УДК 517.968+517.44

Ю.Г. РУЛИНСКИЙ

# СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ В ПРОБЛЕМЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ ОТ ФИНИТНОЙ ФУНКЦИИ

**The article deals with the class of the entire functions of finite degree which belong to the space $Lp'$. ($p' > 2$) on the real axis. It is shown that in this class of functions convergence in mean in the definition of Fourier transform is equal to weak convergence.**

Положим $z = x + iy,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1 \quad (1 < p < 2).$

**Лемма 1.** Пусть $F(z)$ - целая функция конечной степени $\le a$ $(a > 0)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{p'}\, dx < \infty. \tag{1}$$

Тогда справедливо равенство

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(t-z)}{t-z} F(t)dt. \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем произвольное действительное число $\delta > 0$. Покажем, что интеграл в правой части (2) сходится равномерно по $z$ при $|y| \le \delta$. Действительно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin a(t-z)}{t-z}\right|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin a(t-x-iy)}{t-x-iy}\right|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds + \int_{-\infty}^{-1} \left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds + \int_{1}^{\infty} \left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds.$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно. С учетом того, что

$$\left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-a}^{a} e^{i(s+iy)h}\, dh\right| \le \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} e^{-yh}\, dh \le a e^{a\delta},$$

имеем

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds \le 2a^p e^{ap\delta}.$$

Далее

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds=\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin a(s+iy)\right|^p}{(s^2+y^2)^{p/2}}ds\le\frac{1}{2^p}\int_1^{\infty}\frac{\left|e^{ia(s+iy)}-e^{-ia(s+iy)}\right|^p}{s^p}ds\le$$

$$\le\frac{1}{2^p}\int_1^{\infty}\frac{\left(\left|e^{ia(s+iy)}\right|+\left|e^{-ia(s+iy)}\right|\right)^p}{s^p}ds=\frac{1}{2^p}\int_1^{\infty}\frac{(e^{-ay}+e^{ay})^p}{s^p}ds\le e^{ap\delta}\int_1^{\infty}\frac{1}{s^p}ds=\frac{e^{ap\delta}}{p-1}.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{-1}\left|\frac{\sin a(s+iy)}{s+iy}\right|^p ds\le\frac{e^{ap\delta}}{p-1}.$$

Таким образом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin a(t-z)}{t-z}F(t)\right|dt\le M\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin a(t-z)}{t-z}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le \mathrm{M}e^{a\delta}\left(2a^p+\frac{2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как оценка не зависит от z при $|y|\le\delta,$ то сходимость интеграла в правой части (2) равномерна по z, $|y|\le\delta.$

Рассмотрим функцию F(z). В соответствии с условием **(1)** функция F(z) имеет бесконечно много нулей. Пусть $\lambda$ - произвольный нуль функции F(z). Тогда $\frac{F(z)}{z-\lambda}$ - целая функция конечной степени $\le a,$ принадлежащая $L_2$ на вещественной оси. И по теореме Винера - Пэли [ ]

$$\frac{F(z)}{z-\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{izt}dt,\quad f(t)\in L_2(-a,a),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}\left|f(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{F(x)}{x-\lambda}e^{-ixt}dx\right|^2 dt=0\qquad (n=1,\ 2,\ 3...).\qquad (3)$$

Возьмем произвольную точку $z_0$ в комплексной плоскости. Введем число $l=z_0-\lambda.$ Таким образом,

$$F(z_0)-\frac{lF(z_0)}{z_0-\lambda}=0.\qquad (4)$$

Рассмотрим правую часть (2)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}F(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin a(t-z_0)\frac{F(t)-\dfrac{lF(t)}{t-\lambda}}{t-z_0}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}\frac{lF(t)}{t-\lambda}dt=\frac{e^{-iaz_0}}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat}\frac{F(t)-\dfrac{lF(t)}{t-\lambda}}{t-z_0}dt-$$

$$-\frac{e^{iaz_0}}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iat}\frac{F(t)-\dfrac{lF(t)}{t-\lambda}}{t-z_0}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}\frac{lF(t)}{t-\lambda}dt=J_1-J_2+J_3.\qquad (5)$$

Определим функцию *g(x)* следующим образом:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\frac{F(t)-\dfrac{lF(t)}{t-\lambda}}{t-z_0}dt.\qquad (6)$$

Из формулы (4) следует, что $\dfrac{F(z)-\dfrac{lF(z)}{z-\lambda}}{z-z_0}$ - целая функция конечной степени $\le a$, которая в силу (1) и неравенства Гёльдера принадлежит $L_1$ на вещественной оси. Тогда, основываясь на замечании к теореме Винера - Пэли [2], мы делаем вывод, что *g(x)* - непрерывная функция, равная нулю всюду при $|x| \ge a$. А так как интеграл в правой части (6) сходится равномерно по $x$, $x \in (-\infty, \infty)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixa}\frac{F(t)-\dfrac{lF(t)}{t-\lambda}}{t-z_0}dt = g(\pm a) = 0.$$

Следовательно, $J_1 = J_2 = 0$. Далее заметим, что для функции $\dfrac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}$ справедливо представление

$$\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0} = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} e^{iz_0x}e^{-itx}dx. \tag{7}$$

Используя (3) и (7), а также теорему Фубини [3] об изменении порядка интегрирования, имеем

$$J_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}\frac{lF(t)}{t-\lambda}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-n}^{n}\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}\frac{lF(t)}{t-\lambda}dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\left[\int_{-a}^{a} e^{iz_0x}e^{-itx}dx\right]\frac{lF(t)}{t-\lambda}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{l}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{iz_0x}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{F(t)}{t-\lambda}e^{-itx}dt\right]dx =$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{iz_0x}f(x)dx = l\frac{F(z_0)}{z_0-\lambda} = \frac{(z_0-\lambda)F(z_0)}{z_0-\lambda} = F(z_0).$$

Таким образом, (5) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(t-z_0)}{t-z_0}F(t)dt = F(z_0).$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть *F(z)* - целая функция конечной степени $\le a$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^{p'}dx < \infty. \tag{8}$$

Пусть выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(t-\frac{\pi n}{a})}{t-\frac{\pi n}{a}}F(t)dt = 0 \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{9}$$

Тогда $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. По лемме 1 из условия (9) вытекает, что

$$F\left(\tfrac{\pi n}{a}\right) = 0 \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\ ). \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $\dfrac{F(z)}{z}$. Из условий (8) и (10) следует, что $\dfrac{F(z)}{z}$ - целая функция конечной степени $\le a$, принадлежащая $L_2$ на вещественной оси. Следовательно, по теореме Котельникова [4]

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{F\left(\frac{\pi k}{a}\right)}{\frac{\pi k}{a}}\frac{\sin a(z-\frac{\pi k}{a})}{a(z-\frac{\pi k}{a})},$$

где ряд сходится равномерно в любой ограниченной части комплексной плоскости. Тогда из условия (10) следует

$$F(z)=\frac{F'(0)}{a}\sin az.$$

Откуда в силу условия (8) вытекает, что $F(z)\equiv 0$.

**Теорема** 1. Пусть $F(z)$ - целая функция конечной степени $\leq a$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)\right|^{p'}dx<\infty.$$

Для того чтобы

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{izt}dt,\quad f(t)\in L_p(-a,a),$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}F(x)e^{-itx}dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

сходилась слабо к f/(t) на $(-a, a)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left[\int_{-n}^{n}F(x)e^{-ixt}dx\right]g(t)dt=\int_{-a}^{a}f(t)g(t)dt \tag{11}$$

для каждой функции $g(t)$, принадлежащей

Доказательство. Пусть $F(z)$ удовлетворяет равенству

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{itz}dt,\quad f(t)\in L_p(-a,a).$$

Тогда из теоремы 108 [5, с. 197] следует, что $L_{p'}(-a,a)$.

Но из сходимости в среднем вытекает слабая сходимость, что доказывает необходимость условия.

Пусть последовательность функций

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}\left|f(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}F(x)e^{-ixt}dx\right|^{p}dt=0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}F(x)e^{-ixt}dx\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

сходится слабо к некоторой функции $f(t)$, принадлежащей $L_p$ на $(-a, a)$, т. е. выполняется условие (11). Обозначим через $\Psi(z)$ образ Фурье функции $f(t)$, т. е.

$$\Psi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{izt}dt,$$

$\Psi(z)$ - целая функция конечной степени $\leq a$, принадлежащая в силу теоремы 74 [5, с. 128] пространству $L_{p'}$ на вещественной оси. Последнее равенство означает, что выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}\left|f(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\Psi(x)e^{-ixt}dx\right|^{p}dt=0. \tag{12}$$

Тогда согласно (11) и (12) имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(x-\frac{\pi k}{a})}{x-\frac{\pi k}{a}}\left[F(x)-\Psi(x)\right]dx=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{\sin a(x-\frac{\pi k}{a})}{x-\frac{\pi k}{a}}\left[F(x)-\Psi(x)\right]dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{\sin a(x-\frac{\pi k}{a})}{x-\frac{\pi k}{a}}F(x)dx-\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-n}^{n}\frac{\sin a(x-\frac{\pi k}{a})}{x-\frac{\pi k}{a}}\Psi(x)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\left[\int_{-a}^{a}e^{i\frac{\pi k}{a}t}e^{-ixt}dt\right]F(x)dx-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\left[\int_{-a}^{a}e^{i\frac{\pi k}{a}t}e^{-ixt}dt\right]\Psi(x)dx=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left[\int_{-n}^{n}F(x)e^{-ixt}dx\right]e^{i\frac{\pi k}{a}t}dt - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left[\int_{-n}^{n}\Psi(x)e^{-ixt}dx\right]e^{i\frac{\pi k}{a}t}dt =$$

$$= \int_{-a}^{a}f(t)e^{i\frac{\pi k}{a}t}dt - \int_{-a}^{a}f(t)e^{i\frac{\pi k}{a}t}dt = 0,$$

где изменение порядка интегрирования законно в силу теоремы Фубини. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(x-\frac{\pi k}{a})}{x-\frac{\pi k}{a}}\left[F(x)-\Psi(x)\right]dx = 0 \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \dots).$$

Следовательно, по лемме 2 $F(z) - \Psi(z) \equiv 0$, и, значит,

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{izt}dt.$$

Теорема 2. Пусть $F(z)$ - целая функция конечной степени $\leq a$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^{p'}dx < \infty.$$

Для того чтобы

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{izt}dt,\ f(t)\in L_p(-a,a),$$

необходимо и достаточно существование конечного предела

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}G(-x)F(x)dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

для каждой функции $G(x)$, представимой в виде

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}g(t)e^{ixt}dt,\ g(t)\in L_{p'}(-a,a).$$

Доказательство. Пусть $F(z)$ удовлетворяет равенству

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{izt}dt,\ f(t)\in L_p(-a,a).$$

Тогда, используя теорему 1, а также то, что для каждой функции $g(t)\in L_{p'}(-a,a)$, произведение $g(t)f(t)$ принадлежит $L_1(-a,a)$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}G(-x)F(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\left[\int_{-a}^{a}g(t)e^{ixt}dt\right]F(x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}g(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}F(x)e^{-ixt}dx\right]dt = \int_{-a}^{a}g(t)f(t)dt,$$

где изменение порядка интегрирования законно в силу теоремы Фубини, а предельный переход под знаком интеграла обоснован в силу теоремы из § 12.53 [6], тем самым необходимость условия доказана.

Пусть существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}G(-x)F(x)dx, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

для каждой функции $G(x)$, представимой в виде

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}g(t)e^{ixt}dt,\ g(t)\in L_{p'}(-a,a).$$

Тогда для каждой функции $g(t)\in L_{p'}(-a,a)$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a} g(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} F(x)e^{-ixt}dx\right]dt,$$

действительно

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a} g(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} F(x)e^{-ixt}dx\right]dt =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} F(x)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} g(t)e^{-ixt}dt\right]dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} G(-x)F(x)dx,$$

где изменение порядка интегрирования законно в силу теоремы Фубини. Но тогда в силу теоремы из § 4 о слабо полных пространствах [7] вытекает, что последовательность функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} F(x)e^{-itx}dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

сходится слабо к некоторой функции $f(t)$, принадлежащей $L_p(-a,a)$. Следовательно, на основании теоремы 1 функция $F(z)$ представима в виде

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(t)e^{izt}dt,\quad f(t)\in L_p(-a,a).$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту кафедры теории функций И.Л. Васильеву за помощь в подготовке статьи.

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964. С. 26.
2. Кусис П. Введение в теорию пространства $H^p$: С приложением доказательства Волффа теоремы о короне. М., 1984. С. 167.
3. Князев П. Н. Интегральные преобразования. Мн., 1969. С. 16.
4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., 1971. С. 149.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
6. Титчмарш Е. Теория функций. М., 1980. С. 434.
7. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск, 2001. С. 146.

Поступила в редакцию 15.05.07.

***Юрий Григорьевич Рулинский*** - главный специалист АСБ «Беларусбанк».