УДК 519.233.3

А.И. ПЕТЛИЦКИЙ. Ю.С. ХАРИН

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О НЕЗАВИСИМОСТИ И РАВНОМЕРНОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Two statistical tests for verifying random sequences are proposed. The first test is based on frequency statistics of Markov chain with partial connections. The second test is based on extremal statistic of a scalar product of fragments in the observed sequence. The power of the tests is evaluated.

Выявление зависимости в случайной последовательности и обнаружение отклонений вероятностного распределения элементов последовательности от равномерного являются важнейшими проблемами в защите информации [1-3], генетике [4] и других приложениях. Обзор существующих методов решения этих задач представлен в [2]. Актуальность проблемы построения новых статистических тестов [5] обусловлена тем, что многие известные тесты: 1) проверяют лишь одно из вероятностных свойств, характеризующих случайную последовательность; 2) построены «эвристически» и не фиксируют семейство альтернатив; 3) не имеют теоретических оценок мощности.

В данной статье разработаны два новых теста для статистической проверки гипотезы H_0 = {наблюдаемая последовательность есть равномерно распределенная случайная последовательность (РРСП)} против альтернативы $H_1 = \overline{H}_0$; РРСП - случайная последовательность, элементы которой независимы в совокупности и имеют равномерное распределение вероятностей [2]. Первый тест $T_{\text{ЦМ}(s,r)}$ основан на частотных статистиках новой марковской модели [6] - цепи Маркова 5-го порядка с r частичными связями, а второй $T_{\max}$ - на экстремальной статистике скалярного произведения фрагментов последовательности. Для обоих тестов исследована мощность для семейства контигуальных альтернатив, а также проведено сравнение с тестом на основе частот обычной цепи Маркова 5-го порядка [7], «тестом хи-квадрат» [8] и тестом ((frequency test within a block» [9], которые обозначим $T_{\text{ЦМ}}$, T_{xu^2} и T_{fr} соответственно.

Тест, основанный на частотных статистиках цепи Маркова с частичными связями. Обозначим: $A=\{0,1,\ldots, N-1\}$-алфавит мощности $2\le N<\infty$; $J_i^l=\left(j_i,j_{i+1},\ldots,j_l\right)\in A^{l-i+1}$ - мультииндекс $(l-i+1)$-го порядка, $l\ge i$; $x_t\in A$ - однородная цепь Маркова s-го порядка с вероятностями одношаговых переходов

$$p_{j_1,\ldots,j_s,j_{s+1}}=\mathrm{P}\left\{x_{t+s}=j_{s+1}\mid x_{t+s-1}=j_s,\ldots,x_t=j_1\right\},\ J_1^{s+1}\in A^{s+1},\ t\ge 1;$$

$r\in\{1,2,\ldots,s\}$ - параметр, называемый числом связей; $M_r^0=\left(m_1^0,m_2^0,\ldots,m_r^0\right)$ - целочисленный r-вектор с упорядоченными компонентами $1=m_1^0<m_2^0<\ldots<m_r^0\le s$, называемый шаблоном связей, который в данной статье предполагается известным; $Q=\left(q_{j_1,\ldots,j_r,j_{r+1}}\right)$, $J_1^{r+1}\in A^{r+1}$, - некоторая (r+1)-мерная стохастическая матрица.

Цепь Маркова x_t называется [6] цепью Маркова s-го порядка с r частичными связями и обозначается ЦМ(s,r), если ее вероятности одношаговых переходов имеют вид

$$p_{j_1,\ldots,j_s,j_{s+1}}=q_{j_{m_1^0},\ldots,j_{m_r^0},j_{s+1}},\ J_1^{s+1}\in A^{s+1}. \tag{1}$$

Соотношение (1) означает, что вероятность перехода процесса x_t в состояние j_{s+1} зависит не от всех s предыдущих состояний процесса $j_1,\ldots,j_s$, а лишь от r избранных состояний $j_{m_1^0},\ldots,j_{m_r^0}$. Если s = r то получаем обычную цепь Маркова 5-го порядка [10]. Условия эргодичности ЦМ(s,r) установлены в [11]. Далее рассматриваем стационарную цепь Маркова с частичными связями.

Примем еще несколько обозначений: $X_1^n=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ - наблюдаемая реализация длительности и; $S_t'\left(X_1^n\right)=\left(x_{t+m_1^0-1},\ldots,x_{t+m_r^0-1}\right)\in A^r$, $S_t\left(X_1^n\right)=\left(S_t'\left(X_1^n\right),x_{t+s}\right)\in A^{r+1}$; $\delta_{J_1^s,K_1^s}=\prod_{i=1}^s\delta_{j_i,k_i}$ - символ Кронекера для мультииндексов J_1^s, K_1^s;

$$\nu\left(J_1^{r+1}\right)=\sum_{t=1}^{n-s}\delta_{S_t\left(X_1^n\right),J_1^{r+1}},\ J_1^{r+1}\in A^{r+1}, - \tag{2}$$

частотные статистики цепи Маркова ЦМ(s,r); $\Pi_{K_1^s}^{*}$, $K_1^s\in A^s$, - стационарное распределение вероятностей эргодической ЦМ(s, r):

$$\mu\left(J_1^{r+1}\right)=\mathrm{P}\left\{S_t\left(X_1^n\right)=J_1^{r+1}\right\}=q_{J_1^{r+1}}\sum_{K_1^s\in A^s}\delta_{S_1'(K_1^s),J_1^r}\Pi_{K_1^s}^{*}; \tag{3}$$

$\hat{\mu}\left(J_1^{r+1}\right)=\nu\left(J_1^{r+1}\right)/(n-s)$ - частотная оценка вероятности $\mu\left(J_1^{r+1}\right)$, которая с учетом (2) и свойств частот для цепей Маркова [12] является несмещенной и состоятельной оценкой при $n\to\infty$. Условимся, что если вместо какого-то индекса стоит точка, то это означает суммирование по всем возможным значениям этого индекса: $\mu\left(J_1^r,\cdot\right)=\sum_{j_{r+1}\in A}\mu\left(J_1^{r+1}\right)$.

Построим тест проверки гипотез H_0: $\{x_t\}$ – РРСП, т. е. $q_{J_1^{r+1}}\equiv N^{-1}$, $J_1^{r+1}\in A^{r+1}$; H_1: $\{x_t\}$ - цепь Маркова ЦМ(s,r), для которой матрица Q имеет вид

$$q_{J_1^{r+1}}=q_{J_1^{r+1}}(n)=N^{-1}\left(1+b_{J_1^{r+1}}/\sqrt{n-s}\right),\ J_1^{r+1}\in A^{r+1}, \tag{4}$$

где $\sum_{j_{r+1}\in A}b_{J_1^{r+1}}=0$, $\sum_{J_1^{r+1}\in A^{r+1}}|b_{J_1^{r+1}}|\ne 0$. Соотношение (4) определяет контигуальное семейство альтернатив [13] и означает, что при увеличении длительности n наблюдаемой последовательности гипотеза H_1 сближается с H_0 со скоростью $O(n^{-1/2})$.

Лемма 1. Если выполнено (4), то

$$\mu\left(J_1^r,\cdot\right)=N^{-r}\left(1+\Delta^*_{J_1^r}/\sqrt{n-s}\right),$$

где $\Delta^*_{J_1^r}=N^{r-s}\sum_{K_1^s\in A^s}\delta_{S_1^r(K_1^s),J_1^r}\Delta_{K_1^s}(n),\ J_1^r\in A^r;\ \Delta_{K_1^s}(n)\to\Delta_{K_1^s},\ K_1^s\in A^s$, при $n\to\infty$, причем величины $\left\{\Delta_{K_1^s}\right\}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\Delta_{K_2^{s+1}}=N^{-1}\sum_{k_1\in A}\left(b_{S_1(K_1^{s+1})}+\Delta_{K_1^s}\right),\ \sum_{K_1^s\in A^s}\Delta_{K_1^s}=0.$$

Доказательство. Понимая согласно [10] эргодичность цепи Маркова *s-го* порядка как эргодичность эквивалентной ей s-векторной цепи Маркова первого порядка с «расширенным» пространством состояний, можем записать систему алгебраических уравнений для $\Pi^*_{K_1^s},\ K_1^s\in A^s$, из которой с учетом (3) при $n\to\infty$ получаем требуемый результат.

Обозначим

$$\xi\left(J_1^{r+1}\right)=\sqrt{(n-s)N^{r+1}}\left(\hat{\mu}\left(J_1^{r+1}\right)-N^{-(r+1)}\right).\qquad(5)$$

Теорема 1. Если выполнено (4), топри $n\to\infty$ асимптотическая ковариация случайных величин $\left\{\xi\left(J_1^{r+1}\right):J_1^{r+1}\in A^{r+1}\right\}$ имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{cov}\left\{\xi\left(J_1^{r+1}\right),\xi\left(K_1^{r+1}\right)\right\}=\delta_{J_1^{r+1},K_1^{r+1}}-N^{-(r+1)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{I_1^{s+1},L_1^{s+1}\in A^{s+1}}N^{-(s+1)}\delta_{S_1(I_1^{s+1}),J_1^{r+1}}\delta_{S_1(L_1^{s+1}),K_1^{r+1}}\left(\delta_{I_{i+1}^{s+1},L_1^{s+1-i}}+\delta_{I_1^{s+1-i},L_{i+1}^{s+1}}\right).$$

Доказательство. В условиях (4) при $n\to\infty$ из представления (5) и леммы 1 прямым вычислением получаем требуемый результат.

Теорема 2. При $n\to\infty$ случайная величина

$$\rho_{\text{ЦМ}(s,r)}=\sum_{J_1^r\in A^r}\left(\sum_{j_{r+1}\in A}\xi^2\left(J_1^{r+1}\right)-N^{-1}\xi^2\left(J_1^r,\cdot\right)\right)\qquad(6)$$

в случае справедливости гипотезы H_0 имеет χ^2-распределение с $U_0=N^r(N-1)$ степенями свободы, а при справедливости гипотезы $H\backslash$ имеет нецентральное χ^2- распределение с $U_1=\sum_{J_1^r\in A^r}\left(|\{j_{r+1}\in A:q_{J_1^{r+1}}>0\}|-1\right)$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$a_{\text{ЦМ}(s,r)}=N^{-(r+1)}\sum_{J_1^{r+1}\in A^{r+1}}b^2_{J_1^{r+1}}.\qquad(7)$$

Доказательство. Используя теоремы 1, 2 из [14] и теорему 1, получаем требуемый результат.

При помощи теоремы 2 построим тест $T_{\text{ЦМ}(s,r)}$ для проверки гипотез H_0 и H_1, основанный на частотных статистиках цепи Маркова с r частичными связями:

1) по наблюдаемой последовательности X_1^n длительности *n* построим частотные статистики $\left\{\nu\left(J_1^{r+1}\right):J_1^{r+1}\in A^{r+1}\right\}$ согласно (2);

2) по $\left\{\nu\left(J_1^{r+1}\right):J_1^{r+1}\in A^{r+1}\right\}$ согласно (5), (6) вычислим статистики $\left\{\xi\left(J_1^{r+1}\right):J_1^{r+1}\in A^{r+1}\right\}$ и $\rho_{\text{ЦМ}(s,r)}$;

3) с помощью решающего правила принимается H_0, если $P>\varepsilon$; H_1, если $P\le\varepsilon$, где $P=1-G_{U_0}\left(\rho_{\text{ЦМ}(s,r)}\right)$ - Р-значение, $G_{U_0}(\cdot)$ - функция χ^2-распределения с U_0 степенями свободы, $\varepsilon\in(0,1)$ - заданный уровень значимости теста.

Этот тест является обобщением теста, предложенного в [7].

Следствие 1. Мощность теста $T_{\text{ЦМ}(s,r)}$ при $n\to\infty$ удовлетворяет асимптотическому соотношению:

$$w \to 1 - G_{U_1, a_{ЦМ(s,r)}}\left(G_{U_0}^{-1}(1-\varepsilon)\right), \qquad (8)$$

где $G_{U_1, a_{ЦМ(s,r)}}(\cdot)$ - функция нецентрального χ^2- распределения с U_1 степенями свободы и параметром нецентральности $a_{ЦМ(s,r)}$, определяемым (7).

Доказательство. Для теста $T_{ЦМ(s,r)}$ мощность определяется следующим образом: $w = P_{H_1}\left\{1 - G_{U_0}\left(\rho_{ЦМ(s,r)}\right) \le \varepsilon\right\} = P_{H_1}\left\{\rho_{ЦМ(s,r)} \ge G_{U_0}^{-1}(1-\varepsilon)\right\}$. При $n \to \infty$ из теоремы 2 и указанного представления мощности w получаем требуемый результат.

Следствие 2. Тест $T_{ЦМ(s,r)}$ более мощный по сравнению с тестом $T_{ЦМ}$.

Доказательство. Требуемый результат можно получить, воспользовавшись асимптотическим соотношением (8), теоремой 2 из [7], аппроксимациями квантили стандартного χ^2-распределения и функции нецентрального χ^2-распределения, представленными в [15] и [16] соответственно.

При $b_{J_1^{r+1}} = b_{j_{r+1}}$, $J_1^{r+1} \in A^{r+1}$, получаем частный случай гипотезы H_1 - гипотезу H_{1^*}: $\{x_t\}$ - последовательность независимых в совокупности случайных величин с распределением: $P\{x_t = j_{r+1}\} = N^{-1}\left(1 + b_{j_{r+1}} / \sqrt{n-s}\right)$, $\sum_{j_{r+1} \in A} b_{j_{r+1}} = 0$, $\sum_{j_{r+1} \in A} |b_{j_{r+1}}| \ne 0$.

Тест, основанный на экстремальной статистике скалярного произведения. Предложим еще один статистический тест проверки определенных гипотез H_0, H_{1^*} при *N=2,* основанный на экстремальной статистике скалярного произведения фрагментов последовательности. Тестированию подвергается бинарная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ длины $n = 3\tau V$, которая разбивается на 3V последовательных непересекающихся фрагментов длины τ. Тест является модификацией теста из [17] и основан на статистике

$$\gamma_{\max}^{v} = \max\{\gamma_{12}^{v}, \gamma_{13}^{v}, \gamma_{23}^{v}\}, \qquad (9)$$

$$\gamma_{i_1,i_2}^{v} = \sum_{i=1}^{\tau} x_{3(v-1)\tau+(i_1-1)\tau+i}\, x_{3(v-1)\tau+(i_2-1)\tau+i}, \quad 1 \le i_1 < i_2 \le 3, \quad v = 1, 2, \ldots, V.$$

Теорема 3. Если верна гипотеза H_0, то распределение вероятностей статистики $\gamma_{\max}^{v}$ определяется следующим образом:

$$\alpha_i^0 = P_{H_0}\left\{\gamma_{\max}^{v} = i\right\} = \beta_i^0 - \beta_{i-1}^0,$$

$$\beta_{-1}^0 = 0, \ \beta_i^0 = \sum_{l=0}^{i} \sum_{k_1,k_2,k_3=0}^{i-l} 2^{-\tau-2(l+k_1+k_2+k_3)} C_\tau^l C_{\tau-l}^{k_1} C_{\tau-l-k_1}^{k_2} C_{\tau-l-k_1-k_2}^{k_3}, \ i = 0, 1, \ldots, \tau;$$

при справедливости гипотезы H_{1^*} статистика $\gamma_{\max}^{v}$ имеет распределение:

$$\alpha_i^1 = P_{H_1}\left\{\gamma_{\max}^{v} = i\right\} = \beta_i^1 - \beta_{i-1}^1,$$

$$\beta_{-1}^1 = 0, \ \beta_i^1 = \sum_{l=0}^{i} \sum_{k_1,k_2,k_3=0}^{i-l} \left(2 - \frac{b_0}{\sqrt{n-s}}\right)^{\tau-(l+k_1+k_2+k_3)} \left(\frac{1}{2} - \frac{b_0}{2\sqrt{n-s}}\right)^{3l+2(k_1+k_2+k_3)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} + \frac{b_0}{2\sqrt{n-s}}\right)^{3\tau-(2l+k_1+k_2+k_3)} C_\tau^l C_{\tau-l}^{k_1} C_{\tau-l-k_1}^{k_2} C_{\tau-l-k_1-k_2}^{k_3}, \ i = 0, 1, \ldots, \tau.$$

Доказательство. Прямым вычислением вероятностей событий методами комбинаторики получаем требуемый результат.

При помощи теоремы 3 построим тест $T_{\max}$ для проверки гипотез H_0 и H_{1^*}, основанный на экстремальной статистике скалярного произведения:

1) по наблюдаемой последовательности X_1^n длительности $n = 3\tau V$ согласно (9) вычислим статистики $\left\{\gamma_{\max}^{v} : v = 1, 2, \ldots, V\right\}$;

2) по совокупности статистик $\left\{\gamma_{\max}^{v} : v = 1, 2, \ldots, V\right\}$ вычислим χ^2 статистику:

$$\rho_{\max} = \sum_{i=0}^{\tau}\left(y_i - V\alpha_i^0\right)^2 / V\alpha_i^0, \quad y_i = \sum_{v=1}^{V}\delta_{\gamma_{\max}^v, i};$$

3) с помощью решающего правила принимается H_0, если $P > \varepsilon$; H_1, если $P \le \varepsilon$, $P = 1 - G_\tau\left(\rho_{\max}\right)$.

Следствие 3. Мощность теста $T_{\max}$ для проверки гипотез H_0, H_{1*} при $n \to \infty$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$w \to 1 - G_{\tau, a_{\max}}\left(G_\tau^{-1}(1-\varepsilon)\right), \quad a_{\max} = \sum_{i=0}^{\tau} V\left(\alpha_i^1 - \alpha_i^0\right)^2 / \alpha_i^0. \tag{10}$$

Доказательство. Используя теорему 3 и проводя рассуждения, аналогичные тем, что представлены в доказательстве следствия 1, получаем требуемый результат.

Численные результаты. По методу Монте-Карло при числе прогонов 10^3 получены оценки вероятности ошибки первого рода α теста $T_{ЦМ(s,r)}$ и мощности w тестов $T_{ЦМ(s,r)}$, $T_{\max}$, $T_{ЦМ}$, $T_{xu\text{^}2}$, T_{fr} для альтернатив H_1, H_{1*}.

На рис. 1 представлена зависимость $\hat{\alpha}$ от n при 7V=3, s=24, /=8 и $\varepsilon = 0{,}05$ для двух различных шаблонов M_r^0 (сплошная линия - теоретическое значение $\alpha = 0{,}05$; пунктирные линии - верхняя и нижняя 99 % доверительные границы для α; квадрат и круг - значения оценки $\hat{\alpha}$ для $M_r^0 = (1,9,15,20,\ldots,24)$ и $M_r^0 = (1,9,10,19,20,22,23,24)$ соответственно).

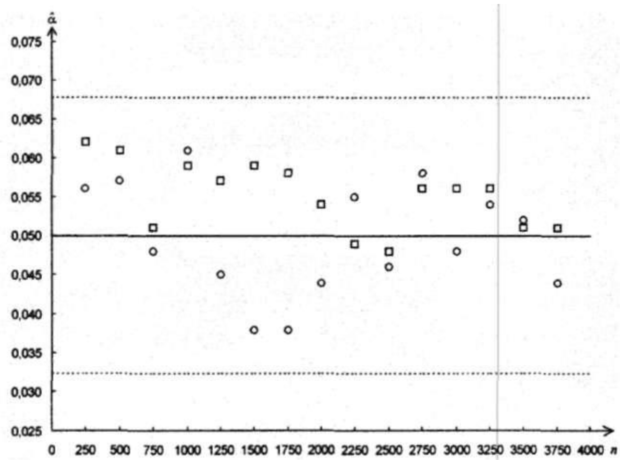

Рис. 1. Зависимость $\hat{\alpha}$ от n

В табл. 1 показана зависимость $\hat{w}$ для альтернативы H_1 от « при $N=4$, $s=6$, $r=4$, $M_r^0 = (1,4,5,6)$ и матрице Q, для которой: 1) $b_{J_1^r,0}, \ldots, b_{J_1^r,N-2}$ генерировались с помощью стандартного генератора равномерно распределенных на [-13,13] псевдослучайных чисел, а $b_{J_1^r,N-1} = -(b_{J_1^r,0} + \ldots + b_{J_1^r,N-2})$; 2) функция нецентрального χ^2 - распределения в (8) имеет $U_1 = 768$ степеней свободы и параметр нецентральности $a_{ЦМ(s,r)} = 138{,}5$. Из табл. 1 видно, что для этих значений параметров мощность теста $T_{ЦМ(s,r)}$ приблизительно в 4 раза превосходит мощность теста $T_{ЦМ}$, что согласуется со следствием 2. Отметим, что при $n \to \infty$ мощность тестов не стремится к 1, так как при увеличении и гипотеза H_1 сближается с H_0 (контигуальная постановка задачи).

Таблица 1

Зависимость оценки $\hat{w}$ от n для H_1

Тест	n	750	1000	1250	1500	1750	2000
$T_{ЦМ(s,r)}$	w	0,9476					
	$\hat{w}$	0,9130	0,9360	0,9270	0,9470	0,9420	0,9480
$T_{ЦМ}$	w	0,2231					
	$\hat{w}$	0,2670	0,2830	0,2630	0,2280	0,2740	0,2310
$T_{xu\text{^}2}$	$\hat{w}$	0,3970	0,3710	0,3640	0,3470	0,3680	0,3310

На рис. 2 представлена зависимость $\hat{w}$ для альтернативы H_1 от и при $N=2$, 5=6, $\tau = \kappa = 8$ (κ - длина блока в тесте T_{fr}), $r=3$, $M_r^0 = (1,3,4)$ и $\varepsilon = 0{,}05$ (сплошная ли-

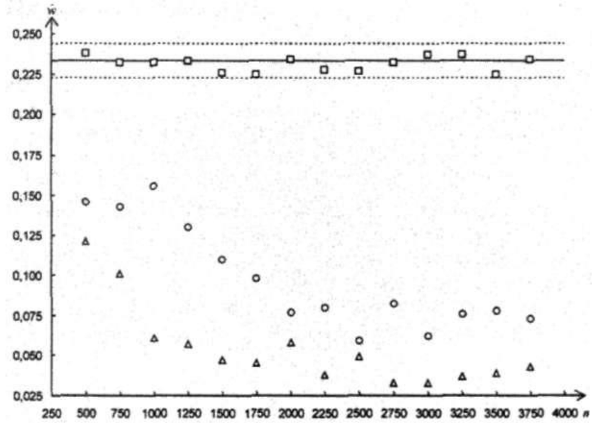

Рис. 2. Зависимость оценки $\hat{w}$ от n

ния - теоретическое значение w (8) теста $T_{ЦМ(s,r)}$ при $U_1 = 8$, $a_{ЦМ(s,r)} = 27{,}9456$; пунктирные линии - верхняя и нижняя 99 % доверительные границы для мощности w теста $T_{ЦМ(s,r)}$; квадрат, круг и треугольник - значения $\hat{w}$ для тестов $T_{ЦМ(s,r)}$, $T_{\max}$ и T_{fr} соответственно).

В табл. 2 представлена зависимость $\hat{w}$ для альтернативы H_{1*} от и при $N=2$, $s=\tau=\kappa=6$, $r=3$, $M_r^0=(1,2,6)$, $b_0=4{,}5$ и $\varepsilon=0{,}05$. Теоретическое значение мощности w тестов $T_{ЦМ(s,r)}$ и $T_{\max}$ вычислено с помощью (8) и (10) соответственно.

Таблица 2

Зависимость $\hat{w}$ от n для H_{1*}

Тест	n	750	1000	1250	1500	1750	2000
$T_{ЦМ(s,r)}$	w	0,9193					
	$\hat{w}$	0,9080	0,9240	0,9240	0,9270	0,9300	0,9160
$T_{\max}$	w	0,8401	0,8290	0,8225	0,8183	0,8153	0,8131
	$\hat{w}$	0,7350	0,7610	0,7430	0,7510	0,7700	0,7810
$T_{xu\hat{}2}$	$\hat{w}$	0,9950	0,9960	0,9960	0,9950	0,9920	0,9930
T_{fr}	$\hat{w}$	0,2360	0,2040	0,2120	0,1610	0,1720	0,1360

* * *

На основании полученных теоретических и экспериментальных данных можно сделать вывод, что наиболее универсальным и наилучшим по мощности среди тестов $T_{ЦМ(s,r)}$, $T_{\max}$, $T_{ЦМ}$, $T_{xu\hat{}2}$ и T_{fr} для проверки гипотез H_0, H_1 является тест $T_{ЦМ(s,r)}$, основанный на частотных статистиках цепи Маркова *s-го* порядка с r частичными связями. Тест $T_{\max}$, основанный на экстремальной статистике скалярного произведения фрагментов последовательности, близок по мощности к тесту $T_{ЦМ(s,r)}$ для случая альтернативы H_{1*}. При проверке гипотез H_0, H_{1*} тест $T_{ЦМ(s,r)}$ незначительно проигрывает по мощности тесту $T_{xu\hat{}2}$, который, как известно [8], является наиболее мощным именно для H_{1*}, т. е. когда элементы случайной последовательности предполагаются независимыми в совокупности и проверяется лишь равномерность одномерного распределения вероятностей.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические модели».

1. Кнут Д. Искусство программирования: в 3 т. М., 1992.
2. Харин Ю.С. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. Мн., 2003.
3. Иванов М.А., Чигунков И.В. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. М., 2003.
4. Уотсрмен М.С. Математические методы анализа последовательностей ДНК. М., 1999.
5. Харин Ю.С., Ярмола А.Н., Петлицкий А.И. // Искусств. Интеллект. 2006. № 3. С. 793.
6. Харин Ю.С. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 40.
7. Тихомирова М.И., Чистяков В.П. // Дискрет. математика. 2003. Т. 15. № 2. С. 149.
8. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М., 1984.
9. Rukhin A. et al. A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for crypto graphic applications. NIST, 2001. http://csrc.nist.gov/rng/SP800-22b.pdf
10. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., 1956.
11. Харин Ю.С., Петлицкий А.И. // Информационные системы и технологии: в 2 ч. 2006. Ч. 1. С. 156.

12. Basawa I.V . Statistical inference for stochastic processes. London, 1980.
13. Руссас Дж . Контигуальность вероятностных мер. М., 1975.
14. Чистяков В.П. // Дискретю математика. 2001. Т. 13. № 4. С. 52.
15. Penev S., Raykov T. // Computational Statistics. 2000. Vol. 15. № 2. P. 219. 16.
Кендал М., Стьюард А. Статистические выводы и связи. М., 1976. 17. Харин
Ю. С, Петлицкий А.И. // Информатика. 2004. № 3. С. 106.

Поступила в редакцию 15.02.07.

Андрей Иванович Петлицкий - аспирант кафедры математического моделирования и анализа дан-ных. Научный руководитель - Ю.С. Харин.

Юрий Семенович Харин - член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических на-ук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных.