



УДК 539.12:530.145

В.А. ПЛЕТЮХОВ, В.И. СТРАЖЕВ

БЕЗМАССОВЫЕ ЧАСТИЦЫ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ*

The different formulations of the wave equations for particles with the spin values 0 and 1 are considered on the basis of the theory of relativistic wave equations.

In the massless case it was shown that the general approach can be formulated to the consideration of such field theories. The particular cases are discussed, which are known in the literature as the notoph (by Ogievetsky and Polubarinov) and Kalb - Ramond field.

1. Введение

В теории поля частицы с целым спином S описывают обычно полностью симметричным тензором $A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_S}$ ранга S [1], удовлетворяющим уравнению Клейна - Гордона

$$\square A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_S} = m^2 A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_S} \quad (1.1)$$

($\square$ - оператор Даламбера, постоянная m пропорциональна массе частицы) и дополнительными условиями:

$$\frac{\partial A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_S}}{\partial x_{\mu_1}} = 0, \quad A_{\mu_1 \mu_1 \dots \mu_S} = 0.$$

Описание безмассовых частиц в этом формализме осуществляется путем предельного перехода $m \rightarrow 0$ в уравнении (1.1), т. е. замены уравнения Клейна - Гордона на уравнение Даламбера. Безмассовый аналог исходной массивной частицы со спином S обладает спиральностью $\pm S$; промежуточные значения спиральностиTM $\pm (S-1), \dots, 0$ в данном подходе не рассматриваются. Возникает вопрос: можно ли от описания массивной частицы со спином S переходить к описанию безмассовых частиц со значениями спиральности меньшими, чем $\pm S$, сохраняя преамблентность между теориями (в частности, возможность обратного перехода).

В [2] указано на возможность использовать для этой цели не только полностью симметричные тензоры, но и тензоры различных рангов, симметризованные по другим схемам Юнга и подчиняющиеся уравнениям второго порядка с дополнительными условиями. Для описания безмассовой частицы со спиральностью 0 (нотоп) в [2] предлагается, например, система уравнений:

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (1.2)$$

$$\partial_\mu \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (1.3)$$

где $\psi_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор второго ранга. Но если в [2] ее рассматривают как частицу, подобно фотону переносящую во взаимодействиях спин 1, то в других работах (см., например, [3, 4]) частица, описываемая уравнениями (1.2), (1.3), идентифицируется как безмассовый скалярный мезон, и делается вывод о существовании феномена спинового скачка (spin jumping), т. е. изменения спина при предельном переходе от массивной частицы к безмассовой и обратно.

* Настоящая работа открывает цикл статей, посвященных проблеме описания безмассовых полей с максимальным спином 1.

В настоящей работе при использовании подхода Гельфанда - Яглома [5] и стандартной матричной формы релятивистских волновых уравнений (РВУ) на основе формализма обобщенных РВУ первого порядка [6] предложен иной способ получения из теории массивной частицы с целым спином S уравнений для безмассовых частиц со спиральностями $\pm S, \pm (S - 1), \dots, 0$. Предлагаемый подход обладает общностью и в нем отсутствует феномен спинового скачка. В п. 3, 4 он будет продемонстрирован на примере частицы со спином 1.

2. Некоторые сведения из теории обобщенных релятивистских волновых уравнений

Всякая система линейных дифференциальных уравнений любого порядка с постоянными коэффициентами может быть приведена к системе первого порядка и записана в матричной форме

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \gamma_0) \Psi = 0, \quad (2.1)$$

где γ_μ, γ_0 - некоторые матрицы, Ψ - многокомпонентная волновая функция. Если матрица γ_0 неособенная, то умножением на $m\gamma_0^{-1}$ уравнение (2.1) можно привести к виду (I - единичная матрица)

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + mI) \Psi = 0. \quad (2.2)$$

Применяя уравнение (2.1) к описанию элементарных частиц, обычно накладывают на выбор матриц γ_μ, γ_0 и функцию Ψ следующие условия [5, 6]:

- (1) инвариантность уравнения (2.1) относительно преобразований собственной группы Лоренца;
- (2) инвариантность относительно отражений;
- (3) возможность получения уравнения (2.1) из вариационного принципа.

Из требования (1) и условия нераспадения уравнения (2.1) по группе Лоренца вытекает, что функция Ψ должна преобразовываться по некоторому набору зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца, образующих так называемую схему зацеплений. (Напомним, что представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$

называются зацепляющимися, если $l'_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}, l'_2 = l_2 \pm \frac{1}{2}$.) Если матрица γ_0 неособенная, то уравнение (2.1), сводимое к виду (2.2), описывает массивную частицу. При этом параметр m пропорционален массе частицы. В случае, когда матрица γ_0 особенная ($|\gamma_0| = 0$), уравнение (2.1) не сводимо к (2.2) и описывает безмассовую частицу*.

Уравнения вида (2.1), удовлетворяющие условиям (1) - (3), где матрица γ_0 может быть как неособенной, так и особенной, в том числе и нулевой, называются обобщенными РВУ первого порядка [6].

Для исследования спиновых свойств РВУ удобно использовать базис, введенный в работе [5]. Матрица γ_4 , которая играет основную роль в установлении спиновой структуры поля (частицы), имеет вид прямой суммы

$$\gamma_4 = \bigoplus_S C^S \otimes I_{2S+1}, \quad (2.3)$$

где I_{2S+1} - единичная матрица размерности $2S+1$, C^S - спиновый блок, соответствующий спину S в том смысле, что если среди корней $\pm \lambda_i^{(S)}$ данного блока имеются ненулевые, то в массивном случае частица обладает спином S . Возможные значения массы m_i выражаются через параметр m и корни $\lambda_i^{(S)}$ по формуле

В последние годы в литературе (см., например, [7]) обсуждаются массивные калибровочно-инвариантные теории, которые, будучи записанными в виде (2.1), соответствуют особенной матрице γ_0 . Но компоненты волновой функции Ψ разделяются на наблюдаемые (напряженности) и ненаблюдаемые (потенциалы), что свойственно безмассовым теориям. В силу дифференциации полевых компонент и вытекающей отсюда калибровочной инвариантности уравнение (2.1) можно привести к обычному для массивных частиц виду (2.2), но с меньшим числом компонент функции Ψ и размерностью матриц γ_μ .

$m_i = \frac{m}{|\lambda_i^{(S)}|} \quad (\hbar=c=1)$. Спиновый блок C^S в (2.3) состоит из элементов $C_{\tau\tau'}^S$, где

τ, τ' обозначают неприводимые представления группы Лоренца, которые входят в исходную схему зацеплений и зацепляются в указанном смысле. В блок C^S входят ненулевые элементы $C_{\tau\tau'}^S$, соответствующие зацепляющимся представлениям

$\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l_1', l_2')$, которые удовлетворяют условиям

$$|l_1 - l_2| \leq S \leq |l_1 + l_2|, \quad |l_1' - l_2'| \leq S \leq |l_1' + l_2'|. \quad (2.4)$$

О представлениях, подчиняющихся условиям (2.4), говорят, что они формируют спиновый блок C^S (спин S). Очевидно, что для описания спина S на основе РВУ первого порядка в исходной схеме зацеплений должно быть, как минимум, два неприводимых зацепляющихся представления, формирующих блок C^S . Заметим еще, что числа $C_{\tau\tau'}^S$ подчиняются определенным связям, обусловленным требованиями (1) - (3). В явном виде эти связи записаны, например, в работе [5].

При переходе от уравнения (2.2) с $\lambda_i^{(S)} \neq 0$ к безмассовому пределу ($mI \rightarrow \gamma_0$, где $|\gamma_0| = 0$) можно получить, как показано в п. 3, 4, уравнения для безмассовых частиц не только со спиральностью $\pm S$, но и с ее меньшими значениями, включая нулевую. При обратном переходе ($\gamma_0 \rightarrow mI$) каждое из этих уравнений независимо от значения спиральноеTM превращается в одно и то же исходное уравнение для массивной частицы со спином S , поскольку вид остальных матриц γ_μ , в том числе и γ_4 , при таких переходах не затрагивается.

3. Векторное поле и (дуальный) нотоф

Рассмотрим схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$(0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 0), \quad (3.1)$$

где представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ соответствует 4-вектору, представление $(0, 1) \oplus (1, 0)$ - антисимметричному тензору второго ранга, черта означает зацепление данных представлений. Наиболее общий вид системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в тензорной форме и удовлетворяющей требованиям (1) - (3), предъявляемым к РВУ, таков:

$$\partial_\nu \psi_{\mu\nu} + a \psi_\mu = 0, \quad (3.2)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + b \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (3.3)$$

где a, b — произвольные постоянные коэффициенты. Системе (3.2), (3.3) можно сопоставить три различных, не сводимых друг к другу и не распадающихся по группе Лоренца РВУ.

1. Положив в (3.2), (3.3)

$$a = b = m,$$

приходим к системе уравнений

$$\partial_\nu \psi_{\mu\nu} + m \psi_\mu = 0, \quad (3.4)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + m \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (3.5)$$

т. е. к хорошо известной системе Даффина - Кеммера для массивной частицы со спином 1. В уравнениях (3.4), (3.5) тензоры ψ_μ и $\psi_{\mu\nu}$ рассматриваются как равноправные полевые компоненты без разделения на «потенциалы» и «напряженности».

2. Полагая в (3.2), (3.3)

$$a = 0, b = 1,$$

получим систему

$$\partial_\nu \Psi_{\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{\mu\nu} = 0. \quad (3.7)$$

Если трактовать Ψ_μ как потенциал, а $\Psi_{\mu\nu}$ - как напряженность, то уравнения (3.6), (3.7) представляют систему уравнений Максвелла, описывающую фотон - безмассовую частицу с поляризациями ± 1 .

3. Если в (3.2), (3.3)

$$a = 1,6 = 0,$$

то имеем

$$\partial_\nu \Psi_{\mu\nu} + \Psi_\mu = 0, \quad (3.8)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu = 0. \quad (3.9)$$

Если по-прежнему трактовать Ψ_μ как потенциал, а $\Psi_{\mu\nu}$ - как напряженность, то система (3.8), (3.9) становится неопределенной в том смысле, что напряженность не может быть выражена через потенциал.

Но если принять иную трактовку входящих в (3.8), (3.9) величин, а именно рассматривать в качестве напряженности 4-вектор Ψ_μ , а в качестве потенциала - тензор $\Psi_{\mu\nu}$, то ситуация существенно изменяется. В этом случае система (3.8), (3.9) становится вполне определенной. Тогда уравнение (3.8) выступает как определение напряженности через потенциал, а (3.9) - как уравнение движения. (Заметим, что в уравнениях (3.6), (3.7) первое выступает как уравнение движения, а второе - как определение напряженности.) Проанализируем ее смысл.

Из уравнения (3.8) следует, что

$$\partial_\mu \Psi_\mu = 0. \quad (3.10)$$

С учетом (3.10) из уравнения движения (3.9) можно получить уравнение Даламбера для Ψ_μ :

$$\square \Psi_\mu = 0. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.8) - (3.11) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta \Psi_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (3.12)$$

где калибровочная функция Λ_μ ограничена условием

$$\square \Lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu = 0. \quad (3.13)$$

Уравнения движения (3.9) - (3.11) и калибровочная инвариантность (3.12), (3.13) совпадают с соответствующими соотношениями теории Огиевского и Полубаринова [2], описывающей нотоф. Единственное отличие состоит в определении напряженности через потенциал $\Psi_{\dots}$: согласно (3.8) Ψ_μ является истинным вектором, в то время как в [2] на $\tilde{\Psi}_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Psi_{\alpha\beta}$ ется по определению

($\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — тензор Леви-Чивита, $\varepsilon_{1234} = -/$) и является, следовательно, псевдовектором. На числе степеней свободы, соответствующих обеим теориям, это различие не сказывается. Таким образом, в соответствии с принятой трактовкой полевых компонент система (3.8), (3.9) описывает безмассовую частицу со спиральностью 0 (следя [2], будем ее также называть нотрфом, или дуальным нотофом).

Сопоставим уравнения (3.8), (3.9) с уравнениями Максвелла (3.6), (3.7) с точки зрения их взаимной дополнителъности в описании как безмассовых частиц, так и массивной частицы со спином 1. Обратимся к системе (3.2), (3.3), которую запишем в виде

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + a \gamma_0^{(1)} + b \gamma_0^{(2)} \right) \Psi = 0, \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) описывает массивную векторную частицу с массой $m = \sqrt{ab}$. Полагая в (3.14) $a = 0$ или $b = 0$, получаем соответственно безмассовые РВУ для фотона и нотофа. Матрицы γ_μ в обоих случаях одинаковы. Пронумеровав представления, входящие в схему зацеплений (3.1): $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 1$, $(0, 1) \sim 2$, $(1, 0) \sim 3$ и накладывая ограничения на элементы $C_{\alpha\beta}^i$ спинового блока C^i , вытекающие из требований (1) - (3), получим следующий вид матрицы γ^4 в базисе Гельфанда - Яглома [5]:

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & & \\ & C^1 \times I_3 & \end{pmatrix}, C^0 = 0, C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Отсюда следует, во-первых, что в рамках используемой схемы зацеплений (3.1) спиральность безмассовой частицы определяется исключительно структурой матрицы γ_0 (соотношением числа нулей и единиц по диагонали): в случае $a = 0$ матрица $\gamma_0^{(2)}$ «вырезает» одну из трех спиновых степеней свободы, соответствующих блоку $C^1 \times I_3$ матрицы γ_4 ; в случае $b = 0$ матрица $\gamma_0^{(1)}$ «вырезает» две степени свободы, опять-таки связанные с блоком $C^1 \times I_3$. Во-вторых, остающиеся степени свободы в обоих случаях описываются спиновым блоком $C^1 \times I_3$. В-третьих, спиновый блок C^0 для всех трех теорий (массивной и двух безмассовых) остается нулевым и ему не соответствуют физические состояния. И так же как виртуальный фотон, который обладает ненулевой массой и, как следствие, имеет дополнительное состояние с нулевой спиральностью (проекцией спина), виртуальный нотоф приобретает дополнительно состояния со спиральностью ± 1 , т. е. нотоф, как и фотон, переносит во взаимодействиях спин 1.

Из сказанного вытекает, что нет оснований называть безмассовым скалярным мезоном безмассовую частицу со спиральностью 0, описываемую набором представлений, входящих в схему зацеплений (3.1). Ее тензорный потенциал $\Psi_{\mu\nu}$ действительно имеет одну независимую компоненту, но это еще не означает, что мы имеем дело с описанием скалярной частицы. Потенциал скалярного поля должен быть инвариантом относительно преобразований группы вращений, и соответствующее РВУ первого порядка должно строиться на основе набора зацепляющихся представлений группы Лоренца, включающего, как указывалось в п. 2, не менее двух представлений, содержащих спин 0. Схема зацеплений (3.1) ни одному из этих требований не удовлетворяет. Простейший набор представлений, на основе которого может быть построена теория РВУ безмассового скалярного мезона, состоит, как известно, из скалярного $(0, 0)$ и векторного $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ представлений.

При предельном переходе от описания массивной частицы к безмассовым и обратно спиновые «скачки» отсутствуют. Такие переходы сводятся к преобразованию только матрицы γ_0 и не затрагивают матрицу γ_4 , которая определяет спиновую структуру полей (частиц). Если переходы затрагивают матрицу γ_4 , то это означает, что речь идет о новой теории, не связанной, по существу, с исходной.

4. Псевдовекторное поле и нотоф

Вернемся к схеме зацеплений (3.1) и рассмотрим представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ как псевдовекторное. Общий вид системы тензорных линейных уравнений первого порядка, удовлетворяющих требованиям (1) - (3), будет следующий:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Psi_{\alpha\beta} + a_1 \tilde{\Psi}_\mu = 0, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\Psi}_\beta + b_1 \Psi_{\mu\nu} = 0, \quad (4.2)$$

где $\tilde{\Psi}_\mu$ - 4-псевдовектор.

Возможны три различных варианта выбора коэффициентов a_1 и b_1 .

$$1. a_1 = b_1 = m.$$

В этом случае рассматривается теория массивной псевдовекторной частицы.

$$2. a_1 = 0, b_1 = 1.$$

Имеем

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Psi_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\Psi}_\beta + \Psi_{\mu\nu} = 0. \quad (4.4)$$

Свертывая уравнение (4.3) с тензором $\varepsilon_{\gamma\rho\sigma\mu}$ и вводя в уравнение (4.4) антисимметричный тензор третьего ранга $\Psi_{\mu\nu\alpha}$, дуально сопряженный псевдовектору $\tilde{\Psi}_\beta$, т. е. $\tilde{\Psi}_\beta = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \Psi_{\mu\nu\alpha}$, получим вместо (4.3), (4.4) систему уравнений

$$\partial_\gamma \Psi_{\rho\sigma} + \partial_\sigma \Psi_{\gamma\rho} + \partial_\rho \Psi_{\sigma\gamma} = 0, \quad (4.5)$$

$$\partial_\mu \Psi_{\mu\nu\alpha} + \Psi_{\nu\alpha} = 0. \quad (4.6)$$

Система (4.5), (4.6), так же как и (4.3), (4.4), может описывать электромагнитное поле (т. е. безмассовую частицу со спиральностью ± 1), если трактовать в ней $\Psi_{\mu\nu}$ как тензор напряженности, а $\Psi_{\mu\nu\alpha} (\tilde{\Psi}_\beta)$ - как потенциал. Иными словами, это - электродинамика с псевдовекторным потенциалом. Дуальность двух таких формулировок теории электромагнитного поля проявляется и в том, что если в максвелловской системе (3.6), (3.7) уравнение (3.6) представляет собой уравнение движения, а вытекающее из (3.7) уравнение (4.5) - тождества Бианки, то в системе (4.5), (4.6) уравнение (4.5) играет роль уравнения движения, а эквивалентное (4.6) уравнение (3.6) - роль тождества Бианки.

$$3. a_1 = 1, b_1 = 0.$$

Система (4.1), (4.2) приводится к виду

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Psi_{\alpha\beta} + \tilde{\Psi}_\mu = 0, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\Psi}_\beta = 0. \quad (4.8)$$

Если в системе (4.7), (4.8) рассматривать $\Psi_{\mu\nu}$ как тензор-потенциал, а $\tilde{\Psi}_\mu$ - как напряженность, то она в точности приводит к теории нотофа Огиевского - Полубаринова [2], записанной в форме уравнений первого порядка. Переходя в (4.7), (4.8) от псевдовектора $\tilde{\Psi}_\mu$ к тензору $\Psi_{\gamma\sigma\rho}$, получим

$$\partial_\gamma \Psi_{\sigma\rho} + \partial_\rho \Psi_{\gamma\sigma} + \partial_\sigma \Psi_{\rho\gamma} + \Psi_{\gamma\sigma\rho} = 0, \quad (4.9)$$

$$\partial_\mu \Psi_{\mu\nu\alpha} = 0. \quad (4.10)$$

Система (4.9), (4.10) была предложена в работе Кальба - Рамонда [3] в качестве теории безмассовой частицы со спиральностью 0, осуществляющей взаимодействие между замкнутыми струнами, сопоставляемыми заряженным частицам, в пространстве размерности $d = 4$. При рассмотрении напряженности в виде антисимметричного тензора третьего ранга она совпадает с теорией нотофа Огиевского - Полубаринова.

Перепишем теперь систему (4.7), (4.8) в виде

$$\partial_\nu \tilde{\Psi}_{\mu\nu} + \tilde{\Psi}_\mu = 0, \quad (4.11)$$

$$-\partial_\mu \tilde{\Psi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\Psi}_\mu = 0, \quad (4.12)$$

где $\tilde{\Psi}_{\mu\nu}$ - тензор, дуально сопряженный $\Psi_{\mu\nu}$: $\tilde{\Psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta}$. Из системы (4.11),

(4.12) следуют уравнения для напряженности $\tilde{\Psi}_\mu$:

$$\partial_\mu \tilde{\Psi}_\mu = 0, \quad (4.13)$$

$$\square \tilde{\Psi}_\mu = 0. \quad (4.14)$$

Сравнивая уравнения (4.12), (4.13), (4.14) и (3.9), (3.10), (3.11), видим, что на уровне напряженностей теории дуальны по отношению друг к другу.

В теории нотофа, основанной на уравнениях (4.9), (4.10), постулируется следующее уравнение второго порядка [2]:

$$\square \Psi_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\alpha \Psi_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\alpha \Psi_{\mu\alpha} = 0. \quad (4.15)$$

(Нетрудно проверить, что (4.15) коррелирует с системой (4.9), (4.10), а значит, и с (4.7), (4.8).)

Уравнение (4.15) инвариантно относительно калибровочных преобразований (3.12), где Λ_μ - произвольная функция. Используя произвольный выбор потенциала $\Psi_{\mu\nu}$, можно получить дополнительное условие $\partial_\nu \Psi_{\mu\nu} = 0$. Оно равносильно тому, что

$$\partial_\mu \partial_\alpha \Psi_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\alpha \Psi_{\mu\alpha} = 0. \quad (4.16)$$

В результате уравнение (4.15) распадается на уравнение

$$\square \Psi_{\mu\nu} = 0 \quad (4.17)$$

и дополнительное условие (4.16). Произвольный выбор калибровочной функции Λ_μ ограничен при этом условием (3.13). Из уравнений (3.8), (3.9) непосредственно вытекает уравнение второго порядка (4.16). Калибровочная инвариантность теории позволяет ввести для потенциала $\Psi_{\mu\nu}$ дополнительное условие (4.17). Таким образом, в обоих вариантах теории безмассовой частицы со спиральностью 0 приходим к одинаковым уравнениям и для потенциалов. Но если для системы (3.8), (3.9) уравнение второго порядка (4.16) выступает как основное уравнение, а (4.17) - как дополнительное условие, то в теории нотофа, основанной на системе (4.7), (4.8), уравнение (4.17) выступает как основное, а (4.16) - как дополнительное условие.

В матричном подходе анализ взаимной дополнительности теории нотофа (4.7), (4.8) и теории (4.5), (4.6), описывающей безмассовую частицу со спиральностью ± 1 , проводится по той же схеме, которая была применена в п. 3 при анализе теорий безмассовых частиц, описываемых уравнениями (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9). Единственное отличие заключается в виде спинового блока

$$C^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(сравните с (3.15)), которое возникает вследствие различия трансформационных свойств напряженностей Ψ_μ и $\tilde{\Psi}_\mu(\Psi_{\mu\nu\alpha})$ относительно пространственных отражений. Но это не влияет на ход рассуждений и окончательные выводы, которые аналогичны полученным в п. 3.

5. Совместное описание фотона и нотофа

В [3] тензор-потенциал $\Psi_{\mu\nu}$ вводится как полевой тензор, описывающий взаимодействие замкнутых струн в пространстве размерности $d=4$. В случае открытых струн недостаточно рассмотрения только этого поля. Сопоставляя концы струны точечным зарядам, необходимо ввести вектор-потенциал Ψ_μ (в [3] используется обозначение B_μ), соответствующий электромагнитному полю. И поскольку струна сопоставляется единому физическому объекту, естественно совместное описание этих полей в рамках не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений.

В [3] (см. также [4]) предлагается механизм такого объединения, который заключается в калибровочно-инвариантном смешивании указанных полей, в результате чего возникает массивное поле со спином 1. Данная схема, получившая в литературе название $\hat{B} \wedge \hat{F}$ -теории, не является единственно возможной.

Рассмотрим следующую схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$\begin{array}{ccc}
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \\
 (0, 1) & \swarrow \quad \searrow & (1, 0) \\
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' &
 \end{array} \quad (5.1)$$

где $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ соответствует векторному представлению, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ - псевдовекторному, или антисимметричному тензору третьего ранга. Пронумеруем входящие в (5.1) представления: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 1$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 2$, $(0, 1) \sim 3$, $(1, 0) \sim 4$. В соответствии с требованиями (1) - (3) можно построить РВУ (2.1) с нулевой массой, где Ψ 14-компонентная волновая функция $\Psi = (\Psi_\mu, \Psi_{\mu\nu\alpha}, \Psi_{\mu\nu})$, а матрицы γ_4, γ_0 в базисе Гельфанда - Яглома имеют вид

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & \\ & C^1 \times I_3 \end{pmatrix}, \quad C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & & \\ & I_4 & \\ & & 0_6 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Структура матрицы γ_4 и вид ее спиновых блоков C^0, C^1 (5.2) указывают на то, что поле, описываемое данным уравнением, переносит спин 1, а собственные значения спинового блока C^1 (5.2) ± 1 двукратно вырождены. В контексте сказанного это соответствует совместному описанию электромагнитного поля (фотона) и поля нотофа как составляющих единого безмассового поля на основе РВУ (2.1), (5.1) - (5.3) нераспадающегося по группе Лоренца. Структура (5.3) матрицы γ_0 обеспечивает «вырезание» трех из шести состояний со спином 1, оставляя в совокупности три степени свободы на фотон и нотоф.

В тензорной форме РВУ (2.1), (5.1) - (5.3) запишется так:

$$\partial_\nu \Psi_{\mu\nu} = 0, \quad (5.4)$$

$$\partial_\mu \Psi_{\nu\alpha} + \partial_\alpha \Psi_{\mu\nu} + \partial_\nu \Psi_{\alpha\mu} + \Psi_{\mu\nu\alpha} = 0, \quad (5.5)$$

$$-\partial_\nu \Psi_\alpha + \partial_\alpha \Psi_\nu + \partial_\mu \Psi_{\mu\nu\alpha} = 0, \quad (5.6)$$

где Ψ_μ и $\Psi_{\mu\nu}$ выступают в качестве потенциалов объединенного поля. Уравнение (5.5) является определением напряженности $\Psi_{\mu\nu\alpha}$, а уравнение (5.4) играет роль дополнительного условия, накладываемого на тензор-потенциал $\Psi_{\mu\nu}$ и содержащегося изначально в системе (5.4) - (5.6). Данное условие оставляет у $\Psi_{\mu\nu}$ две независимые компоненты, при этом система (5.4) - (5.6) инвариантна относительно калибровочного преобразования (3.12), (3.13). Произвольный выбор Лч приводит к тому, что у тензор-потенциала $\Psi_{\mu\nu}$ остается одна степень свободы, которая соответствует нотофу.

Помимо преобразований (3.12), (3.13) система (5.4) - (5.6) инвариантна также относительно калибровочных преобразований $\delta \Psi_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Из уравнения (5.6) полу-

чаем уравнение второго порядка $\square \psi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0$; потенциал ψ_μ может описывать электромагнитную составляющую рассматриваемого безмассового поля.

Тогда выражение

$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu \equiv F_{\mu\nu} \quad (5.7)$$

в уравнении (5.6) описывает напряженность этой электромагнитной составляющей. Из уравнения (5.6), переписанного с учетом обозначения (5.7), т. е.

$$\partial_\mu \psi_{\nu\alpha} - F_{\nu\alpha} = 0, \quad (5.8)$$

следует, что оно представляет собой уравнение движения в системе (5.4) - (5.6). Из (5.8) видна неразрывная связь электромагнитного поля и поля нотофа в рамках предлагаемой теории (аналогично тому, как связаны электрическая и магнитная составляющие в максвелловской теории электромагнитного поля).

Итак, возможна модель объединения максвелловского электромагнитного поля и поля нотофа, которая не предполагает появление массы.

В частных случаях, когда рассматривается взаимодействие только замкнутых струн или только точечных зарядов, составляющие объединенного поля могут описываться по отдельности. Полагая в (5.4) - (5.6) $\psi_\mu = 0$, получим систему (4.9), (4.10) (для нотофа) с дополнительным условием $\partial_\nu \psi_{\mu\nu} = 0$, равносильным условию (4.16). Продифференцировав уравнение (5.8) по ∂_α , имеем

$$\partial_\alpha F_{\nu\alpha} = 0. \quad (5.9)$$

Рассматривая уравнение (5.9) совместно с (5.7) и исключая из системы (5.4) - (5.6) величины, относящиеся к телу струны, получим максвелловскую систему уравнений для фотона. Отметим также, что если перейти от уравнения (5.4) к уравнению вида

$$\partial_\nu \psi_{\mu\nu} - \psi_\mu = 0 \quad (5.10)$$

(иным выбором матрицы γ_0 , который возникает при замене $0_4 \rightarrow I_4$ в (5.3)), то система (5.10), (5.5), (5.6) приводит к совместному описанию нотофа и дуального нотофа. Иными словами, получаем дуально симметрическую формулировку безмассового поля с нулевой спиральностью. Соответствующее безмассовое состояние является двукратно вырожденным по значению четности.

* * *

Возможность существования поля Кальба - Рамонда (нотофа) имеет существенное значение для теории суперструн (см., например, [8]). Его исследованию посвящены многочисленные публикации (см., например, [9] и цитированную нами литературу). В то же время, как следует из результатов настоящей работы, в рамках теории релятивистских волновых уравнений могут быть прояснены ее существенные черты, которые при использовании только тензорного описания «ускользают» от внимания.

1. Fierz M. // Helv. Phys. Acta. 1939. Vol. 12. № 1. P. 3.
2. Огисвецкий В.И., Полубаринов И.В. // Ядерная физика. 1966. Т. 4. Вып. 1. С. 216.
3. Kalb M., Ramond P. // Phys. Rev. 1974. Vol. D 9. № 8. P. 2273.
4. Aurilia A., Takahashi Y. // Progr. Theor. Phys. 1981. Vol. 66. P. 693.
5. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
6. Федоров Ф.И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82. № 1. С. 37.
7. Harikumar E., Sivakumar M. Duality and Massive Gauge Invariant Theories (hep-th/9604181).
8. Iliesiu K., Ziehlukhin A. Tensionless string in the notoph background, Class. Quant. Grav. 1999. Vol. 16. P. 383. (hep-th/9908180); Malik R.P. Notoph gauge theory as Hodge theory (hep-th/0309245).
9. Anionm R., Ferreira C.N., Godinho C.F.L. The noncommutative U (N) Kalb - Ramond theory (hep-th/0403088); Dvoeglazov V.V. Translational and rotational properties of antisymmetric tensor field (math-ph/0009024).

Поступила в редакцию 28.06.07.

Владимир Анестиевич Плетюхов - доктор физико-математических наук, профессор, БРГУ им. А.С. Пушкина.

Василий Иванович Стражев - доктор физико-математических наук, профессор.