

ОДНОРОДНЫЕ Φ -ПРОСТРАНСТВА ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП $0(2, k)$

Homogeneous Φ -spaces of pseudoorthogonal groups $0(2, k)$ ($k \geq 2$) are considered. It is found which f -structures on the Φ -spaces are NKf-structures and which are not. The algebra of all invariant affinor structures coincides with the algebra of canonical affinor structures for the Φ -spaces in the case $k \geq 4$.

Геометрия однородных пространств в значительной степени характеризуется инвариантными аффинорными структурами, образующими алгебру. Известно [1], что в случае однородных регулярных Φ -пространств эта алгебра содержит коммутативную подалгебру $A(\theta)$ канонических аффинорных структур. Свойства указанных объектов представляют интерес для Φ -пространств некомпактных групп Ли, в частности псевдоортогональной группы $0(p, q)$.

Хорошо известно [2], что каноническая почти комплексная структура на естественно редуктивном однородном Φ -пространстве порядка 3 является приближенно келеровой (НК-структурой). Естественным продолжением этого факта стали результаты о том, что каноническая f -структура на однородном Φ -пространстве порядка 4 и обе канонические f -структуры на однородном Φ -пространстве порядка 5 в случае естественно редуктивной метрики являются приближенно келеровыми f -структурами (НКf-структурами) [3, 4].

В данной работе рассматривается серия однородных Φ -пространств групп Ли $0(2, k)$, $k \geq 2$, порядка 6. Доказано, что для исследуемых Φ -пространств при $k \geq 4$ алгебра всех инвариантных аффинорных структур совпадает с алгеброй $A(\theta)$ канонических аффинорных структур. Установлено также, какие из возникающих инвариантных канонических f -структур $(f^3 + f = 0, f \neq 0)$ принадлежат классу НКf, а какие не попадают в него. Заметим, что указанные НКf-структуры входят в число важных объектов обобщенной эрмитовой геометрии [5].

Предварительные сведения

Пусть G - связная группа Ли с заданным автоморфизмом Φ , G^Φ - подгруппа его неподвижных точек, G_o^Φ - компонента единицы подгруппы G^Φ . Пространство GIH называется однородным Φ -пространством [6], если H - замкнутая подгруппа в G и $G_o^\Phi \subset H \subset G^\Phi$.

Пусть GIH - однородное Φ -пространство порядка n ($\Phi^n = \text{id}$), g и h - соответствующие алгебры Ли, $\varphi = d\Phi_e$ - автоморфизм алгебры g . Пространство GIH *редуктивно* [7] с каноническим редуктивным разложением $g = h \oplus m$. Обозначим $\theta = \varphi|_m$.

Напомним, что *аффинерной структурой* на многообразии называется тензорное поле типа $(1, 1)$. Для однородного многообразия GIH множество A всех инвариантных аффинорных структур является алгеброй над $\mathbf{R}$. Пусть F - инвариантный аффинор на GIH . Тогда F полностью определяется значением F_o в точке $p_o \in H$, где структура F_o инвариантна относительно $Ad(H)$ (поэтому будем применять одни и те же обозначения для F и F_o). Инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ -пространстве GIH называется *канонической* [1], если ее значение F_o - полином от θ . Легко видеть, что алгебра $A(\theta)$ канонических аффинорных структур является коммутативной подалгеброй в A .

Классические примеры аффинорных структур: /структуры $(f^3 + f = 0, f \neq 0)$; /структуры гиперболического типа (или h -структуры, $h^3 - h = 0, h \neq 0$). Частными случаями являются почти комплексные структуры J ($J^2 = -1$) и структуры почти произведения P ($P^2 = 1$) соответственно.

Будем использовать обозначение $u = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2l + 1, \\ l - 1, & \text{если } n = 2l \end{cases}$ в следующих теоремах для нахождения f -структур.

Теорема 1 [1]. Пусть G/H - Φ -пространство порядка n ($n \geq 3$). Все нетривиальные канонические f -структуры на G/H могут быть заданы операторами

$$f = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^u \left(\sum_{j=1}^u \zeta_j \sin \frac{2\pi m j}{n} \right) (\theta^m - \theta^{n-m}),$$

где $\zeta_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, u$, причем среди чисел ζ_j есть отличные от нуля.

Теорема 2 [8]. Пусть G/H - Φ -пространство порядка n ($n \geq 2$). Все канонические h -структуры на G/H могут быть заданы полиномами $h = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m \theta^m$, где если:

$$a) n = 2l + 1, \text{ то } \alpha_m = \alpha_{n-m} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^u \xi_j \cos \frac{2\pi m j}{n},$$

$$б) n = 2l, \text{ то } \alpha_m = \alpha_{n-m} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^u \xi_j \cos \frac{2\pi m j}{n} + (-1)^m \xi_l \right),$$

где $\xi_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, u$.

В данной работе также будет рассматриваться принадлежность f -структур следующему классу обобщенной эрмитовой геометрии: метрическая f -структура называется *приближенно келеровой /структурой* (или *NKf-структурой* - nearly Kahler f -structure) [3], если выполняется условие $\nabla_X (f) fX = 0$ для связности Леви-Чивита ∇ (псевдо)риманова многообразия (M, g) и любого гладкого векторного поля X на M . Заметим, что критерием принадлежности инвариантной метрической f -структуры классу *NKf* (для естественно редуктивных однородных пространств) является условие (см. [3]):

$$[fY, f^2Y] \in h \text{ для } \forall Y \in m. \quad (1)$$

Пространства $M_k = O_+^\uparrow(2, k)/O_+^\uparrow(2, k)^\Phi$ и канонические f -структуры

Рассмотрим связную компоненту единицы (см. [9]) $G = O_+^\uparrow(2, k)$ псевдоортогональной группы $O(2, k)$, $k \geq 2$, и внутренний автоморфизм группы G :

$$\Phi: G \rightarrow G, g \rightarrow sgs^{-1}, \quad (2)$$

$$\text{где } s = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{1, (k-1)} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, I_{1, (k-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что автоморфизм Φ имеет порядок 6. Тогда соответствующий автоморфизм $\varphi = d\Phi_e$ алгебры Ли $\mathfrak{o}(2, k)$ также имеет порядок 6, при этом $\varphi(X) = sXs^{-1}$, где $X \in \mathfrak{o}(2, k)$. Обозначим через M_k однородное Φ -пространство $O_+^\uparrow(2, k)/O_+^\uparrow(2, k)^\Phi$ порядка 6.

Для дальнейших вычислений будем использовать запись элемента $X \in \mathfrak{o}(2, k)$ в блочном виде в соответствии со строением алгебры Ли $\mathfrak{o}(p, q)$ (см. [9]):

$$X = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & B_{2 \times k} \\ B_{2 \times k}' & C_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{2 \times 2}' = -A_{2 \times 2}, C_{k \times k}' = -C_{k \times k}.$$

$$\text{Обозначим } A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, B_{2 \times k} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,k} \end{pmatrix}, C_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & C_{1 \times (k-1)} \\ -C_{1 \times (k-1)}' & C_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix},$$

где $C_{(k-1) \times (k-1)}' = -C_{(k-1) \times (k-1)}$, $C_{1 \times (k-1)}$ - произвольная строка.

Отображение φ каждому X ставит в соответствие

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & B_{2 \times k}' \\ (B_{2 \times k}')' & C_{k \times k}' \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\text{где } B_{2 \times k}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b_{1,1} + \sqrt{3}b_{2,1}) & -\frac{1}{2}(b_{1,2} - \sqrt{3}b_{2,2}) & \dots & -\frac{1}{2}(b_{1,k} - \sqrt{3}b_{2,k}) \\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3}b_{1,1} + b_{2,1}) & \frac{1}{2}(\sqrt{3}b_{1,2} - b_{2,2}) & \dots & \frac{1}{2}(\sqrt{3}b_{1,k} - b_{2,k}) \end{pmatrix},$$

$$C'_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & -C_{1 \times (k-1)} \\ C'_{1 \times (k-1)} & C_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}.$$

Определим вид подалгебры h неподвижных точек: $h = \{X \in g \mid sXs^{-1} = X\}$. Имеем:

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & 0_{2 \times k} \\ 0_{k \times 2} & C'_{k \times k} \end{pmatrix} C''_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix} \right\}.$$

Вычислим теперь каноническое редутивное дополнение (см. [7]) $m = (\varphi - id)g$:

$$m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B_{2 \times k} \\ B'_{2 \times k} & C'_{k \times k} \end{pmatrix} C'''_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & C_{1 \times k} \\ -C'_{1 \times k} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} 0 & B_{2 \times k} \\ B'_{2 \times k} & C'_{k \times k} \end{pmatrix} \in m$. С учетом действия оператора φ (см. (3)) и полученного вида подпространства m запишем действие оператора $\theta = \varphi|_m$:

$$\theta(Y) = \begin{pmatrix} 0 & B'_{2 \times k} \\ (B'_{2 \times k})' & C^{(4)}_{k \times k} \end{pmatrix},$$

где $B'_{2 \times k}$ такое же, как и в (3), $C^{(4)}_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & -C_{1 \times (k-1)} \\ C'_{1 \times (k-1)} & 0_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}$.

С помощью теоремы 1 запишем теперь формулы для всех канонических f -структур:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5); f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5); f_3 = f_1 + f_2; f_4 = f_1 - f_2.$$

Перейдем к однородным Φ -пространствам M_k . Возьмем $Y = \begin{pmatrix} 0 & B_{2 \times k} \\ B'_{2 \times k} & C'_{k \times k} \end{pmatrix} \in m$,

$$\text{где } B_{2 \times k} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,k} \end{pmatrix}, C'_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & C_{1 \times (k-1)} \\ -C'_{1 \times (k-1)} & 0_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}.$$

Запишем действие указанных структур на однородных Φ -пространствах M_k :

$$f_1(Y) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & B_1 \\ B'_1 & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } B_1 = \begin{pmatrix} b_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ -b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_2(Y) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & B_2 \\ B'_2 & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b_{2,2} & \dots & -b_{2,k} \\ 0 & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \end{pmatrix}.$$

Проверим условие (1) для каждой f -структуры:

$$[f_1(Y), f_1^2(Y)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2 \times k} \\ 0_{k \times 2} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_{1,1}^2 - b_{2,1}^2 \\ b_{1,1}^2 + b_{2,1}^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } [f_1(Y), f_1^2(Y)] \in h$$

для $\forall Y \in m$.

Аналогично получаем: $[f_2(Y), f_2^2(Y)] \in h$, $[f_3(Y), f_3^2(Y)] \in h$, $[f_4(Y), f_4^2(Y)] \notin h$.

Итак, имеем следующий результат.

Теорема 3. Для псевдоримановых многообразий $M_k = G/G^\Phi$ групп Ли $G = O^+(2, k)$, $k \geq 2$, с естественно редутивной метрикой g канонические f -структуры f_1, f_2, f_3 являются NKf -структурами, структура f_4 не принадлежит классу NKf .

Алгебра канонических аффинерных структур $A(\theta)$ для M_k

В качестве образующих алгебры $A(\theta)$ можно взять (см. [10]) следующие структуры: f_1, f_2, h_1, h_2, h_3 , где f_1, f_2 - уже рассмотренные структуры, h_1, h_2, h_3 - h -структуры, которые найдем по теореме 2, используя соответственно наборы $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ в качестве коэффициентов (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Имеем:

$$h_1 = (1 - 2\theta^2 - 3\theta^3 - 2\theta^4)/6; h_2 = (1 + \theta^3)/2; h_3 = -(\theta + \theta^3 + \theta^5)/3.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} 0 & B_{2 \times k} \\ B'_{2 \times k} & C_{k \times k} \end{pmatrix} \in m$, подействуем структурами h_1, h_2, h_3 на Y :

$$\begin{aligned} h_1(Y) &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & B_{2 \times k} \\ B'_{2 \times k} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } B_{2 \times k} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \\ h_2(Y) &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & B'_{2 \times k} \\ (B'_{2 \times k})' & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } B'_{2 \times k} = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,k} \end{pmatrix}; \\ h_3(Y) &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times k} \\ 0_{k \times 2} & C_{k \times k} \end{pmatrix}, \text{ где } C_{k \times k} = \begin{pmatrix} 0 & C_{1 \times (k-1)} \\ -C_{1 \times (k-1)}' & 0_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем в явном виде структуры из подалгебры $A(\theta)$. Имеем:

$$A(\theta) = \{\gamma \mid \gamma = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 h_1 + \alpha_4 h_2 + \alpha_5 h_3, \alpha_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, 5}\}. \quad (4)$$

Выберем в m следующий базис v :

$$v = \{v_1, \dots, v_{3k-1}\}, \quad (5)$$

$v_l = Y$, в котором $b_{1,l} = 1$, остальные элементы нулевые, $l = \overline{1, k}$;

$v_m = Y$, в котором $b_{2,m-k} = 1$, остальные элементы нулевые, $m = \overline{k+1, 2k}$;

$v_n = Y$, в котором $c_{1,n-2k+1} = 1$, остальные элементы нулевые, $n = \overline{2k+1, 3k-1}$.

В резул

$$\begin{aligned} \gamma(v_1) &= \alpha_3 v_1 - \alpha_1 v_{k+1}, \gamma(v_2) = \alpha_4 v_2 + \alpha_2 v_{k+2}, \dots, \gamma(v_k) = \alpha_4 v_k + \alpha_2 v_{2k}; \\ \gamma(v_{k+1}) &= \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_{k+1}, \gamma(v_{k+2}) = -\alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_{k+2}, \dots, \gamma(v_{2k}) = -\alpha_2 v_k + \\ &+ \alpha_4 v_{2k}; \\ \gamma(v_{2k+1}) &= -\alpha_5 v_{2k+1}, \dots, \gamma(v_{3k-1}) = -\alpha_5 v_{3k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$L = \begin{pmatrix} A_{k \times k} & B_{k \times k} & 0_{k \times (k-1)} \\ -B_{k \times k} & A_{k \times k} & 0_{k \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times k} & 0_{(k-1) \times k} & -C_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $A_{k \times k} = \text{diag}\{\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_4\}$, $B_{k \times k} = \text{diag}\{\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_2\}$, $C_{(k-1) \times (k-1)} = \text{diag}\{\alpha_5, \dots, \alpha_5\}$.

Итак, получена

Теорема 4. Для всех $k \geq 2$ алгебра канонических аффинорных структур $A(\theta)$ однородного Φ -пространства $M_k = O(2, k)_0 / O(2, k)_0^\Phi$ имеет вид (6), причем $\dim A(\theta) = 5$.

Замечание. Размерность алгебры $A(\theta)$ видна после вычисления образующих f_i и f_j . Поскольку обе f -структуры ненулевые и имеют нетривиальные ядра, то оператор θ имеет максимальный спектр. Следовательно (см. [10]), $A(\theta) \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$. Тогда $\dim A(\theta) = 5$.

Алгебра инвариантных аффинорных структур A для M_k

Найдем подгруппу $H = O(2, k)_0^\Phi$ неподвижных точек относительно автоморфизма (2) для группы $G = O_+^\dagger(2, k)$. Пусть

$$h \in H \text{ и } h = \begin{pmatrix} C_{2 \times 2} & B_{2 \times k} \\ A_{k \times 2} & D_{k \times k} \end{pmatrix}.$$

Условие неподвижности $shs^{-1} = h$ дает

$$A_{k \times 2} = 0, B_{2 \times k} = 0, C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ -c_{1,2} & c_{1,1} \end{pmatrix}, D_{k \times k} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 \\ 0 & D_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}, D_{(k-1) \times (k-1)} - \text{ произ-}$$

вольная.

Из условия псевдоортогональности $h I_{2,k} h' = I_{2,k}$ получаем

$$\begin{pmatrix} C_{2 \times 2} C_{2 \times 2}' & 0 \\ 0 & -D_{k \times k} D_{k \times k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}, \text{ откуда } C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Для клетки $D_{k \times k}$ имеем

$$D_{k \times k} D'_{k \times k} = \begin{pmatrix} d_{1,1}^2 & 0 \\ 0 & D_{(k-1) \times (k-1)} D'_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix} = E_k.$$

Поскольку $h \in O(2, k)_+^\uparrow$, то $\det D_{k \times k} > 0$ (см. [9]), поэтому $\det D_{k \times k} = 1$. Тогда $d_{1,1} = 1$ и $\det D_{(k-1) \times (k-1)} = 1$ или $d_{1,1} = -1$ и $\det D_{(k-1) \times (k-1)} = -1$, причем $D_{(k-1) \times (k-1)} D'_{(k-1) \times (k-1)} = E_{k-1}$.

Таким образом, подгруппа H состоит из матриц следующих типов:

$$h_1 = \begin{pmatrix} C_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & D_{k \times k} \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} C_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -D_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $D_{k \times k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}$, $D_{(k-1) \times (k-1)}$ ортогональная, $\det D_{(k-1) \times (k-1)} = 1$.

Подействуем оператором AdQ_i на элементы базиса (5). Получим матрицу оператора:

$$\begin{pmatrix} \cos t D_{k \times k} & \sin t D_{k \times k} & 0 \\ -\sin t D_{k \times k} & \cos t D_{k \times k} & 0 \\ 0 & 0 & D_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Найдем алгебру инвариантных аффинорных структур

$$A \cong \{F_0 \in \text{Mat}(3k-1, \mathbf{R}) \mid F_0 Ad(h) = Ad(h)F_0, h \in H\}. \quad (9)$$

Пусть $F_0 = (F_{i,j})$, где i, j пробегает значения 1, 2, 3; $F_{1,1}, F_{1,2}, F_{2,1}, F_{2,2}$ - клетки размера $k \times k$, $F_{1,3}, F_{2,3}, -k \times (k-1)$, $F_{3,1}, F_{3,2} - (k-1) \times k$, $F_{3,3} - (k-1) \times (k-1)$.

Обозначим $D_{k \times k} = D$, $D_{(k-1) \times (k-1)} = D_0$ в равенстве (8). С учетом (9) для клеток $F_{1,1}, F_{1,2}, F_{2,1}, F_{2,2}$ получим систему:

$$\begin{cases} (DF_{1,1} - F_{1,1}D) \cos t = -(DF_{2,1} + F_{1,2}D) \sin t, \\ (DF_{1,2} - F_{1,2}D) \cos t = (F_{1,1}D - DF_{2,2}) \sin t, \\ (DF_{2,1} - F_{2,1}D) \cos t = (DF_{1,1} - F_{2,2}D) \sin t, \\ (DF_{2,2} - F_{2,2}D) \cos t = (F_{2,1}D + DF_{1,2}) \sin t. \end{cases} \quad (10)$$

Изменяя t , D , в системе (10) имеем: решения нужно искать при $F_{1,1} = F_{2,2}$ и $F_{1,2} = -F_{2,1}$. Аналогичным способом получаем, что клетки $F_{1,3}, F_{2,3}, F_{3,1}, F_{3,2}$ нулевые. Для клетки $F_{3,3}$ при $\forall D_0$ (D_0 ортогональная, $\det D_0 = 1$) справедливо равенство

$$D_0 F_{3,3} = F_{3,3} D_0. \quad (11)$$

Найдем такие матрицы $F_{3,3}$.

Если матрица $F_{3,3}$ имеет размер 1×1 (при $k = 2$), то $F_{3,3}$ произвольная.

Пусть матрица $F_{3,3}$ имеет размер 2×2 (при $k = 3$). Любую матрицу D_0 можно представить в виде $D_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. С учетом равенства (11) получим, что

$$F_{3,3} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ где } a, b - \text{ произвольные числа из } \mathbf{R}.$$

Пусть матрица $F_{3,3}$ имеет размер $(k-1) \times (k-1)$, $1 \geq 4$, и $(k-1)$ - нечетное (при четном $(k-1)$ ситуация аналогичная). Обозначим $u = k/2$.

Случай 1. В качестве D_0 возьмем канонические ортогональные матрицы вида

$$D_0 = \text{diag} \{D_1, D_2, \dots, D_u\}, \text{ где } D_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, i = \overline{1, u-1}, D_u = (1). \text{ Матрицу}$$

$F_{3,3}$ представим в виде: $F_{3,3} = (X_{i,j})$, $i, j = \overline{1, u}$, где клетки $X_{1,u}, \dots, X_{(u-1),u}$ имеют размер 2×1 , $X_{u,1}, \dots, X_{u,(u-1)} - 1 \times 2$, $X_{u,u} - 1 \times 1$, остальные - размер 2×2 . Имеем:

$$D_0 F_{3,3} = \begin{pmatrix} D_1 X_{1,1} & \dots & D_1 X_{1,u} \\ & \dots & \\ D_u X_{u,1} & \dots & D_u X_{u,u} \end{pmatrix}, F_{3,3} D_0 = \begin{pmatrix} X_{1,1} D_1 & \dots & X_{1,u} D_u \\ & \dots & \\ X_{u,1} D_1 & \dots & X_{u,u} D_u \end{pmatrix}.$$

Тогда при $i \neq j$ (рассматриваем $i, j \notin \{u\}$) выполняются равенства $D_i X_{i,j} = X_{i,j} D_j$.

Возьмем, например, $D_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для таких D_i и D_j получаем, что $X_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Аналогичным способом имеем: $X_{u,j}$, $X_{i,u}$ - нулевые клетки ($i, j \notin \{u\}$), $X_{u,u}$ - произвольная.

Для диагональных элементов $X_{i,i}$ ($i \neq u$), как и при $k = 3$, получим, что $X_{i,i} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$, где a_i, b_i - произвольные действительные числа.

Случай 2. Теперь в качестве D_0 будем брать канонические ортогональные матрицы вида $D_0 = \text{diag}\{D_1, D_2, \dots, D_u\}$, где $D_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{2, u}$, $D_1 = (1)$.

Матрицу $F_{3,3}$ представим в виде: $F_{3,3} = (X_{i,j})$, $i, j = \overline{1, u}$, где клетки $X_{1,2}, \dots, X_{1,u}$ имеют размер 1×2 ; $X_{2,1}, \dots, X_{u,1} - 2 \times 1$; $X_{1,1} - 1 \times 1$, остальные - размер 2×2 .

Аналогично случаю 1 получаем, что $X_{1,1}$ - произвольная; $X_{u,j}$, $X_{i,u}$ - нулевые клетки ($i, j \notin \{1\}$); при $i \neq 1$ $X_{i,i} = \begin{pmatrix} c_i & d_i \\ -d_i & c_i \end{pmatrix}$, где c_i, d_i - произвольные действительные числа.

Объединим случаи 1 и 2. Получим, что $F_{3,3} = \alpha E$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Вернемся к клеткам $F_{1,1}, F_{1,2}$. Из системы (10) при $\cos t = 1$ имеем: $\begin{cases} DF_{1,1} = F_{1,1} D \\ DF_{1,2} = F_{1,2} D \end{cases}$.

С учетом того (из равенства (7)), что $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}$ аналогично нахождению $F_{3,3}$, легко видеть, из каких элементов состоят клетки $F_{1,1}$ и $F_{1,2}$.

Таким образом, алгебра инвариантных аффинорных структур A однородного пространства $M_k = O(2, k)_0 / O(2, k)_0^\Phi$ изоморфна алгебре, состоящей из матриц вида:

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & 0 \\ -F_{1,2} & F_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & F_{3,3} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где клетки $F_{1,1}, F_{1,2}$ имеют размер $k \times k$, клетка $F_{3,3}$ имеет размер $(A-1) \times (A-1)$ и

а) при $k = 2$ клетки $F_{1,1}, F_{1,2}, F_{3,3}$ - произвольные;

б) при $k = 3$ $F_{1,1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, $F_{1,2} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & B_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, $F_{3,3} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $A_{2 \times 2}, B_{2 \times 2}$

вида $F_{3,3}$;

в) при $k \geq 4$, $F_{1,1} = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_2\}$, $F_{1,2} = \text{diag}\{a_3, a_4, \dots, a_4\}$, $F_{3,3} = \text{diag}\{a_5, \dots, a_5\}$.
Итак, получена следующая

Теорема 5. Для всех $k \geq 2$ алгебра инвариантных аффинорных структур A однородного пространства Φ -пространства $M_k = O(2, k)_0 / O(2, k)_0^\Phi$ имеет вид (12), причем при $k \geq 4$ алгебра A совпадает с алгеброй канонических аффинорных структур $A(\theta)$.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф06Р-137) в рамках совместного проекта БРФФИ - РФФИ.

1. Балащенко В.В., Степанов Н.А. // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3.
2. Gray A. // J. of Differential Geometry. 1972. Vol. 7. № 3-4. P. 343.
3. Balashchenko V. V. // Contemporary Mathematics. 2001. Vol. 288. P. 263.
4. Балащенко В.В. // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 439.
5. Кириченко В.Ф. // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1986. Т. 18. С. 25.
6. Феденко А.С. Пространства с симметриями. Мн., 1977.
7. Степанов Н.А. // Изв. вузов. Математика. 1967. № 3. С. 88.
8. Балащенко В.В. // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. № 4. С. 213.
9. Постников М.М. Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Семестр II, М., 1986.
10. Balashchenko V. V. // Differential Geometry and Its Applications. Opava, 2001. P. 3.

Поступила в редакцию 04.07.07.

Андрей Сергеевич Самсонов - аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики В.В. Балащенко.