

Краткие сообщения

УДК 519.8

Е.Е. ГУРЕВСКИЙ, В.А. ЕМЕЛИЧЕВ

МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО ОПТИМУМА ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ НОРМЫ ГЁЛЬДЕРА

Using Helder inequality we derive the stability radius formula for the lexicographic optimum of the vector integer linear programming problem in l_p -metric.

Пусть $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \geq 1$, $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{Z}^n$, $|X| > 1$, C_i — i -я строка матрицы C , т. е. $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$, $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Постановка векторной (m -критериальной) задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) предполагает задание на множестве решений X векторного критерия Cx с частными критериями $C_i x \rightarrow \min_{x \in X}$, $i \in N_m$. Исследованию различных видов устойчивости решений такой задачи с разнообразными принципами оптимальности посвящено большое количество работ (см., например, [1-6]). В данной статье рассматривается векторная задача ЦЛП $Z^m(C)$ с лексикографическим принципом оптимальности, т. е. задача поиска лексикографического множества $L^m(C) = \{x \in X : \forall x' \in X (Cx \succ Cx')\}$, где $\succ$ — отрицание бинарного отношения $\succ$, которое задается в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ следующим образом: для любых двух различных векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$ из $\mathbf{R}^m$ справедлива формула $y \succ y' \Leftrightarrow y_k > y'_k$, где $k = \min\{i \in N_m : y_i \neq y'_i\}$. Элементы множества $L^m(C)$ называются лексикографическими оптимумами (ЛО).

Для всякого натурального числа k в действительном пространстве $\mathbf{R}^k$ зададим норму Гёльдера (l_p) $\|y\|_p = \left(\sum_{j \in N_k} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$. Будем также использовать чебышевскую норму (l_∞) $\|y\|_\infty = \max\{|y_j| : j \in N_k\}$. Как известно, норма l_p в $\mathbf{R}^k$ и норма l_q в сопряженном пространстве $(\mathbf{R}^k)^*$ связаны равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ при $1 < p < \infty$, кроме того, $q = 1$ при $p = \infty$, $q = \infty$ при $p = 1$. В дальнейшем будем считать, что областью изменения чисел p и q является интервал $[1, \infty]$. Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из всех ее элементов.

По аналогии с [4-6] радиусом устойчивости ЛО $x^0 \in L^m(C)$ в пространстве с нормой l_p назовем число $\rho_p^m(x^0, C) = \sup\{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega(\varepsilon) (x^0 \in L^m(C + C'))\}$, если $\Omega(\varepsilon) \neq \emptyset$, и $\rho_p^m(x^0, C) = 0$, если $\Omega(\varepsilon) = \emptyset$. Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_p < \varepsilon\}$.

Лемма 1. Если число $\varphi > 0$ и решения $x \neq x^0$ таковы, что выполняется неравенство

$$C_1(x - x^0) \geq \varphi \|x - x^0\|_q, \quad (1)$$

то для любой матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ справедливо соотношение $x \notin L^m(C + C')$.

Действительно, пусть, напротив, существует такая матрица $C' \in \Omega(\varphi)$, что $x \in L^m(C + C')$. Тогда верно неравенство $(C_1 + C'_1)(x - x^0) \leq 0$. Поэтому, используя неравенство Гёльдера, легко выводим $C_1(x - x^0) \leq \|C'_1\|_p \|x - x^0\|_q < \varphi \|x - x^0\|_q$, что противоречит (1).

Лемма 2. Если число $\eta > 0$ и решения $x \neq x^0$ связаны условием

$$C_1(x - x^0) < \eta \|x - x^0\|_q, \quad (2)$$

то при любом числе $\varepsilon > \eta$ существует такая матрица $C' \in \Omega(\varepsilon)$, что $x^0 \notin L^m(C + C')$.

Доказательство. Если $p = 1$, то, зафиксировав индекс $s = \arg \max \{ \|x_j - x_j^0\| : j \in N_n \}$, зададим элементы матрицы $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ по правилу $c'_{ij} = \eta \operatorname{sign}(x_j^0 - x_j)$ при $i = l, j = s$ и $c'_{ij} = 0$ при остальных индексах i, j . Если $p > 1$, то элементы матрицы $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ определим формулой

$$c'_{ij} = \begin{cases} \eta \frac{|x_j - x_j^0|^{q-1} \operatorname{sign}(x_j^0 - x_j)}{\|x - x^0\|_q^{q-1}}, & \text{если } i = 1, j \in N_n, \\ 0, & \text{если } i \neq 1, j \in N_n. \end{cases}$$

После несложных преобразований убеждаемся, что в обоих случаях справедливы равенства $\|C'\|_p = \eta$ и $C'_1(x - x^0) = -\eta \|x - x^0\|_q$. Поэтому $C' \in \Omega(\varepsilon)$, и с учетом (2) выводим $(C_1 + C'_1)(x - x^0) = C_1(x - x^0) - \eta \|x - x^0\|_q < 0$. Следовательно, $x^0 \notin L^m(C + C')$. Лемма 2 доказана.

Теорема. При любых $m \geq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$ для радиуса устойчивости ЛЮ x^0 векторной задачи ЦЛП $Z^m(C)$ справедлива формула

$$\rho_p^m(x^0, C) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{C_1(x - x^0)}{\|x - x^0\|_q}. \quad (3)$$

Доказательство. Для краткости правую часть формулы (3) обозначим Φ . Очевидно, что $\Phi \geq 0$.

Сначала докажем неравенство $\rho_p^m(x^0, C) \geq \Phi$. Не уменьшая общности, будем считать, что $\Phi > 0$. В соответствии с определением числа Φ для любого решения $x \neq x^0$ справедливо неравенство (1). Поэтому согласно лемме 1 $x \notin L^m(C + C')$ при $C' \in \Omega(\Phi)$. Отсюда $x^0 \in L^m(C + C')$. Следовательно, $\rho_p^m(x^0, C) \geq \Phi$.

Далее покажем, что $\rho_p^m(x^0, C) \leq \Phi$. Пусть $\varepsilon > \Phi$ и решения $x^* \neq x^0$ удовлетворяют равенству $\Phi \|x^* - x^0\|_q = C_1(x^* - x^0)$. Тогда очевидно существование числа η с условиями $\eta > C_1(x^* - x^0) \|x^* - x^0\|_q^{-1}$ и $\varepsilon > \eta > \Phi$. Поэтому в силу леммы 2 существует такая матрица $C^* \in \Omega(\varepsilon)$, что $x^0 \notin L^m(C + C^*)$. Следовательно, $\rho_p^m(x^0, C) \leq \Phi$. Теорема доказана.

Ввиду формулы (3) очевидно утверждение: если радиус устойчивости $\rho_p^m(x^0, C)$ больше нуля, то он положителен при любой норме l_p . О таком ЛО x^0 будем говорить, что он устойчив. Таким образом, из теоремы вытекает

Следствие. ЛО x^0 векторной задачи ЦЛП $Z^m(C)$, $m \geq 1$, устойчив тогда и только тогда, когда он является единственным оптимальным решением скалярной задачи $\min\{C_1x : x \in X\}$.

В заключение отметим, что аналогичное исследование радиуса устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи ЦЛП в случае нормы Гёльдера проведено в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке БГУ в рамках межвузовской программы «Фундаментальные и прикладные исследования» Республики Беларусь.

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.
3. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. // Optimization. 2002. Vol. 51. № 4. P. 645.
4. Емеличев В.А., Кузьмин К.Т. // Кибернетика и системный анализ. 2006. Т. 42. № 4. С. 175.
5. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. // Докл. НАН Беларуси. 2006. Т. 50. № 2. С. 5.
6. Emelichev V.A., Krichko V.N., Nikulin Yu. V. // Control and Cybernetics. 2004. Vol. 33. № 1. P. 127.

Поступила в редакцию 03.11.06.

Евгений Евгеньевич Гуревский - студент 4-го курса механико-математического факультета.

Владимир Алексеевич Емеличев - доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики.