УДК 519.24

ЛЕ ХОНГ ШОН (ВЬЕТНАМ), Н.Н. ТРУШ, ЧАН ЛОК ХУНГ (ВЬЕТНАМ)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

In this paper, we show that, if G is λ-symmetric stable random variable, $\lambda \in (0; 2)$, A is one-side α/λ-stable random variable, $0< \alpha <\lambda\leq 2$, G and A independent, then $A^{1/\lambda} G$ is α-stable random variable.

Невырожденная случайная величина X называется устойчивой, если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдутся такие константы $c_n > 0$ и $b_n \in R$, что

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \tag{1}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины, X - случайная величина с таким же распределением, как и X_j, 7 = 1» 2 . . . и. Случайная величина X называется строго устойчивой, если в соотношении (1) $d_n = 0$.

В [3] доказано, что единственным возможным выбором для постоянной c_n есть $c_n = n^{1/\alpha}$ для $\alpha \in (0;2]$. Поэтому для строго устойчивой случайной величины X имеем

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X. \tag{2}$$

Обычно класс устойчивых распределений описывается с помощью характеристических функций, которые, например, для устойчивой случайной величины X имеют представление

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{-(\delta\,|\,t\,|)^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}] + i\mu t\} \text{ при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\delta\,|\,t\,|\,[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln(|\,t\,|)] + i\mu t\} \text{ при } \alpha = 1, \end{cases}$$

где $\alpha \in (0;2]$, $\beta \in [-1;1]$, $\mu \in R$, $\delta > 0$. В этом случае будем писать $X \sim S_\alpha(\delta,\ \beta,\ \mu)$.

Если $\beta=0$, то X является симметричной устойчивой случайной величиной относительно μ. Когда $\alpha < 1$, $\mu = 0$, то распределение случайной величины X при $\beta = 1$ сосредоточено в правой полуплоскости, а при $\beta = -1$ - в левой. В этом случае X называется односторонне устойчивой случайной величиной. Случайные величины Леви $X \sim S_{1/2}(\delta,1,0)$, $X \sim S_{1/2}(\delta,-1,0)$ являются примерами таких распределений.

Рассмотрим преобразование Лапласа односторонне устойчивых случайных величин. Если $F_X(x)$, $x \in R$, является функцией распределения случайной величины X, то ее преобразование Лапласа представим© в виде

$$\hat{F}_X(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_X(x), \quad \lambda \in R.$$

Положительная функция $L(x)$, $x \in [0;\infty)$, называется медленно меняющейся функцией, если для любого $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Лемма 1 [3]. Пусть $F_X(x)$, $x \in R$, является функцией распределения некоторой а-устойчивой случайной величины X, тогда эквивалентны следующие соотношения:

$$1 - F_X(x) \sim L(x)x^{-\alpha} \text{ при } x \to \infty,$$

$$1 - \hat{F}_X(\lambda) \sim L(1/\lambda)\Gamma(1-\alpha)\lambda^{\alpha} \text{ при } \lambda \to 0,$$

где $0 < \alpha < 1$, $L(x)$ - медленно меняющаяся функция, а $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Теорема 1. Если $X \sim S_\alpha(\delta,1,0)$, $\alpha \in (0;1)$, то ее преобразование Лапласа представимо в виде

$$\hat{F}_X(\lambda) = e^{-a\lambda^\alpha}, \quad \lambda > 0,$$

где $a = \delta^\alpha \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1}$.

Доказательство. Из определения строго устойчивых случайных величин (2) вытекает, что для преобразования Лапласа случайной величины $X \sim S_\alpha(\delta,1,0)$ выполняется равенство

$$[\hat{F}_X(\lambda)]^n = \hat{F}_X(n^{1/\alpha}\lambda). \tag{3}$$

Отсюда имеем

$$\hat{F}_X(\lambda) = e^{-a\lambda^\alpha}, \; a \in R.$$

Известно [2], что если $X \sim S_\alpha(\delta,1,0)$, где $0<\alpha<1$, то при $x\to\infty$

$$1 - F_X(x) \sim 2\delta^\alpha k_\alpha x^{-\alpha},$$

где $k_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$.

Из леммы 1 вытекает, что при $\lambda \to 0$

$$1 - \hat{F}_X(\lambda) \sim 2\delta^\alpha c_\alpha \Gamma(1-\alpha)\lambda^\alpha. \tag{4}$$

В то же время, используя (3), получим, что при $\lambda \to 0$

$$1 - \hat{F}_X(\lambda) = 1 - e^{-a\lambda^\alpha} \sim -a\lambda^\alpha. \tag{5}$$

Из (4) и (5) имеем

$$a = -2\delta^\alpha c_\alpha \Gamma(1-\alpha) = -2\delta^\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\Gamma(1-\alpha) = -\delta^\alpha\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если случайная величина $X \sim S_\alpha(\delta, 1, 0)$, то $(-X) \sim S_\alpha(\delta, -1, 0)$. Поэтому преобразование Лапласа случайной величины *(-X)* ~ $S_\alpha(\delta, 1, 0)$ имеет вид, как и в теореме **1** при $\lambda < 0$

Лемма 2 [1]. Если *X, Y*- независимые случайные величины, *Y* положительна, то

$$F_{XY}(x) = \int_0^\infty F_X\left(\frac{x}{t}\right) f_Y(t)dt, \tag{6}$$

где $F_{XY}(x),\ F_X(x),\ x \in R,$- функции распределения случайных величин *XY* и *X* соответственно, $f_Y(t)$ - плотность распределения случайной величины *Y*.

Лемма 3. Предположим, что *X, Y*- независимые случайные величины, *Y* положительна, тогда характеристическая функция случайной величины *XY* имеет представление

$$\varphi_{XY}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(tz) f_Y(z)dz = E\varphi_X(tY), \tag{7}$$

где $\varphi_X(t)$- характеристическая функция случайной величины *X*.

Доказательство. Из (6) получим, что

$$\varphi_{XY}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{XY}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_0^\infty \frac{1}{z} f_X\left(\frac{x}{z}\right) f_Y(z)dzdx =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz(\frac{t}{z})} f_X(\frac{x}{z}) d\frac{x}{z} \right) f_Y(z)dz = \int_0^\infty \varphi_X(tz) f_Y(z)dz = E\varphi_X(tY).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Если $X \sim S_\alpha(1,0,0),\ 0 < \alpha < 2,$ и для любого $\lambda,\ 0 < \alpha < \lambda \leq 2,$ существуют независимые симметричная λ-устойчивая случайная величина GH односторонняя α/λ-устойчивая случайная величина $A \sim S_{\alpha/\lambda}(\delta, 1, 0)$ с преобразованием Лапласа вида $\exp\{-t^{\alpha/\lambda}\},\ t > 0,$ то

$$X \overset{d}{=} A^{1/\lambda} G. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим, что $X \sim S_\alpha(1,0,0),\ 0 < \alpha < 2,$ тогда для любого $\lambda,\ 0 < \alpha < \lambda \leq 2,$ имеем $\frac{\alpha}{\lambda} < 1$. Из теоремы 1 $A \sim S_{\alpha/\lambda}((\cos\frac{\pi\alpha}{2\lambda})^{\lambda/\alpha},\ 1,\ 0),$ и, следовать

$$\hat{F}_A(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dF_A(x) = \exp\{-\frac{\left[(\cos\frac{\pi\alpha}{2\lambda})^{\lambda/\alpha}\right]^{\alpha/\lambda}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2\lambda}} |t|^{\alpha/\lambda}\} = e^{-t^{\alpha/\lambda}},\ t > 0. \tag{9}$$

Предположим, что *G* и *A*— независимые случайные величины, где $G \sim S_\lambda(1,0,0)$. Характеристическая функция случайной величины *G* имеет представление

$$\varphi_G(t) = e^{-|t|^\lambda},\ t \in R.$$

Из (7) и (9) вытекает, что характеристическая функция случайной величины $A^{1/\lambda}G$ имеет вид

$$\varphi_{A^{1/\lambda}G}(t) = E\varphi_G(tA^{1/\lambda}) = E\exp\{-|t|^\lambda A\} = e^{-(|t|^\lambda)^{\alpha/\lambda}} = e^{-|t|^\alpha} = \varphi_X(t).$$

Теорема доказана.

Замечание. Когда симметричная случайная величина $X \sim S_\alpha(\delta, 0, \mu),\ 0 < \alpha < 2,$ то (8) можно записать в виде

$$X \overset{d}{=} A^{1/\lambda} G + \mu,$$

где

$$G \sim S_\lambda(\delta,0,0) \text{ и } A \sim S_{\alpha/\lambda}((\cos\frac{\pi\alpha}{2\lambda})^{\lambda/\alpha},1,0).$$

Следствие 1. Пусть G и A - независимы е случайные величины, G-симметричная α-устойчивая случайная величина, $0<\alpha<2,\ A \sim S_\lambda(\delta,1,0),\ 0<\lambda<1,$ то $A^{1/\alpha}G$ является симметричной $\alpha\lambda$- устойчивой случайной величиной.

Следствие 2. Если G *и* A- независимые случайные величины, G имеет распределение Коши, A является односторонне устойчивой случайной величиной $A \sim S_\alpha(\delta,1,0),\ 0<\alpha<1,\ G$ и A- независимые, то AG - симметричная α -устойчивая случайная величина.

Доказательство. Результат следует из теоремы 2 в случае $\lambda=1,\ 0<\alpha<1.$

Замечание. Когда $\lambda = 2$, то симметричная λ-устойчивая случайная величина G имеет нормальное распределение. В этом случае пусть $A \sim S_{\alpha/2}(2(\cos\frac{\pi\alpha}{4})^{2/\alpha},1,0)$ и G, A - независимые случайные величины, тогда получим результат из работы [1].

1. Nolan J.P. Multivariate stable densities and distribution functions: general and elliptical case, Deutsche Bundesbank's 2005, Annual Fall conference, 8 november. Deutshe, 2005. P. 6.
2. Nolan J.P. Stable distribution models for heavy tailted data, American University processed January 11. Boston, 2005. P. 6.
3. Feller J. An introduction to probability theory and its applications. New York, 1966. Vol. 2. P. 439.
4. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Change and stability: Stable distributions and their applica tions, Series modern probability and statistics. Utrecht, 1999. P. 143.

Поступила в редакцию 18.01.07.

Ле Хот Шоп - аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель - Н.Н. Труш.

Николай Николаевич Труш - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафед-рой теории вероятностей и математической статистики.

Чан Лок Хунг - кандидат физико-математических наук, доцент, Научный университет Хюэ (Вьетнам).