УДК 517.958:537.8(075.8)

Д.П. ТАВАККОЛИ(ИРАН), В.Т. ЕРОФЕЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

The system of integral equations describing the penetration of plane electromagnetic fields through thin cylindrical shell from composite material was obtained.

В научной литературе по проблемам электродинамики большое внимание уделяется решению задач дифракции электромагнитных волн различных типов на материальных структурах из композитных материалов [1]. Рассматриваемые модельные задачи дифракции, как правило, связаны с исследованием классов геометрически правильных тел [1-3], для которых используются аналитические решения уравнений Максвелла в композитных средах [4]. Значительную проблему составляют задачи дифракции на телах произвольной формы [5]. В данной работе получена система интегральных уравнений для решения задач рассеяния произвольной комбинации *TE*- и ГЯ-поляризованных плоских полей на цилиндрической тонкой композитной оболочке произвольного поперечного сечения, основанная на специальных граничных условиях сопряжения на поверхности оболочки [6].

В пространстве R^3 с фиксированной декартовой системой координат $Oxyz$ рассмотрим тонкую замкнутую оболочку D переменной толщины Δ, ограничивающую область D_2. Пусть D_1 - внешняя область оболочки, а Γ_1, Γ_2, Γ - внешняя, внутренняя и срединная достаточно гладкие поверхности оболочки D. В области D_1 распространяется монохроматическое электромагнитное плоское первичное поле $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$, возбужденное его источником, колеблющимся с круговой частотой ω В результате взаимодействия первичного поля с оболочкой в области D_1 образуется поле $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1'$, $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1'$, где $\boldsymbol{E}_1', \boldsymbol{H}_1'$ - отраженное поле в D_1, а в область D_2 проникает поле $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$. Поля $\boldsymbol{E}_j, \boldsymbol{H}_j$ в областях D_j удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_j = i\omega\mu_j \boldsymbol{H}_j, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_j = -i\omega\varepsilon_j \boldsymbol{E}_j, \tag{1}$$

где ε_j, μ_j - комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в D_j Область D заполнена композитным материалом, в котором электромагнитное поле E, H удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\omega(\mu \boldsymbol{H} + Z\boldsymbol{E}), \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i\omega(\varepsilon \boldsymbol{E} + G\boldsymbol{H}), \tag{2}$$

где комплексные параметры ε, μ, Z, G характеризуют композит.

В качестве первичного поля выберем произвольную комбинацию базисных *TE*- и ТН-поляризованных плоских полей [7]

$$E_0 = AU^{(-1)} + BU^{(-2)}, \quad H_0 = \frac{k^{(1)}}{i\omega\mu_1}(AU^{(-2)} + BU^{(-1)}),$$

где A, B - постоянные амплитуды полей,

$$U^{(\mp1)} = \frac{i}{\lambda'}(\alpha_2' e_x - \alpha_1' e_y)\Phi(\mp), \quad U^{(\mp2)} = \frac{1}{k^{(1)}}(\mp\frac{i\nu^{(1)}}{\lambda'}(\alpha_1' e_x + \alpha_2' e_y) + \lambda' e_z)\Phi(\mp), \tag{3}$$

$$k^{(1)} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}, \qquad \lambda' = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha_2')^2}, \qquad 0 \le \arg k^{(1)}, \lambda' < \pi,$$

$$\nu^{(1)} = \sqrt{(\lambda')^2 - (k^{(1)})^2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \arg \nu^{(1)} < \frac{\pi}{2}, \qquad \Phi(\mp) = \exp(i\alpha'_1 x + i\alpha_2' y \mp \nu^{(1)} z).$$

α_1', α_2' - заданные исходные параметры, в общем случае комплексные, характеризующие направление распространения первичного поля.

Постановка краевых задач экранирования. Для описания взаимодействия первичного поля с оболочкой D требуется найти решения уравнений (1), (2) в областях D_1, D_2, D, удовлетворяющие условиям непрерывности касательных составляющих полей на поверхностях Γ_1, Γ_2 и условиям излучения на бесконечности. В случае достаточно тонкой оболочки D используется метод моделирования, идеализирующий исходную краевую задачу [6]. Для моделирования проникновения поля E_0, H_0 внутрь области D_2 произведем идеализацию задачи, заменив оболочку D идеальной срединной поверхностью Г и продолжив поля E_j, H_j - вплоть до поверхности Г. Таким образом, $R^3 = D_1 \bigcup \Gamma \bigcup D_2$. При этом процесс проникновения поля моделируется с помощью специальных граничных условий сопряжения на поверхности Г.

В точке $M \in \Gamma$ проведем внутреннюю нормаль n и рассмотрим тройку взаимно ортогональных единичных векторов m, v, n, где m, v касательны к поверхности Г в точке M. Представим поля E_j, H_j в локальном базисе в виде

$$E_j = E_{jm}\mathbf{m} + E_{j\nu}\boldsymbol{\nu} + E_{jn}\mathbf{n}, \qquad H_j = H_{jm}\mathbf{m} + H_{j\nu}\boldsymbol{\nu} + H_{jn}\mathbf{n}$$

и сформулируем соответствующую задачу экранирования.

Задача 1. Требуется найти решения

$$E_1', H_1' \in C^1(D_1) \bigcap C(\bar{D}_1), \qquad E_2, H_2 C^1(D_2) \bigcap C(\bar{D}_2)$$

уравнений (1), которые удовлетворяют граничным условиям сопряжения

$$\begin{aligned} E_{2m} &= (A_{11}^{11} E_{1m} + A_{11}^{12} E_{1\nu} + A_{12}^{11} H_{1m} + A_{12}^{12} H_{1\nu})\big|_{\xi\in\Gamma}, \\ E_{2\nu} &= (A_{11}^{21} E_{1m} + A_{11}^{22} E_{1\nu} + A_{12}^{21} H_{1m} + A_{12}^{22} H_{1\nu})\big|_{\xi\in\Gamma}, \\ H_{2m} &= (A_{21}^{11} E_{1m} + A_{21}^{12} E_{1\nu} + A_{22}^{11} H_{1m} + A_{22}^{12} H_{1\nu})\big|_{\xi\in\Gamma}, \\ H_{2\nu} &= (A_{21}^{21} E_{1m} + A_{21}^{22} E_{1\nu} + A_{22}^{21} H_{1m} + A_{22}^{22} H_{1\nu})\big|_{\xi\in\Gamma} \end{aligned} \tag{4}$$

и условиями излучения

$$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial E_1'}{\partial r} - ik^{(1)} E_1') = 0$$

в случае, когда поверхность Г ограничена; r - радиальная сферическая координата.

Обобщая результаты работ [6,8] на произвольные комплексные параметры Z, G, получим выражения для коэффициентов условий (4):

$$A_{11}^{11} = (p_2(\Phi_1 S_1 - C_1) - p_1(\Phi_2 S_2 - C_2))p, \qquad A_{11}^{12} = (-p_2\theta_1 S_1 + p_1\theta_2 S_2)p,$$

$$A_{11}^{21} = (p_2\delta_1 S_1 - p_1\delta_2 S_2)p, \qquad A_{11}^{22} = (-p_2(\Phi_1 S_1 + C_1) + p_1(\Phi_2 S_2 + C_2))p,$$

$$A_{12}^{11} = (-\Phi_1 S_1 + C_1 + \Phi_2 S_2 - C_2)p, \qquad A_{12}^{12} = (\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2)p,$$

$$A_{12}^{21} = (-\delta_1 S_1 + \delta_2 S_2)p, \qquad A_{12}^{22} = (\Phi_1 S_1 + C_1 - \Phi_2 S_2 - C_2)p,$$

$$A_{21}^{sl} = -p_1 p_2 A_{12}^{sl}, \qquad A_{22}^{11} = (p_1(-\Phi_1 S_1 + C_1) + p_2(\Phi_2 S_2 - C_2))p,$$

$$A_{22}^{12}=(p_1\theta_1S_1-p_2\theta_2S_2)p,\quad A_{22}^{21}=(-p_1\delta_1S_1+p_2\delta_2S_2)p,$$
$$A_{22}^{22}=(p_1(\Phi_1S_1+C_1)-p_2(\Phi_2S_2+C_2))p, \tag{5}$$
$$\Phi_j=\frac{\alpha_1\alpha_2g_j}{g\nu_j},\ \theta_j=\frac{g_j}{g\nu_j}\left(\alpha_1^2-k_j^2\right),\ \delta_j=\frac{g_j}{g\nu_j}\left(\alpha_2^2-k_j^2\right),\ p_j=\frac{1}{\mu}\left(\frac{ig}{\omega g_j}-Z\right),$$
$$p=\frac{1}{p_1-p_2},\ k_j=\sqrt{g+\frac{1}{2}a^2+af_j},\ 0\le\arg k_j<\pi,\quad f_j=(-1)^j f,$$
$$f=\sqrt{k^2-b^2},\ 0\le\arg f<\pi,\ b=\frac{1}{2}\omega(G+Z),\ g=\omega^2(\varepsilon\mu-ZG),$$
$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu},\ 0\le\arg k<\pi,\ g_j=f_j-\frac{1}{2}a,\ a=i\omega(G-Z),\ \nu_j=\sqrt{\lambda^2-k_j^2},$$
$$-\frac{\pi}{2}\le\arg\nu_j<\frac{\pi}{2},$$
$$\lambda=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2},\ 0\le\arg\lambda<\pi,\ S_j=\mathrm{sh}(\nu_j\Delta),\ C_j=\mathrm{ch}(\nu_j\Delta).$$

В формулах (5) параметры $\alpha_1=\alpha_1(\xi)$, $\alpha_2=\alpha_2(\xi)$ определяются параметрами первичного поля (3) и являются функциями точки $\xi\in\Gamma$. Для оболочки, неоднородной вдоль поверхности, $Z=Z(\xi)$, $G=G(\xi)$, $\varepsilon=\varepsilon(\xi)$, $\mu=\mu(\xi)$, $\Delta=\Delta(\xi)$.

Лемма **1.** Параметры α_1,α_2 определяются формулами
$$\alpha_1=(\mathbf{l},\mathbf{m}),\ \alpha_2=(\mathbf{l},\mathbf{v}),$$
где $\mathbf{l}=(\alpha_1',\alpha_2',\beta)$ - волновой вектор поля (3), $\beta=iv^{(1)}$

Доказательство. Для поля (3) функцию
$$\Phi(-)=\exp(i\alpha_1'x+i\alpha_2'y+i\beta z) \tag{6}$$
запишем через координаты *m,v,n* локальной декартовой системы координат $\xi m\nu n$. Декартовы системы координат *Oxyz* и $\xi m\nu n$ связаны преобразованием
$$x=S_{11}m+S_{12}\nu+S_{13}n+\xi_1,$$
$$y=S_{21}m+S_{22}\nu+S_{23}n+\xi_2, \tag{7}$$
$$z=S_{31}m+S_{32}\nu+S_{33}n+\xi_3.$$
Орты m $=(S_{11},S_{21},S_{31})$, $\mathbf{v}=(S_{12},S_{22},S_{32})$ касательны к поверхности Г в точке ξ Подставляя (7) в (6), получим
$$\Phi(-)=\exp(i\alpha_1m+i\alpha_2\nu+i\alpha_3n),$$
где $\alpha_1=\alpha_1'S_{11}+\alpha_2'S_{21}+\beta S_{31}=(\mathbf{l},\mathbf{m})$, $\alpha_2=\alpha_1'S_{12}+\alpha_2'S_{22}+\beta S_{32}=(\mathbf{l},\mathbf{v})$. ■

В дальнейшем в качестве оболочки *D* рассмотрим цилиндрическую бесконечно протяженную вдоль оси *Oz* оболочку. Пусть γ - контур сечения цилиндрической поверхности Г плоскостью $z=0$. При этом $\mathbf{m}=\boldsymbol{e}_z$, $\mathbf{v}=(\nu_1,\nu_2,0)$ - единичный касательный к контуру γ вектор, $\mathbf{n}=(-\nu_2,\nu_1,0)$ - внутренний единичный вектор, ортогональный к контуру γ в точке $\xi\in\gamma$

Как видно, первичное поле имеет структуру
$$\boldsymbol{E}_0=(\dot E_{0x}\boldsymbol{e}_x+\dot E_{0y}\boldsymbol{e}_y+u_0(x,y)\boldsymbol{e}_z)e^{i\beta z},\ \boldsymbol{H}_0=(\dot H_{0x}\boldsymbol{e}_x+\dot H_{0y}\boldsymbol{e}_y+v_0(x,y)\boldsymbol{e}_z)e^{i\beta z},$$
где $u_0=\dfrac{\lambda'B}{k^{(1)}}\exp(i\alpha'_1x+i\alpha'_2y)$, $\quad v_0=\dfrac{\lambda'A}{i\omega\mu_1}\exp(i\alpha_1'x+i\alpha_2'y)$.

Следует, что поля в областях D_j имеют такую же структуру [9, с. 9]:
$$\boldsymbol{E}_1=(\dot E_{1x}\boldsymbol{e}_x+\dot E_{1y}\boldsymbol{e}_y+u_1(x,y)\boldsymbol{e}_z)e^{i\beta z},\ \boldsymbol{H}_1=(\dot H_{1x}\boldsymbol{e}_x+\dot H_{1y}\boldsymbol{e}_y+v_1(x,y)\boldsymbol{e}_z)e^{i\beta z}, \tag{8}$$
$$\boldsymbol{E}_2=(\dot E_{2x}\boldsymbol{e}_x+\dot E_{2y}\boldsymbol{e}_y+u_2(x,y)\boldsymbol{e}_z)e^{i\beta z},\ \boldsymbol{H}_2=(\dot H_{2x}\boldsymbol{e}_x+\dot H_{2y}\boldsymbol{e}_y+v_2(x,y)\boldsymbol{e}_z)e^{i\beta z},$$

$u_1 = u_0 + u_1'$, $v_1 = v_0 + v_1'$, где потенциалы u_j, v_j удовлетворяют уравнениям Гельмгольца на плоскости $\Delta w_j + a_j^{\,2} w_j = 0$, $a_j^{\,2} = (k^{(j)})^2 - \beta^2$.

Лемма 2. Для потенциалов u_j, v_j электромагнитного поля на контуре γ цилиндрической достаточно гладкой поверхности Г, моделирующей оболочку из композитного материала, выполнены граничные условия сопряжения

$$\begin{aligned}
u_2 &= (A_{11}^{11} u_1 + A_{11}^{12} \dot{E}_{1\nu} + A_{12}^{11} v_1 + A_{12}^{12} \dot{H}_{1\nu})\Big|_{\xi\in\gamma},\\
\dot{E}_{2\nu} &= (A_{11}^{21} u_1 + A_{11}^{22} \dot{E}_{1\nu} + A_{12}^{21} v_1 + A_{12}^{22} \dot{H}_{1\nu})\Big|_{\xi\in\gamma},\\
v_2 &= (A_{21}^{11} u_1 + A_{21}^{12} \dot{E}_{1\nu} + A_{22}^{11} v_1 + A_{22}^{12} \dot{H}_{1\nu})\Big|_{\xi\in\gamma},\\
\dot{H}_{2\nu} &= (A_{21}^{21} u_1 + A_{21}^{22} \dot{E}_{1\nu} + A_{22}^{21} v_1 + A_{22}^{22} \dot{H}_{1\nu})\Big|_{\xi\in\gamma},
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\dot{E}_{j\nu} = c^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{v}_\xi} + b^{(j)} \frac{\partial v_j}{\partial \mathbf{n}_\xi}, \quad \dot{H}_{j\nu} = c^{(j)} \frac{\partial v_j}{\partial \mathbf{v}_\xi} - a^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}_\xi},$$
$$c^{(j)} = i\beta / a_j^2, \; a^{(j)} = i\omega\varepsilon_j / a_j^2, \; b^{(j)} = i\omega\mu_j / a_j^2;$$

коэффициенты A_{lr}^{js} определяются формулами (5), где $\alpha_1 = \beta = i\nu^{(1)}$, $\alpha_2 = \nu_1 \alpha_1' + \nu_2 \alpha_2'$.

Правые части в равенствах (9) имеют операторный вид

$$f_s = D_s(u_1(\xi), v_1(\xi))\Big|_{\xi\in\gamma}, \; s = \overline{1,4}.$$

Доказательство. Рассмотрим граничные условия (4) для цилиндрической поверхности Г и опустим общий множитель $e^{i\beta z}$, учитывая структуру полей (8). При m = $\boldsymbol{e}_z$ пс ... но, компоненты электромагнитн ... $, v_j$ с помощью формул [6, с. 46

$$\dot{E}_{jx} = c^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b^{(j)} \frac{\partial v_j}{\partial y}, \; \dot{E}_{jy} = c^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial y} - b^{(j)} \frac{\partial v_j}{\partial x},$$
$$\dot{H}_{jx} = c^{(j)} \frac{\partial v_j}{\partial x} - a^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial y}, \; \dot{H}_{jy} = c^{(j)} \frac{\partial v_j}{\partial y} + a^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial x}.$$

Вычисляя $\dot{E}_{j\nu} = (\dot{\boldsymbol{E}}_j, \mathbf{v})$, $\dot{H}_{j\nu} = (\dot{\boldsymbol{H}}_j, \mathbf{v})$, получим требуемые дифференциальные выражения для граничных условий (9). Параметры $\alpha_1 = \alpha_1(\xi)$, $\alpha_2 = \alpha_2(\xi)$ в формулах (5) определяются на основании леммы 1 и зависят от точки $\xi \in \gamma$. ■

Сформулируем задачу экранирования для потенциалов.

Задача 2. Требуется определить потенциалы $w_1 = u_1', v_1' \in C^2(D_1) \bigcap C^1(\overline{D}_1)$, $w_2 = u_2, v_2 \in C^2(D_2) \bigcap C^1(\overline{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям на плоскости

$$\Delta w_j + a_j^{\,2} w_j = 0 \text{ в } D_j, \tag{10}$$

граничным условиям (9)

$$\lim_{\rho\to\infty} \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial w_1'}{\partial \rho} - i a_1 w_1'\right) = 0, \tag{11}$$

где ρ - радиальная координата на плоскости, $a_1 = \sqrt{(k^{(1)})^2 - \beta^2}$, $0 \le \arg a_1 < \pi$.

Для численного решения краевой задачи (10), (9), (11) сведем ее к системе интегральных уравнений.

Интегральные уравнения

Модель. Проникновение плоского электромагнитного поля внутрь тонкостенной цилиндрической оболочки из композитного материала моделируется системой интегральных уравнений

$$a_{11}\varphi_1(\xi)+a_{12}\psi_1(\xi)=\int\limits_{\gamma}[K_{11}\varphi_1(\eta)+K_{12}\psi_1(\eta)+K_{13}\varphi_2(\eta)]dl_\eta+F_1(\xi),\quad \xi\in\gamma,$$
$$a_{21}\varphi_1(\xi)+a_{22}\psi_1(\xi)+a_{24}\psi_2(\xi)=\int\limits_{\gamma}[K_{21}\varphi_1(\eta)+K_{22}\psi_1(\eta)+K_{23}\varphi_2(\eta)+K_{24}\psi_2(\eta)]dl_\eta+F_2(\xi),$$
$$a_{31}\varphi_1(\xi)+a_{32}\psi_1(\xi)=\int\limits_{\gamma}[K_{31}\varphi_1(\eta)+K_{32}\psi_1(\eta)+K_{34}\psi_2(\eta)]dl_\eta+F_3(\xi),\qquad (12)$$
$$a_{41}\varphi_1(\xi)+a_{42}\psi_1(\xi)+a_{43}\varphi_2(\xi)=\int\limits_{\gamma}[K_{41}\varphi_1(\eta)+K_{42}\psi_1(\eta)+K_{43}\varphi_2(\eta)+K_{44}\psi_2(\eta)]dl_\eta+F_4(\xi),$$

где $\varphi_j(\xi),\psi_j(\xi)$ – неизвестные функции,

$$a_{11}(\xi)=\pi a^{(1)}A_{12}^{12}(\xi),\quad a_{12}(\xi)=-\pi b^{(1)}A_{11}^{12}(\xi),$$
$$a_{21}(\xi)=\pi a^{(1)}A_{12}^{22}(\xi),\quad a_{22}(\xi)=-\pi b^{(1)}A_{11}^{22}(\xi),\quad a_{24}=-\pi b^{(2)},$$
$$a_{31}(\xi)=\pi a^{(1)}A_{22}^{12}(\xi),\quad a_{32}(\xi)=-\pi b^{(1)}A_{21}^{12}(\xi),$$
$$a_{41}(\xi)=\pi a^{(1)}A_{22}^{22}(\xi),\quad a_{42}(\xi)=-\pi b^{(1)}A_{21}^{22}(\xi),\quad a_{43}=\pi a^{(2)},$$
$$K_{11}(\xi,\eta)=A_{11}^{11}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{11}^{12}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)-a^{(1)}A_{12}^{12}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{12}(\xi,\eta)=A_{12}^{11}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{12}^{12}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)+b^{(1)}A_{11}^{12}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{13}(\xi,\eta)=-G_2(\xi,\eta),$$
$$K_{21}(\xi,\eta)=A_{11}^{21}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{11}^{22}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)-a^{(1)}A_{12}^{22}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{22}(\xi,\eta)=A_{12}^{21}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{12}^{22}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)+b^{(1)}A_{11}^{22}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{23}(\xi,\eta)=-c^{(2)}G_{2\nu}(\xi,\eta),\quad K_{24}(\xi,\eta)=-b^{(2)}G_{2n}(\xi,\eta),$$
$$K_{31}(\xi,\eta)=A_{21}^{11}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{21}^{12}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)-a^{(1)}A_{22}^{12}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{32}(\xi,\eta)=A_{22}^{11}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{22}^{12}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)+b^{(1)}A_{21}^{12}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{34}(\xi,\eta)=-G_2(\xi,\eta),$$
$$K_{41}(\xi,\eta)=A_{21}^{21}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{21}^{22}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)-a^{(1)}A_{22}^{22}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{42}(\xi,\eta)=A_{22}^{21}(\xi)G_1(\xi,\eta)+c^{(1)}A_{22}^{22}(\xi)G_{1\nu}(\xi,\eta)+b^{(1)}A_{21}^{22}(\xi)G_{1n}(\xi,\eta),$$
$$K_{43}(\xi,\eta)=a^{(2)}G_{2n}(\xi,\eta),\quad K_{44}(\xi,\eta)=c^{(2)}G_{2\nu}(\xi,\eta),$$
$$G_{jn}(\xi,\eta)=\frac{\partial G_j(\xi,\eta)}{\partial \mathbf{n}_\xi},\quad G_{j\nu}(\xi,\eta)=\frac{\partial G_j(\xi,\eta)}{\partial \mathbf{v}_\xi},\quad F_s(\xi)=D_s(u_0(\xi),v_0(\xi))\big|_{\xi\in\gamma},$$

dl_η - дифференциал длины контура γ.

Обоснование. Воспользуемся функцией Грина [9] для уравнения Гельмгольца на плоскости

$$G_j(\xi,\eta)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(a_jR_{\xi\eta}),\quad R_{\xi\eta}=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2},$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ - точки на плоскости Oxy, $a_j=\sqrt{(k^{(j)})^2-\beta^2}$, $0\le\arg a_j<\pi$.

Решения уравнений (10) представим в виде потенциалов простого слоя

$$u_1'(M)=\int\limits_{\gamma}\varphi_1(\eta)G_1(M,\eta)dl_\eta,\quad v_1'(M)=\int\limits_{\gamma}\psi_1(\eta)G_1(M,\eta)dl_\eta,\quad M\in D_1,\qquad (13)$$
$$u_2(M)=\int\limits_{\gamma}\varphi_2(\eta)G_2(M,\eta)dl_\eta,\quad v_2(M)=\int\limits_{\gamma}\psi_2(\eta)G_2(M,\eta)dl_\eta,\quad M\in D_2,$$

где предполагается, что γ является дважды непрерывно дифференцируемой линией.

Условия излучения (11) для потенциалов (13) выполнены. Применим теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя [9] и вычислим производные по нормали n и касательному вектору v [9, 10] в точке $M=\xi\in\gamma$. Подставляя полученные выражения в граничные условия (9), придем к интегральным уравнениям (12), для которых интегралы понимаются в смысле главного значения.

1. Li L.-W., You D., Leong M.-S. et al. // Progress in Electromagnetics Research, PIER 26. 2000. P. 249.
2. Неганов В.А., Осипов О.В. // Письма в «Журнал технической физики». 2000. Т. 26. Вып. 1.С. 77.
3. Engheta N., Kowarz M.W. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67(2). P. 1057.
4. Ерофеенко В.Т., Тавакколи Д.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. № 2. С. 56.
5. Rojas R.G. // J. Electromagn. Waves Applic. 1992. Vol. 6(5/6). P. 733.
6. Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1999.
7. Ерофеенко В.Т., Кравченко В.Ф., Крючков А.Н. // Радиотехника. 1995. № 6. С. 49.
8. Халиуллин Д.Я., Третьяков С.А. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 1. С. 16.
9. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. М., 1987.
10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

Поступила в редакцию 05.10.07.

Джахангир Паша Тавакколи - аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель - В.Т. Ерофеенко.

Виктор Тихонович Ерофеенко - доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики.