будем предполагать, что выполняются условия идеального силового контакта на границе



контакта: $u_i^1 = u_i^2, \sigma_{i3}^1 = \sigma_{i3}^2$. Здесь индексом 1 обозначены напряжения и перемещения в слое, индексом 2 – в полупространстве. Формула (2) в данном случае приобретает следующий вид:

$$\varphi_i^j = C_{1i}^j e^{s_i w} + C_{2i}^j e^{-s_i w},$$

Так как на бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю, то можно положить $C_{1i}^2 = 0$. Подставляя данные выражения в систему граничных условий:

$$\begin{cases} \sigma_{xz}^{1F} |_{z=0} = 0, \sigma_{yz}^{1F} |_{z=0} = 0, \sigma_{zz}^{1F} |_{z=0} = q^F(w_1, w_2), \\ \sigma_{xz}^{1F} |_{z=h} = \sigma_{xz}^{2F} |_{z=h}, \sigma_{yz}^{1F} |_{z=h} = \sigma_{yz}^{2F} |_{z=h}, \sigma_{zz}^{1F} |_{z=h} = \sigma_{zz}^{2F} |_{z=h}, \\ u^{1F} |_{z=h} = u^{2F} |_{z=h}, v^{1F} |_{z=h} = v^{2F} |_{z=h}, w^{1F} |_{z=h} = w^{2F} |_{z=h}, \end{cases}$$

получаем систему линейных уравнений относительно констант C_{li}^j :

$$\begin{pmatrix} -iw_1 w k_{31}^1, iw_1 w k_{31}^1, -iw_1 w k_{32}^1, iw_1 w k_{32}^1, -\frac{iw_2 w}{s_3}, \frac{iw_2 w}{s_3}, 0, 0, 0 \\ -iw_2 w k_{31}^1, iw_2 w k_{31}^1, -iw_2 w k_{32}^1, iw_2 w k_{32}^1, \frac{iw_1 w}{s_3}, -\frac{iw_1 w}{s_3}, 0, 0, 0 \\ w^2 k_{21}^1, w^2 k_{21}^1, w^2 k_{22}^1, w^2 k_{22}^1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ -iw_1 w e^{-hs_1} c_{66}^1 k_{31}^1, iw_1 w e^{-hs_1} k_{31}^1 c_{66}^1, -iw_1 w e^{-hs_1} k_{32}^1 c_{66}^1, iw_1 w e^{-hs_1} k_{32}^1 c_{66}^1, -\frac{ie^{-hs_1} w w_2 c_{66}^1}{s_3}, \frac{ie^{-hs_1} w w_2 c_{66}^1}{s_3}, -ie^{-hs_1} w w_1 k_{33}^2 c_{66}^2, -ie^{-hs_1} w w_1 k_{33}^2 c_{66}^2, -\frac{ie^{-hs_1} w w_2 c_{66}^2}{s_3} \\ -iw_2 w e^{-hs_1} c_{66}^1 k_{31}^1, iw_2 w e^{-hs_1} k_{31}^1 c_{66}^1, -iw_2 w e^{-hs_1} k_{32}^1 c_{66}^1, iw_2 w e^{-hs_1} k_{32}^1 c_{66}^1, \frac{ie^{-hs_1} w w_1 c_{66}^1}{s_3}, -\frac{ie^{-hs_1} w w_1 c_{66}^1}{s_3}, -ie^{-hs_1} w w_2 k_{33}^2 c_{66}^2, -ie^{-hs_1} w w_2 k_{33}^2 c_{66}^2, \frac{ie^{-hs_1} w w_1 c_{66}^2}{s_3} \\ w^2 e^{-hs_1} c_{66}^1 k_{21}^1, w^2 e^{-hs_1} c_{66}^1 k_{21}^1, w^2 e^{-hs_1} c_{66}^1 k_{22}^1, w^2 e^{-hs_1} c_{66}^1 k_{22}^1, 0, 0, -w^2 e^{-hs_1} c_{66}^2 k_{21}^2, -w^2 e^{-hs_1} c_{66}^2 k_{22}^2, 0 \\ -iw_1 e^{-hs_1}, -iw_1 e^{-hs_1}, -iw_1 e^{-hs_1}, -iw_1 e^{-hs_1}, -iw_2 e^{-hs_1}, -iw_2 e^{-hs_1}, iw_1 e^{-hs_1}, iw_1 e^{-hs_1}, iw_2 e^{-hs_1} \\ -iw_2 e^{-hs_1}, -iw_2 e^{-hs_1}, -iw_2 e^{-hs_1}, -iw_2 e^{-hs_1}, iw_1 e^{-hs_1}, iw_1 e^{-hs_1}, iw_2 e^{-hs_1}, iw_2 e^{-hs_1}, -iw_1 e^{-hs_1} \\ e^{-hs_1} \alpha_1^1, -e^{-hs_1} \alpha_1^1, e^{-hs_1} \alpha_2^1, -e^{-hs_1} \alpha_2^1, 0, 0, e^{-hs_1} \alpha_1^2, e^{-hs_1} \alpha_2^2, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^1 \\ C_{21}^1 \\ C_{12}^1 \\ C_{22}^1 \\ C_{13}^1 \\ C_{23}^1 \\ C_{21}^2 \\ C_{22}^2 \\ C_{23}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{q^F}{c_{66}^1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая полученную систему, например, методом Крамера, находим преобразованное по Фурье решение задачи, а вместе с ним и (формулы (3)) само решение.

В качестве примера, а также проверки полученного решения, рассмотрим вычисление НДС слоя почвы на гладком жестком основании от воздействия насыпи (например, это может быть солеотвал). Вертикальную нагрузку на слой, вызванную насыпью, можно принять в таком виде:

$$q(x, y) = \frac{\rho g h_e}{a} (H(y+b) - H(y-b)) ((x+a)H(x+a) - 2xH(x) + (x-a)H(x-a)),$$

где ρ – плотность насыпи, a, b, h_e – соответственно ширина, длина и высота насыпи, g – ускорение свободного падения, h – функция Хевисайда. Таким образом, форма нагрузки совпадает с формой насыпи. Преобразование Фурье нагрузки имеет вид: $q^F(w_1, w_2) = -\frac{\rho g h_e}{a} e^{-iaw_1} \frac{(e^{-iaw_1} - 1) \sin(bw_2)}{\pi w_1^2 w_2^2}$. Так как слой находится на гладком основании, то имеем: $\alpha = 1, \beta = 0$. Подставляя найденные выражения в

формулы (3)-(4), получим решение поставленной задачи. Для проведения численных расчетов возьмем следующие значения входных параметров:

$$E_1 = E_2 = 5 \text{ ГПа}, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, G_2 = 0.28462 \text{ ГПа}, a=10 \text{ м}, b=50 \text{ м}, \rho = 2000 \text{ кг/м}^3, h_e = 10 \text{ м}, h=20 \text{ м}.$$

В качестве иллюстрации корректности построенного решения задачи приведены графики напряжений σ_{zz}, σ_{xx} на оси z в сравнении с теми же графиками, но в случае, когда решение получалось численно с помощью метода конечных элементов.



Рисунок 3 Графики напряжений на оси z

На приведенных рисунках сплошная кривая – точное решение, пунктирная – решение, полученное методом конечных элементов.

Список литературы

1. Журавков М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Минск: БГУ, 2008.
2. Johnson K. L., Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.
3. Modern Tribology. Handbook. CRC Press, 2000.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М., 2001.
5. Журавков М.А., Щербаков С.С., Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования // Вести НАНБ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 60–64.
6. Сосновский Л.А., Механика износоусталостного повреждения. Гомель, 2007.
7. Круподеров А.В., Щербаков С.С. Аналитическое решение задачи определения напряженно-деформированного состояния полупространства при действии на него распределенной нормальной нагрузки // Вестник БГУ, №2, 2010.
8. Davis R.O., Selvadurai A.P.S. Elasticity and geomechanics. Cambridge University Press, 1996.
9. Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle> – Дата доступа: 07.12.2009.
10. Лехницкий С.Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // ПММ, Т.26, №4, 1962.
11. N.R. Garg, R.K. Sharma Displacements and stresses at any point of a transversely isotropic multilayered half-space due to strip loadings // [Электронный ресурс] – 1991 – Режим доступа: http://www.new.dli.ernet.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_2/20005a1f_859.pdf – Дата доступа: 26.05.10
12. H. Ding, W. Chen, L. Zhang Elasticity of transversely isotropic materials – Springer, 2006